









Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1911

München 1911
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München

Inhaltsübersicht.

I. Sitzungsberichte.

II. Abhandlungen.

Sitzungsberichte

der mathematisch-physikalischen Klasse
der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
1911.

Sitzung am 7. Januar.

Herr A. Sommerfeld spricht

Über die Struktur der γ-Strahlen.

Ausgehend von der Annahme, daß bei den radioaktiven Umwandlungen ein γ-Strahl der die Aussendung eines β-Strahls begleitende elektromagnetische Impuls sei, untersucht die Arbeit die Energie-Verteilung im γ-Strahl und zieht daraus Schlüsse auf die Deutung der Schwankungs-Erscheinungen einerseits, auf das Verhältnis der γ-Strahl- zur β-Strahl-Energie andrerseits.

(Die Abhandlung erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 4. Februar.

1. Herr Alfred Pringsheim macht im Anschluß an seine Abhandlung über limitär-periodische Kettenbrüche eine Mitteilung

Zur Theorie der Heine'schen Reihe.

Er weist darauf hin, daß die in jener Abhandlung entwickelten Eigenschaften der durch die Heine'sche Reihe definierten analytischen Funktion sich auch unmittelbar aus der Differenzengleichung, welcher die Heine'sche Reihe genügt, folgern lassen und knüpft daran eine überaus einfache und logisch natürliche Herleitung dieser Differenzengleichung.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr S. Finsterwalder legt vor eine Abhandlung

Über ebene Zirkulationsströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen von W. M. Kutta in Aachen.

Auf Grund zweier neuer Methoden zur Auffindung von ebenen Flüssigkeitsströmungen um Konturen von gegebener Form werden die Strömungen um sichelförmige Konturen, um dünne, ebene und gewölbte, übereinander befindliche Paare von Platten und nur zwei hintereinander befindliche ebene Platten berechnet und die dabei sich geltend machenden Auftriebe der strömenden Flüssigkeit untersucht.

(Die Abhandlung erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr K. v. Goebel legt vor eine Abhandlung von Professor H. Dingler in Aschaffenburg

Versuche über die Periodizität einiger Holzgewächse in den Tropen.

Während eines Aufenthaltes in Ceylon stellte der Verfasser Versuche über die Frage an, wie weit das Abwerfen des Laubes in der Trockenzeit auf innere oder äußere Bedingungen zurückzuführen sei. Namentlich sollte die Ansicht geprüft werden, wonach die zu Beginn der Trockenperiode abfallenden Blätter anatomisch nicht so gebaut seien, daß sie eine solche Periode überdauern könnten.

Die Versuche wurden in der Weise ausgeführt, daß eine Anzahl von Bäumen, welche normal im Januar und Februar laublos sind, durch „Schneidelung“ (Entfernung aller Blätter und aller jüngeren Zweige) im Oktober veranlaßt wurden, neue Blätter zu entwickeln. Es zeigte sich, daß mit Einer Ausnahme alle so behandelten Bäume ihr neues Laub während der ganzen Trockenperiode behielten, während ihre nicht behandelten Artgenossen kahl dastanden. Damit ist erwiesen, daß die äußeren Verhältnisse, welche der Eintritt der trockenheißen Zeit mit sich bringt, nicht die unmittelbare Ursache des Laubfalles dieser Bäume sein können.

(Die Abhandlung erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 4. März.

1. Herr A. Rothpletz sprach

über die ostbayerische Überschiebung und die Tiefbohrungen bei Straubing.

Die Vermutung, daß der Granit des bayerischen Waldgebirges zwischen Vilshofen und Passau südwärts über die Kreide- und Juraschichten von Ortenburg hinübergeschoben worden sei, hat durch jene zwei 800 m tiefen Bohrungen der Oberbayerischen Aktiengesellschaft für Kohlenbergbau eine glänzende Bestätigung erhalten. In einer Tiefe von über 100 m unter der Donauebene hat man das Rotliegende erreicht und in einer Mächtigkeit von 600 m durchbohrt, worauf man in die Mergel der oberen senonen, turonen und cenomanen Kreide kam. Zwischen Regensburg und Passau ist das ältere Granitgebirge auf eine Erstreckung von etwa 4 km in südwestlicher Richtung über die jüngere in nachjurassischer Zeit an jenem Gebirge abgesunkene Juratafel geschoben worden. Das Ereignis fiel in die vormiocäne Tertiärperiode. Dieser gewaltige horizontale Schub hat im Westen auf die Juraformation des Keilberges und des Galgenberges bei Regenstauf einen starken Druck ausgeübt und dabei jene auffälligen Verbiegungen, Verwerfungen und Breccienbildungen erzeugt, die besonders deutlich in den Gruben und Steinbrüchen des Keilberges zu sehen sind. Diese neuen Tatsachen machen eine erneute Untersuchung des geologischen Baues jener Gegend notwendig, doch kann schon jetzt folgende zeitliche Reihe für die Gebirgsbewegungen als wahrscheinlich gelten: 1. Zu Ende der Jurazeit Einbruch des Juraplateaus im Westen und Süden der großen, bogenförmigen Verwerfungsspalten von Keilberg, Freudenberg, Freihung, Grafenwöhr und der welligen Fichtelgebirg-Randspalte; 2. Überschiebung der Juraplatte im Donaugebiet durch das ostbayerische Granitgebirge und Entstehung der großen, SO—NW streichenden Amberger, Auerbacher, Kirchenturm-

bacher und Kulmbacher Spalte in alttertiärer Zeit; 3. Einbruch der Donauniederung zwischen Regensburg und Peinting in jungmiocäner oder pliocäner Zeit.

(Die Abhandlung erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr Rothpletz legte eine für die Denkschriften bestimmte Arbeit des Herrn Dr. Julius Schuster in München vor:

Monographie der fossilen Flora der Pithecanthropus-Schichten.

Die Abhandlung enthält die ausführliche Begründung der vom Verfasser vertretenen Ansicht, daß der javanische Pithecanthropus im Altdiluvium und zwar während des der Mindeleiszeit entsprechenden Höhepunktes der großen Pluvialperiode gelebt hat. Das Beweismaterial für diese Altersbestimmung bildet die durch die Selenka-Expedition in den Pithecanthropus-Schichten ausgegrabene fossile Flora, die in der Abhandlung eingehend untersucht und auch bildlich vorgeführt wird. Die 51 mit Sicherheit bestimmbaren Pflanzenarten gehören ein und derselben Epoche ohne wesentliche klimatische Schwankungen an und kommen alle noch heute lebend vor; sie sind daher nicht älter als diluvial. Während jedoch die Fundstelle des Pithecanthropus auf Java in der heißen Tropenzone (0—650 m) liegt, gehören die fossilen Pflanzen dem Regenwald der heute eine Höhenlage von 650—1500 m einnehmenden gemäßigten Region der Lorbeerbäume und zwar der oberen Grenze dieser Zone an. Ein nicht geringer Teil der fossilen Pflanzen wächst aber heutzutage überhaupt nicht mehr auf Java, sondern nur noch auf dem indischen Festlande, nämlich auf dem temperierten Himalaya, dem regenreichen Khassigebirge und in dem feuchten Assam. Daraus folgt, daß zur Zeit des Pithecanthropus die Vegetation um einen ganzen Höhengürtel von der heutigen verschieden und die Temperatur im Mittel um 6 Grad niedriger, die Niederschläge viel reichlicher waren. Eine solche thermische Depression kann nur dem Höhepunkte der großen Pluvialperiode entsprechen, für deren Existenz durch die fossile

Flora der Pithecanthropus-Schichten — die erste aus den Tropen bekannte Diluvialflora — zum ersten Male der paläontologische Beweis erbracht ist. Für die Pflanzengeographie ist das Ergebnis von Wichtigkeit, daß die heutige malaiische Flora aus dem Ursprunge nach verschiedenen Elementen zusammengesetzt ist, die auf den im Jungpliozän bestehenden Landverbindungen von Ostindien über die Sundainseln über Timor und Neuguinea nach Australien wanderten und umgekehrt, so daß die fossile Flora der Pithecanthropus-Schichten und ihre heutigen Relikte eine Mischflora aus sämtlichen Gebieten des indoaustralischen Florenreiches darstellen. Mit den hier vorgetragenen Anschauungen vollkommen übereinstimmende Ergebnisse erzielte der Verfasser durch die botanische Untersuchung der diluvialen Flora von Lasem im Norden von Mitteljava, wie er jüngst in den Sitzungsberichten der Akademie von Paris kurz mitteilte.

(Die Abhandlung erscheint in den Denkschriften.)

Öffentliche Sitzung
zur Feier der Vollendung des 90. Lebensjahres
Sr. Königl. Hoheit des Prinz-Regenten Luitpold
am 8. März.

Die Festsitzung eröffnete der Präsident der Akademie, Geheimrat Dr. Karl Theodor v. Heigel, mit folgender Ansprache:

Als unser Regent, um den Staat aus grenzenloser Verwirrung zu retten, in einem Alter, in dem der Gewissenhafteste sein Teil Arbeit redlich getan findet, an die Spitze des Staates trat, da ahnte wohl niemand, daß es diesem Fürsten noch beschieden sein sollte, so wichtigen politischen und staatswirtschaftlichen Neuerungen zum Durchbruch zu verhelfen, daß seine Regierungsperiode zu den fruchtbarsten der bayerischen Geschichte zählen wird.

Das Programm der äußeren Politik freilich war ebenso einfach wie weise. Unter König Ludwig II. hatte sich Bayern, um zur eigenen Stärke auch noch die Kraft des ganzen Vaterlands zu gewinnen, freiwillig der politischen Einheit Deutschlands unterworfen. Da waren für den Nachfolger die Richtlinien von selbst gegeben: Treues Festhalten an Kaiser und Reich! Die Erfüllung dieser Pflicht war ihm ein lieber Wunsch und das strengste Gesetz. Es gab keine Schwierigkeiten, weil man keine Schwierigkeiten haben wollte.

Dagegen sah sich der greise Regent in der inneren Politik vor überaus schwierige Aufgaben gestellt. Er war nicht für den Regentenberuf erzogen worden, obwohl der Vater merkwürdigerweise in seinen Unterrichtsvorschriften den Fall einer Thronbesteigung seines dritten Sohnes vorgesehen hatte,

— es fehlten ihm manche Kenntnisse, die man als unerläßliches Erfordernis anzusehen gewohnt war. Dafür kam ihm aber eine reiche Lebenserfahrung zustatten. „Das Alter“, schreibt Wilhelm von Humboldt an eine Freundin, „nimmt den Dingen der Welt ihre materielle Schwere und stellt sie mehr in das innere Licht der Gedanken, wo man sie in größerer, beruhigender Allgemeinheit übersieht.“ Vom freien und weiten Standpunkt seiner Erfahrung, unterstützt von einer gesunden Auffassungsgabe und getragen von einer unermeßlichen Herzensgüte, nahm unser Regent zu den bedeutungsvollen, die ganze Welt und unsren Einzelstaat bewegenden Fragen unerschrocken Stellung und löste sie im Sinne einer weitgehenden Volksfreundschaft. Um nur eins hervorzuheben, sei erinnert an die Aufnahme des allgemeinen Wahlrechts in die Verfassung. Die Reform bedeutet das Zugeständnis der politischen Rechte auch an die Besitzlosen, womit sogar über die Beschlüsse der berühmten Nachtsitzung in Versailles am 4. August 1789, welche Mirabeau die göttliche, die Partei des ancien régime die ruchlose nannte, im Zeichen der Freiheit und Gleichheit noch weit hinausgeschritten wird. Die wertvollste Tugend eines Fürsten ist: Die Seinen zu kennen. Unser Fürst kennt sein Bayernvolk und hofft, daß es Liebe mit Liebe, Treue mit Treue vergelten wird. Ob das hochherzige Vertrauen den verdienten Lohn finden wird, ob die Anhänger der historischen Distanzierung der Stände recht behalten werden, diese und ähnliche Fragen habe ich nicht zu erörtern, weil aus unserm friedlichen Asyl der Wissenschaft die Besprechung öffentlicher Angelegenheiten der Gegenwart ausgeschlossen ist.

Nicht als ob nicht auch in unser Haus die neue Zeit siegreich eingedrungen wäre! Wie sich im modernen Leben alles erweitert und gesteigert hat, muß heute auch den Bedürfnissen der Wissenschaft und des Unterrichts in ganz andrem Maße Rechnung getragen werden, als früher. Die wissenschaftliche Arbeit, die den Geist befruchtet, den Willen kräftigt, und die Elemente sich dienstbar macht, hat sich nach zahllosen Richtungen verästelt und verzweigt, die Untersuchungen

haben sich verallgemeinert und vertieft, andre Wege werden eingeschlagen, bisher unbekannte Bedürfnisse machen sich geltend, neue Disziplinen tauchen auf und scheinen ins Ungemessene zu wachsen.

Dieser zeitlich mit dem neuen Kurs der Weltpolitik zusammenfallende, von ihr beeinflußte und sie beeinflussende Großbetrieb der Wissenschaft ist in den letzten fünfundzwanzig Jahren auch in die Entwicklung unsrer Akademie und ihrer Attribute machtvoll eingedrungen. Ihre Arbeiten und Unternehmungen, alle nach wie vor darauf berechnet, in den Erscheinungen der Natur und des Geisteslebens die Evolution, den Ursprung und Werdeprozeß nachzuweisen, rerum cognoscere causas, wurden immer zahlreicher und komplizierter und mannigfaltiger, ihre Sammlungen und Institute reichhaltiger, umfassender, freilich auch kostspieliger. Um die Akademie instand zu setzen, ihrer Aufgabe als Heimstätte für das studium generale, für das Ganze der Wissenschaft gerecht zu werden, mußten die K. Staatsregierung und die beiden Kammern immer namhaftere Opfer bringen. Viele Etatspositionen stiegen auf das Doppelte, manche auf das Drei- und Vierfache. Nur ein Posten ist im Lauf der Zeiten unverändert geblieben. Die Beträge für die Teilnahme der Mitglieder an den Sitzungen, die sogenannten Präsenzgelder, stehen heute noch auf der nämlichen Höhe, wie vor 150 Jahren: gewiß ein Beweis, daß die Akademiker wenigstens nicht in eigennütziger Weise als Querulanten lästig gefallen sind!

Die Geschichte der neuen Zeit unsrer Akademie beginnt — der Zufall hat es so gefügt! — gerade mit dem Regierungsantritt unsres Regenten im Jahre 1886, mit dem Abzug der Akademie der bildenden Künste aus dem Wilhelminum, das sie bisher gemeinsam mit dem Schwesterinstitut innegehabt hatte. Leider wurde damals, da noch Reste der Kriegskostenentschädigung zur Verfügung gestanden hätten, versäumt, auch für die wissenschaftlichen Sammlungen des Staates einen neuen Monumentalbau auszuführen. Ich will heute in festlicher Stunde nicht an die Wunde rühren — ich glaube schon in

der letzten Sitzung den Beweis geliefert zu haben, daß ein Neubau allein ausreichende und zugleich die billigste Hilfe bringen kann. Mußten doch für Baureparaturen und Neueinrichtungen im Wilhelminum — ich kann die hohe Summe nicht ohne Wehmut nennen — ungefähr 1500000 Mark verausgabt werden, und trotzdem ist schon wieder eine Überfüllung der Räume eingetreten, die uns die Freude am wachsenden Reichtum verkümmert!

Nur der geringere Teil dieses Zuwachses wurde aus Staatsmitteln durch Kauf erworben, doch auch schon dazu waren beträchtliche Bewilligungen erforderlich. Müssen ja doch heutzutage z. B. für einzelne, zur Ausfüllung von Lücken des Münzkabinetts dringend erwünschte antike Münzen Summen gegeben werden, um welche König Ludwig I. große wichtige Sammlungen erwerben konnte. Nicht mehr die künstlerische oder archäologische Bedeutung, sondern die Laune reicher Liebhaber bestimmt den Preis; deshalb müssen sich die Meisterwerke griechischer Prägekunst als Opfer der Spekulation mißbrauchen lassen, wie die Kinder Floras in den Zeiten der Tulpenmanie in Holland, — eine Erscheinung, die auch auf andren Gebieten des Kunstmarktes lästig zutage tritt! Die Etats für Neuerwerbungen und wissenschaftlichen Betrieb der Sammlungen mußten von Jahr zu Jahr erhöht werden. Die Gesamtsumme der jährlichen Ausgaben stieg von 1886 bis 1910 von 226000 auf 437000 Mark. Dazu kamen noch außerordentliche Bewilligungen im Betrag von etwa 715000 Mark. Naturgemäß erheischte die Pflege der vermehrten Schätze auch vermehrte Hilfskräfte. Der Personaletat des Generalkonservatoriums der wissenschaftlichen Sammlungen belief sich 1886 auf 116000, im Jahre 1910 auf 220000 Mark. Möge man darin nicht eine Verschwendung beklagen! Die Erhöhung der Mittel machte es möglich, mehr als die doppelte Anzahl Hilfsarbeiter in Dienst zu stellen, die sich auf solche Weise am leichtesten und gründlichsten in ihren Beruf einleben können. Die beste Vorbereitung, sagt Goethe, ist die Teilnahme des Schülers am Geschäfte des Meisters!

Wir können nicht dankbar genug anerkennen, daß unsren Unternehmungen und Sammlungen auch zahlreiche Private zu Hilfe kamen. Wenn sich unter unsren Wohltätern keine Carnegies und Rockefellers befanden, beliefen sich doch ihre Stiftungen für sprach- und naturwissenschaftliche Zwecke in den letzten zwanzig Jahren auf nahezu anderthalb Millionen. Außerdem wurden in zahllosen Fällen günstige Gelegenheitskäufe durch größere und kleinere Geldspenden ermöglicht.

Noch reicheren Zuwachs brachten Schenkungen von Objekten aller Art, welche von Reisenden aus allen Teilen der Erde heimgebracht wurden. Unsre Sammlungen, vor allen die zoologische und die ethnographische, haben dadurch reichen Gewinn geerntet. Der ganze Charakter der Sammlungen ist durch die wachsende Fülle von Grund aus verändert worden. Ich muß es mir mit Rücksicht auf die Festrede versagen, die Metamorphose zu schildern, und will nur noch mit ein paar Worten erinnern an die in Ausführung begriffene Anlage eines neuen botanischen Gartens, einer großartigen Spende des Staates für Akademie, Hochschulen und Stadt, an die durchgreifende Reform des Antiquariums unter Furtwängler und Sieveking, an die Aufstellung einer technologischen Mineralsammlung und einer Sammlung alpiner, bayrischer, andrer deutscher und ausländischer Minerallagerstätten und Gesteine im mineralogischen Institut, an die Ausgestaltung des Medaillenschatzes im Münzkabinett, an die Angliederung einer neuen geologischen Sammlung an die paläontologische, an die im anthropologischen Institut fertiggestellte Rassenschädel-Sammlung, die reichhaltigste des Kontinents, und an ähnliche Neugründungen und Neueinrichtungen. Überall wird daran gearbeitet, das Vorhandene zu mehren, das Fehlende zu ergänzen, das noch Unbestimmte zu erklären, die Ordnung den neuesten Fortschritten des Fachstudiums anzupassen, allen Bedürfnissen wissenschaftlicher Arbeit gerecht zu werden. Ich kann von diesen Leistungen, ohne den Vorwurf des Selbstlobes scheuen zu müssen, unbefangen sprechen, da ich selbst als outsider keinen Anteil daran habe.

Nun ist aber noch die Frage zu beantworten: Werden die Sammlungen, auf welche soviel Geld und Mühe verwendet wird, auch ausreichend benützt?

Auch darauf darf ich, wie ich glaube, tröstliche Antwort geben. Unsere Anstalten unterscheiden sich von ähnlichen von mehr privatem Charakter, z. B. dem Deutschen Museum, von vornherein dadurch, daß sie in erster Reihe der Forschungsarbeit der Akademiker und dem Hochschulunterricht, dann erst zur Anregung und Belehrung für weitere Volkskreise und in letzter Reihe als sogenannte Sehenswürdigkeiten Dienste leisten sollen. Die Besuchsziffern sind nicht der einzige Gradmesser für den Nutzen einer Sammlung, und eine Gleichmacherei in den Benützungsvorschriften würde, wie dies auch von den öffentlichen Bibliotheken gilt, nur schädlich wirken. Wir verhehlen uns aber keineswegs, daß die Benutzbarkeit unsrer Anstalten für die Allgemeinheit noch gesteigert werden kann und muß. Sobald die Mittel geboten sein werden, ein zahlreicheres Aufsichtspersonal anzustellen, wird für eine erhebliche Vermehrung der Besuchstunden und auch für zweckdienliche Führungen und erläuternde populäre Vorlesungen Sorge zu tragen sein. Vor 130 Jahren sprach der Göttinger Schlözer den Wunsch aus: „Mögen wir immer näher den glücklichen Zeiten rücken, wo gelehrt und gemeinnützig reine Synonyma sind!“ Das Wort darf gewiß nicht dahin verstanden werden, daß für die Wissenschaft die Rücksicht auf praktischen Erfolg und Nutzen an erster Stelle stehen, daß der Forscher nur deshalb säen und pflanzen soll, um zu ernten, aber in höherem Sinne kommen doch tatsächlich alle Ergebnisse gelehrter Studien auch der Allgemeinheit zugute, und nicht Abschließen, sondern weites Öffnen der Tore ist die Losung des Tages. Wir wissen, was wir der neuen Zeit schuldig sind.

Seit 25 Jahren hat sich dieses Wirken und Schaffen der Akademie und ihrer Mitarbeiter des Schutzes und der Förderung unsres hohen Protektors zu erfreuen gehabt. Er hat, obwohl ihn des Herzens Neigung zur Kunst und zu den Künstlern hinzieht, auch an wissenschaftlichen Bestrebungen und am

Gedeihen unsrer Akademie immer warmen Anteil genommen. Die Auszeichnungen, die dem Vorstand zuteil wurden, waren immer nur als Ehrung der Körperschaft anzusehen. Einige Unternehmungen, geistes- und naturwissenschaftliche, hat der Regent aus eigenen Mitteln ermöglicht, es sei nur an die Ausgrabungen auf Ägina, an die Meeresforschungen in den ostasiatischen Gewässern etc. erinnert. Dankbar bringen also auch wir heute als Schutzbefohlene wie als gute Bayern und Deutsche dem Gütigen, dem Gerechten unsre Huldigung dar.

Als ein deutscher Diplomat dem Papste Leo XIII. zum 90. Geburtsfest Glück wünschte — das Geschichtchen wird von Joseph Unger in seinen „Betrachtungen und Bemerkungen“ erzählt — und dabei der Hoffnung Ausdruck gab, daß der Gefeierte auch noch 100 Jahre alt werden möge, sagte der lebensfreudige und lebenskräftige Papst lächelnd: „Ma perchè limitare la providenza?“ Auch wir wollen der göttlichen Vorsehung keine Schranken setzen, wir sind aber alle einig in dem Herzenswunsche: Gott segne, schütze und erhalte unsren Regenten!

Die K. Akademie der Wissenschaften hat in einer Gesamtsitzung am 4. Februar dieses Jahres einstimmig den Beschluß gefaßt, Seine Königliche Hoheit Prinz Rupprecht von Bayern als Ehrenmitglied in Vorschlag zu bringen. Seine Königliche Hoheit Prinz Luitpold, des Königreichs Bayern Verweser, hat diese Wahl durch Allerhöchstes Signat vom 11. vor. Mts. „gern und mit Vergnügen“ bestätigt, und Seine Königliche Hoheit Prinz Rupprecht hat die Wahl angenommen.

Unser Beschluß soll ebenso aufrichtige Hochachtung vor dem ernsten wissenschaftlichen Streben Seiner Königlichen Hoheit zum Ausdruck bringen, wie herzlichen Dank für verständnisvolle Förderung unsrer wissenschaftlichen Sammlungen. Auf weiten kunstgeschichtlichen und ethnographischen Gebieten hat sich Prinz Rupprecht, wie von den Fachgelehrten willig anerkannt wird, gediegene Kenntnisse erworben. Von diesem seinem reichen Wissen und seinem geläuterten Geschmack

gibt u. a. rühmliches Zeugnis das 1906 erschienene Werk: „Reiseerinnerungen aus Ostasien“, das eine Fülle selbständiger, interessanter Nachrichten bietet über Kunstschätze und Hausgeräte, Sprache und Volkssitte, Staatseinrichtungen und Religionsentwicklung, kurz, Nachrichten, welche eine wirkliche Bereicherung des ethnologischen Wissens über die geschilderten Länder bedeuten. Ebenso freudig und dankbar wird von allen Beamten und Freunden unsrer Sammlungen die unermüdliche Fürsorge anerkannt, welche Seine Königliche Hoheit dem Antiquarium, der Glyptothek, dem Ethnographischen Museum auf mannigfaltige Art und in anspruchslosester Form von jeher zugewendet hat.

Hieran schlossen sich folgende weitere Mitteilungen des Herrn Präsidenten und die Nekrologe der Klassensekretäre:

Im Frühjahre 1907 wurde folgende Preisaufgabe für die **Zographos-Stiftung** gestellt: „Das Plagiat in der griechischen Literatur, untersucht auf Grund der philologischen Forschung (über *κλοπή* und *συνέμπτωσις*), der rhetorisch-ästhetischen Theorie und der literarischen Praxis des Altertums.“

Am 10. November 1910 ist bei der Akademie eine Arbeit eingelaufen mit dem Motto: „Vollständigkeit ist der Tod der Wissenschaft.“ (Wilamowitz.)

Die Kommission hat darüber folgendes Urteil gefällt: Die umfangreiche Arbeit hat mancherlei herangezogen, was nicht ins Thema gehört; so ist der Abschnitt über die Nachahmung objektiver Erscheinungen als ästhetisches Prinzip auszuscheiden. Auf der anderen Seite hätten römische Literaturwerke öfter, wenigstens subsidiär verwendet werden sollen, z. B. die Epigramme Martials, die für die Geschichte der (unerläutert gebliebenen) Ausdrücke Plagiarius und Plagiat bedeutsam sind. Aber die Gesamtanlage und das Ergebnis der Arbeit ist zu billigen. Verdienstlich ist vor allem der Versuch, von der literarischen Praxis im Altertum ein Bild zu geben. Der Verfassser hat dafür aus der griechischen Literatur ein reiches Material zusammengebracht, das freilich

vielfach noch kritisch zu sichten ist. In der Hauptsache erscheint die Aufgabe als gelöst; die philosophisch-philologische Klasse hat beschlossen, der Arbeit den Preis zuzuerkennen.

Der Verfasser ist Dr. Eduard Stemplinger, Gymnasialprofessor in Augsburg.

Zugleich wird folgende neue Zographos-Preisaufgabe gestellt mit dem Endtermin 31. Dezember 1913:

> „Es soll untersucht werden, wieweit in der östlichen Hälfte des römischen Reichs neben dem Griechischen das Lateinische als Amts-, Rechts-, Heeres- und Kirchensprache verwendet wurde und welche Folgen seine Verwendung für die griechische Umgangs- und Literatursprache hatte. Die zeitliche Begrenzung der Aufgabe bleibt dem Bearbeiter überlassen."

Aus den der Akademie der Wissenschaften zur Verfügung stehenden Mitteln wurden folgende Summen bewilligt:

1. Aus dem **Therianosfonds**: für die Herausgabe der Byzantinischen Zeitschrift 1500 M.; an Karl Reichhold zur Fortsetzung seiner Arbeiten an dem Werke: „Griechische Vasenmalerei" 1000 M.; für die Unterstützung des griechischen Urkundencorpus 1000 M.; an Stephanos Xanthudidis in Kandia zur Herausgabe des Volksepos Erotokritos 1000 M.; an Dr. Friedrich Stählin, Gymnasialprofessor in Nürnberg, behufs topographischer Forschungen in Thessalien 1000 M.; an Dr. Georgios Sotiriadis, Ephoros der Altertümer und Konservator des Akropolismuseums in Athen, zur Neuherausgabe seiner topographisch-historischen Publikationen 300 M.; an Dr. Athanasios Buturas in Athen zum Besuche einiger deutschen Bibliotheken zwecks Studien für eine wissenschaftliche neugriechische Grammatik 300 M.; an Dr. K. E. Bitterauf, Gymnasialprofessor in Kempten, zu einer Neuherausgabe der Aristotelischen Schrift de generatione animalium 300 M.; an Dr. Jakob Haury, Gymnasialprofessor in München, zur Herausgabe des Prokop 400 M. Ferner wurden zwei Preise zu je 800 M. zuerkannt an Professor Chr. Tsundas in Athen

für sein Werk über Dimenion und Sesklos und an Professor Sp. Lambros in Athen für sein Werk über die Familie der Argyropuli.

2. Aus den Zinsen des **Mannheimer Fonds**: der Anthropologisch-prähistorischen Sammlung für die Erwerbung der Ofnetfunde 500 M.; dem Münzkabinett zum Ankauf eines Goldstaters von Kyzikos 1000 M.; dem Ethnographischen Museum für Erwerbungen aus der Mohammedanischen Ausstellung 1400 M.; dem Kryptogamenherbar und dem Botanischen Museum zu Herbarsubskriptionen und Ergänzungen je 500 M. = 1000 M.; der Paläontologisch-geologischen Sammlung zur Erwerbung eines Trachodon 2000 M.; der Zoologischen Sammlung zur Erwerbung eines großen Gorilla 3500 M.

3. Aus dem Etat für **naturwissenschaftliche Erforschung des Königreiches**: der Mineralogischen Sammlung zur Aufsammlung von Mineralien in Franken 400 M.; der Ornithologischen Gesellschaft in Bayern zur Fortsetzung der methodischen Erforschung des Vogelzuges in Bayern 400 M.; dem Pfarrer an der Oberpfälzischen Heil- und Pflegeanstalt Dr. Ignaz Familler zur Fortsetzung seiner Moosforschungen 100 M.; der Paläontologisch-geologischen Sammlung für geologische Untersuchungen in Bayern 800 M.; dem Erdmagnetischen Observatorium zur Vornahme von erdmagnetischen Spezialuntersuchungen in der Rhön 600 M.; dem Benefiziaten Alois Weber in München zur Erforschung der bayerischen Schneckenfauna 400 M.

4. Aus der **Münchener Bürger-Stiftung**: an Professor Dr. R. Goldschmidt für experimentelle Studien auf dem Gebiete der Erblichkeitslehre 1200 M.; an Professor Dr. A. Sommerfeld zur Berechnung von Tabellen 800 M.; an Professor Dr. G. Merzbacher zu meteorologischen Berechnungen 1000 M.; an Dr. Erich Zugmayer zu einer zoologischen Forschungsreise nach Beludschistan 2000 M.; der Anthropologisch-prähistorischen Sammlung zu Grabungen in einer Höhle bei Nördlingen 500 M.

5. Aus der **Cramer-Klett-Stiftung**: an Dr. B. Romeis für experimentelle Studien über Knorpel an der Zoologischen Station in Neapel 600 M.; an Dr. H. Balß zu Studien an Einsiedlerkrebsen 500 M.; an Geheimrat Dr. K. v. Goebel als Beitrag zu den Reisekosten des Dr. Ph. Frhrn. v. Lützelburg 1000 M.

6. Aus der **Königs-Stiftung** zum Adolf v. Baeyer-Jubiläum: an Professor Dr. O. Piloty zur Fortführung seiner Arbeiten über den Farbstoff des Blutes 800 M.; an Professor Dr. H. Wieland für Arbeiten über Diaryl-Hydroxylamine 600 M; an Exz. v. Baeyer zur Fortführung seiner Arbeiten über die Farbstoffe der Triphenylmethangruppe 2500 M.

7. Aus der **Königs-Stiftung für botanische und zoologische Forschungen und Forschungsreisen**: Dr. Erich Zugmayer zu einer zoologischen Forschungsreise nach Beludschistan 1000 M.

8. Aus dem **Hitlschen Fonds**: je ein Preis von 100 M. an die Bildhauer Hans Schwegerle, Friedrich Lommel und Viktor Oppenheimer, sämtlich in München.

Das Kuratorium der **Liebig-Stiftung** bei der K. Akademie der Wissenschaften bewilligte dem Direktor des Instituts für Pharmakologie und physikalische Chemie, Professor Dr. Rud. Kobert in Rostock 2000 M. zur Durchführung von Versuchen über die Giftigkeit rizinushaltiger Futtermittel.

Die mathematisch-physikalische Klasse hat acht korrespondierende Mitglieder verloren.

Johann Gottfried Galle. Im hohen Alter von 98 Jahren starb in Potsdam am 10. Juli 1910 der frühere Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte in Breslau J. G. Galle.

Er wurde am 9. Juni 1812 in Gräfenhainichen (zwischen Wittenberg und Bitterfeld) geboren. Nach Absolvierung des Gymnasiums in Wittenberg und nach einem 3jährigen Studium an der Universität Berlin war er 1833—35 Gymnasiallehrer, bis ihn sein Lehrer, der bekannte Astronom Encke, zum ersten und einzigen Gehilfen der Berliner Sternwarte berief. In dieser Stellung verblieb er bis zum Jahre 1851, wo er zum ordentlichen Professor der Astronomie und zum Direktor der Sternwarte in Breslau berufen wurde. Volle 45 Jahre wirkte er in diesen Stellungen, zog sich dann nach Potsdam zurück, wo er in der Familie seines Sohnes einen freundlichen Lebensabend genoß.

Galles Name wurde in weiteren Kreisen bekannt durch die Auffindung des Neptun, dessen Ort Leverrier aus den Einwirkungen auf Uranus vorausberechnet hatte und zwar mit einer überraschenden Genauigkeit. Über die näheren Umstände dieser tatsächlichen Auffindung liegen mehrfache Berichte vor. Danach waren besondere Schwierigkeiten bei der Auffindung des neuen Planeten nicht zu überwinden und Galle selbst hat es wohl lebhaft empfunden, daß ein besonderer Glücksfall seinen Namen mit einer der großartigsten und glänzendsten Errungenschaften der theoretischen Astronomie in Verbindung gebracht hat.

Indessen hat Galle während seiner langjährigen Assistentenzeit in Berlin vielfach seine Geschicklichkeit und seinen Fleiß als astronomischer Beobachter erwiesen. Neben einer großen Anzahl kleinerer Messungsreihen, die er mit dem seinerzeit hervorragend mächtigen neunzölligen Refractor von Fraunhofer ausführte, glückte ihm die Entdeckung von drei teleskopischen

Kometen. Das wichtigste Ergebnis seiner Berliner Tätigkeit aber dürfte die Entdeckung des dunklen Flor- oder Crape-Ringes des Saturn sein. Es unterliegt auch nicht dem geringsten Zweifel, daß Galle der erste Astronom gewesen ist, der dieses merkwürdige Gebilde sah. Erst 12 Jahre später wurde der Florring auch auf anderen Sternwarten, zuerst von Bond in Amerika, wahrgenommen.

Durch die Übersiedlung nach Breslau, wo ihm nur geringfügige Hilfsmittel zur Verfügung standen, wurde Galle leider seiner erfolgreichen beobachtenden Tätigkeit entzogen. Aber in seiner gewissenhaften Art fand er sich auch im neuen Wirkungskreis zurecht und leistete von nun ab der Astronomie in anderen Richtungen Dienste. Vor allem wurde er ein sehr erfolgreicher akademischer Lehrer. Aber auch rechnerische Arbeiten von Wert sind von ihm in jener Zeit ausgegangen. So war er der erste, der darauf aufmerksam machte, daß eine gute Bestimmung der Sonnenparallaxe durch die Beobachtung derjenigen kleinen Planeten geliefert werden muß, die der Erde verhältnismäßig nahe kommen und diese Methode hat neuerdings, wie bekannt, zu sehr wichtigen Resultaten geführt. Vielfach und mit großem Erfolg beschäftigte sich Galle mit Rechnungen über die Bewegung der Meteore und Feuerkugeln und er hat auch eine sehr brauchbare Methode zur Bahnbestimmung dieser kosmischen Körper geliefert. Eine seiner bekanntesten Leistungen ist ferner ein höchst sorgfältiges Verzeichnis aller bis 1894 berechneten Kometenbahnen mit quellenmäßigen Nachweisen, welches die Grundlage für viele Fragen bildet, die sich an diese immer noch sehr rätselhaften Himmelskörper knüpfen. Nicht unerwähnt darf schließlich bleiben, daß sich Galle große Verdienste um die Klimatologie erworben hat durch seine langjährigen Beobachtungen und die Verarbeitung anderer großen Reihen von Aufzeichnungen der meteorologischen Daten.

H. v. Seeliger.

Giovanni Virginius Schiaparelli wurde am 14. März 1833 in Savigliano (Piemont) geboren. Er studierte an der Universität Turin, wandte sich später ins Ausland und vollendete seine astronomische Ausbildung (1856—60) an der Universität Berlin und an der Sternwarte in Poulkowo bei St. Petersburg. Bereits 1862 wurde er zum Direktor der Sternwarte in Mailand als Nachfolger Carlinis ernannt. In dieser Stellung blieb er bis vor 10 Jahren. Zunehmende Kränklichkeit veranlaßte ihn zurückzutreten. Auch weiterhin mit wissenschaftlichen Arbeiten beschäftigt, beschloß er seine ruhmvolle Laufbahn am 4. Juli 1910 in Mailand.

Schiaparelli gehört zu den bekanntesten und verdientesten Astronomen der letzten Jahrzehnte. Es war ihm vergönnt, gleich mit seinen ersten Arbeiten einen wesentlichen Fortschritt in der Wissenschaft anzubahnen. Wohl war seit den dreißiger Jahren des 19. Jahrhunderts die Ansicht Chladnis über die kosmische Stellung der Sternschnuppen und Meteore über allen Zweifel erhoben, aber die hier einsetzenden Probleme waren noch nicht einmal formuliert.

Durch eingehendes Studium der vorhandenen Literatur war Schiaparelli auf die hier klaffenden Lücken in unserer Erkenntnis aufmerksam geworden und die Art und Weise, wie er sie ausfüllte, stellt in der Tat eine imponierende Leistung dar. Der Angelpunkt bestand in der Feststellung der Bewegungsgeschwindigkeit der Sternschnuppen, denn diese liefert in Verbindung mit dem Radiationspunkt eine vollständige Bahnbestimmung. Schiaparelli fand, wenn auch vielleicht nicht zuerst, so doch jedenfalls selbständig, in der Erscheinung der täglichen Variation in der Häufigkeit der Sternschnuppen ein Mittel zur Bestimmung der gesuchten Geschwindigkeit. Von diesem gewonnenen Ausgangspunkt schritt er weiter zur Feststellung der Bahnen der periodischen Sternschnuppen, zum Nachweise der Identität dieser Bahnen mit denen gewisser Kometen zur Aufstellung des Zusammenhangs der beiden Arten von Himmelskörpern, und der Ruhm, den er sich so erwarb, kann in keiner Weise dadurch beeinträchtigt werden, daß er

bei diesen Untersuchungen durch andere Astronomen unterstützt und gefördert worden ist. Die leitenden Ideen sind von ihm ausgegangen und sie werden auch in Zukunft, mögen sie auch im einzelnen modifiziert werden müssen, die Grundlage zu weiteren Forschungen bilden. — Die bedeutendsten und in jedem Falle originellsten Leistungen Schiaparellis sind sicherlich hier auf dem Gebiete der Meteorastronomie zu suchen. Seine große Popularität freilich verdankt er wohl in erster Linie seinen vielbesprochenen Marsbeobachtungen. Daß sich dabei Schiaparelli als hervorragender Beobachter erwiesen hat, ist zweifellos, ebenso, daß die von ihm entworfene Marskarte einen Merkstein in der himmlischen Topographie bedeutet. Die viel erörterten Marskanäle und ihre Verdoppelung mögen jetzt in anderer Interpretation und in anderem Zusammenhang zu uns sprechen, die Tatsache, daß seine Forschungen zur Neubelebung eines großen Gebietes astronomischer Betätigung geführt haben, steht fest.

In gleicher Weise sind die Beobachtungen Schiaparellis an Merkur und Venus als eine neue Ära eröffnend anzusehen. Er hat wohl zuerst die Tagesbeobachtung dieser Planeten als wichtig erkannt und erprobt und dieses Verdienst wird bebestehen bleiben, auch wenn die von ihm erhaltenen Resultate über die Umdrehungsgeschwindigkeiten sich nicht bestätigen sollten. In gleicher Weise, wie in der beschreibenden, erweist sich Schiaparelli in der messenden Astronomie als ein Beobachter ersten Ranges. In der Tat hat er durch Jahrzehnte hindurch ein großartiges Material von unschätzbarem Wert an Doppelsternmessungen geliefert, das noch in den fernsten Zeiten Früchte tragen wird.

So sehen wir in Schiaparelli den ideenreichen Denker mit dem unermüdlichen und sorgfältigen Beobachter vereinigt, eine Vielseitigkeit, die selten genug anzutreffen ist. Aber diese Vielseitigkeit in seinen Leistungen ist damit keineswegs erschöpft. Von allem Anfang an hatte er ein lebhaftes Interesse an historisch-astronomischen Fragen. Durch ausgebreitete Kenntnisse in den alten klassischen und orientalischen Sprachen

unterstützt, ging er der historischen Entwicklung astronomischer Forschung nach. Seine Studien über die Vorläufer des Kopernikus, über die Sphären des Eudoxus etc. sind als Meisterwerke allgemein anerkannt und mit Bewunderung sah man den alternden und kränkelnden Mann seine Blicke dunklen Teilen alter orientalischer Überlieferung zuwenden und sie kritisch durchleuchten. In Schiaparelli verehrt Italien einen seiner bedeutendsten Forscher der letzten Zeit und dies mit Recht. Ein langes Leben voll mühsamer und ununterbrochener Arbeit liegt nun abgeschlossen vor, aber auch ein durch allgemeine Anerkennung und große Erfolge verschöntes Leben. Daß ihm fast alle einem Gelehrten zugängliche Ehrungen zuteil geworden sind, konnte ihm, und war es wohl auch, ziemlich gleichgültig sein. Aber seine Zeitgenossen und insbesondere das neue Italien haben sich selbst geehrt, indem sie offenes Zeugnis ablegten für die hohe Wertschätzung, die ein Mann, wie Schiaparelli, in Anspruch zu nehmen berechtigt ist.

H. v. Seeliger.

Jakob Lüroth war geboren in Mannheim am 14. Februar 1844. Nach frühe beendeter Schulzeit, während deren er sich schon eifrig unter der Anleitung E. Schönfelds, des damaligen Direktors der Mannheimer Sternwarte, mit astronomischen Studien beschäftigt hatte, ging er 1862 nach Bonn, wohl in der ausgesprochenen Absicht, dort unter dem bekannten Astronomen F. Argelander sich ganz der Astronomie zu widmen. Wahrscheinlich aber hat er schon damals erkannt, daß seine Sehkraft einer so anstrengenden Tätigkeit auf die Dauer nicht gewachsen sein würde. So wandte er sich denn 1863 nach der Universität Heidelberg, an der die mathemathisch-naturwissenschaftlichen Fächer damals so glänzend durch Robert Bunsen, Hermann Helmholtz, Otto Hesse, Gustav Kirchhoff vertreten waren.

Hesse, der Meister in der Kunst der Behandlung der Theorie der algebraischen Kurven und Flächen, dem wir die Eleganz des analytisch-geometrischen Kalkuls verdanken,

welcher die Forderung erhebt, jede Rechnung mit Koordinaten zugleich als adäquaten Ausdruck eines geometrischen Gedankens sichtbar zu machen, und der auf diesem Wege das innere Gefüge zwischen den algebraischen Eliminationsprozessen und der geometrischen Formulierung in ihrer sich gegenseitig bedingenden produktiven Triebkraft aufzudecken vermochte, stand damals noch in der Blüte seiner fruchtbaren Tätigkeit. Glücklich zu preisen ist die deutsche Jugend, von solchen Lehrern geleitet zu werden, rief der italienische Mathematiker L. Cremona aus, als Hesses Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes 1861 erschienen waren.

Als Schüler von Hesse empfing nun auch Lüroth das Interesse für geometrische Forschung, das ihn seitdem nicht verlassen hat. Nach dem Heidelberger Studium ging er 1865 nach Berlin, um bei K. Weierstraß, dem klassischen Begründer der arithmetischen Funktionentheorie in Deutschland, zu hören, und diesem Aufenthalt verdankte er wesentlich das Verständnis für die grundlegenden Fragen der Analysis, das er später in seinen Arbeiten zu verwenden wußte.

Am nachhaltigsten aber hat doch ein kurzer Aufenthalt in Gießen auf Lüroth gewirkt, wo er bei Clebsch hörte. A. Clebsch, der, an C. G. J. Jacobi anknüpfend, mit der souveränen Beherrschung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und ihrer Anwendung auf Probleme der Hydrodynamik und Elastizitätstheorie seine glänzende Laufbahn begann, hatte, darin weitaus über seinen einstigen Königsberger Lehrer Hesse hinausgehend, die Theorie der algebraischen Kurven und Flächen vermöge der projektiven Koordinaten, die er an Stelle der Hesseschen nur formal homogenen Koordinaten treten ließ, mit der Invariantentheorie und zugleich in äußerst fruchtbarer Weise mit der Riemannschen Theorie der algebraischen Funktionen durch den Geschlechtsbegriff in Verbindung gesetzt. Und in eben dieser Gießener Zeit war, in Gemeinschaft mit seinem Freunde P. Gordan, als Fortbildung der von ihm in Crelles Journal begonnenen Arbeiten über die Anwendung der elliptischen Funktionen in der Geometrie der

algebraischen Kurven die epochemachende Theorie der Abelschen Funktionen erschienen (1866).

Die tiefe Wirkung, welche von Clebschs wissenschaftlicher Persönlichkeit ausging, wurde noch erhöht durch sein ganz ungewöhnliches und für die ganze Folgezeit vorbildliches Talent, seine Schüler in diese zu jener Zeit ganz neuen Gebiete einzuführen. Wer damals das Glück hatte, bei Clebsch zu hören, wird sich auch heute noch des Zaubers erinnern, in den dieser so früh verstorbene Mathematiker seine Hörer zu versetzen wußte.

Lüroth erwarb 1865 den Doktorgrad an der Universität Heidelberg, habilitierte sich daselbst 1867[1]), ward aber schon im folgenden Jahre an die polytechnische Schule zu Stuttgart berufen. Bereits 1869 zum ordentlichen Professor daselbst ernannt, erhielt er 1880 den Ruf an das Polytechnikum in München. Aber nur kurze Zeit hat er dort zugleich mit seinem Studiengenossen und Freunde A. Brill zusammengewirkt. Schon 1883 entschloß er sich, der Berufung an die Universität Freiburg i. B. zu folgen, wo er bis zu seinem am 14. September 1910 erfolgten Tode geblieben ist.

Unserer Akademie hat er seit 1882 angehört. Er hat auch, nachdem er als Freiburger Professor in die Zahl ihrer korrespondierenden Mitglieder übergetreten war, mehrfach Arbeiten in ihren Berichten und Abhandlungen veröffentlicht, und ist so mit ihr beständig in reger Verbindung geblieben. Lüroth war auch Mitglied der Erlanger physikalisch-medizinischen Gesellschaft, langjähriger Vorstand der mathematischen Sektion der Leopoldina, sowie Mitglied der neugegründeten Heidelberger Akademie der Wissenschaften.

Die Anregungen, welche Lüroth bei seinen Studien erhalten hatte, und die insbesondere den drei Gebieten der Geometrie, der Analysis und der angewandten Mathe-

---

[1]) Lüroth hat dort namentlich eine Vorlesung über algebraische Kurven und Flächen gehalten, an der auch M. Noether teilnahm, dessen freundlichst erteilte wertvolle Bemerkungen über Lüroths historische Entwicklung ich mehrfach in dieser kleinen Skizze habe benützen dürfen.

matik angehören, sind während seines weiteren Lebens in vielseitigster Weise zum Ausdruck gekommen.

Zunächst galten seine Interessen dem Kreise von Fragen, welche die Schüler von Clebsch so lebhaft bewegten. Eine erste Frucht derselben war seine 1867 in Crelles Journal erschienene Arbeit über windschiefe Flächen, in der er die Grundzüge der neuen von J. Plücker geschaffenen „Geometrie des Raumes, gegründet auf die gerade Linie als Raumelement“, die bald darauf durch F. Kleins Bearbeitung des Plückerschen Nachlasses und Clebschs Göttinger Vorlesungen die Geometer zu neuen Problemen anregte, in ihrer Anwendung auf die Theorie der geradlinigen Flächen entwickelte und zugleich mit dem Riemann-Clebschschen Geschlechtsbegriff in Verbindung brachte.

Die ohne Beweis veröffentlichte Entdeckung des englischen Mathematikers J. Sylvester, daß die Gleichung der allgemeinen Fläche dritter Ordnung durch das Verschwinden der Summe von fünf Kuben linearer Funktionen der projektiven Koordinaten dargestellt werden kann, deren Richtigkeit auch J. Steiner bestätigt hatte, wiederum, ohne den Beweis dafür auch nur anzudeuten, hatte Clebsch in einer wichtigen Arbeit vollständig begründet. Diese lenkte die Aufmerksamkeit auf ähnliche Fragen in der Theorie der algebraischen Kurven. Daß die ebene Kurve dritter Ordnung auf unendlich viele Arten als gleich Null gesetzte Summe von vier Kuben linearer Funktionen dargestellt werden kann, war schon längst bekannt. Man konnte aber nach Plückers induktorischer Konstanten-Abzählungsmethode, die auch den heuristischen Grund zu Sylvesters Theorien von der Fläche dritter Ordnung gebildet haben wird, geneigt sein, auch für die allgemeine ebene Kurve vierter Ordnung eine Darstellung durch fünf Biquadrate als möglich anzusehen. Aber Clebsch hatte schon 1859 gezeigt, daß für Kurven, die sich so darstellen lassen, eine gewisse Invariante verschwinden muß. Lüroth gab nun im ersten Bande der von Clebsch begründeten mathematischen Annalen den Beweis, daß die Clebschsche Bedingung nicht

nur notwendig sondern auch hinreichend ist, um die Transformation auf diese kanonische Form zu ermöglichen. Dabei wurde er noch auf eine zu den Kurven von Clebsch kovariante Klasse von Kurven vierter Ordnung geführt, welche durch die Eigenschaft charakterisiert sind, die Ecken eines vollständigen Fünfseits zu enthalten. Diese „Lürothschen Kurven“ sind seitdem mit manchen anderen Betrachtungen in Zusammenhang gebracht worden, so von F. Schur und G. Humbert; auch Lüroth selbst ist auf seine Arbeit später (1878) wieder zurückgekommen.

Eine andere geometrische Arbeit knüpft ebenfalls direkt an Clebsch an. Letzterer hatte im Anschluß an seine Theorie der Kurven, deren Koordinaten eindeutig durch elliptische Funktionen dargestellt werden können, auf die rationalen Kurven als ein besonders wichtiges Paradigma zum Studium der Kurvenlehre aufmerksam gemacht. Verhalten sich nun die projektiven Koordinaten der Kurve wie drei rational ganze Funktionen desselben Grades eines Parameters λ, so entspricht freilich jedem Punkte der λ-Geraden ein Kurvenpunkt, es können aber umgekehrt n-Punkte der Geraden dem letzteren zugehören. Lüroth zeigte nun, daß man an Stelle einer rationalen Funktion von λ immer, natürlich auf mehrfache Art, einen neuen Parameter μ so einführen kann, daß die Beziehung zwischen der Kurve vom Geschlecht Null und der Geraden eine umkehrbar eindeutige wird.

Auf diesen Satz, der stillschweigend der Clebschschen Arbeit zu Grunde lag, kam er nach längerer Zeit zurück, um ihn auf den weit schwierigeren Fall zu erweitern, wo die Koordinaten einer algebraischen Fläche vier Funktionen desselben Grades von zwei Parametern λ, μ proportional sind. Es ist dies die Arbeit über rationale Flächen und involutorische Transformationen, die er bei Gelegenheit seines Rektorats zu Freiburg 1889 veröffentlichte. Allerdings war es G. Castelnuovo vorbehalten, den schönen Satz, daß auch hier die Beziehung stets zu einer umkehrbar eindeutigen durch Einführung neuer Parameter gemacht werden kann, vier Jahre später

in den Berichten der Accademia dei Lincei vollständig zu beweisen[1]).

Und noch ein anderes fundamentales Problem der Geometrie hat Lüroth schon früh in Angriff genommen: die Rechtfertigung der Einführung des Imaginären in die Geometrie, von der die analytische Behandlung längst unbeschränkten Gebrauch gemacht hatte, und die auch für die synthetische Geometrie eine Notwendigkeit war, wenn sie nicht auf die Allgemeinheit ihrer Sätze verzichten wollte, dieses Gespenstes in der Ebene und im Raume, mit dessen Bekämpfung Steiner vergeblich gerungen hatte.

Chr. von Staudt, der ausgezeichnete Erlanger Geometer, hatte den entscheidenden Schritt dazu getan durch die Theorie der mit einem Sinne versehenen Involutionen ohne reelle Doppelelemente, aber seine Untersuchungen doch nur für die Gebilde zweiten Grades in der Ebene und im Raume durchgeführt.

Dies nun auch für die Gebilde höheren Grades zu leisten, suchte Lüroth in dem in den mathematischen Annalen, Band 8, 1875 erschienenen Aufsatze „Über das Imaginäre in der Geometrie und die Rechnung mit Würfen". Doch befriedigte ihn jene Darstellung bald selbst nicht mehr ganz, und er fand, auf dieselbe in dem bezeichneten Umfange zurückzukommen, um so weniger Veranlassung, als von E. Kötter 1887 in einer mit dem Steinerschen Preise von der Preußischen Akademie der Wissenschaften gekrönten Arbeit, die zugleich den Parallelismus der analytischen und synthetischen Methoden aufzeigt, diese Aufgabe eine ausführliche Lösung erfahren hatte.

Wir haben so einige rein geometrische Arbeiten Lüroths berührt, und wenden uns nun zu seinen der Analysis angehörenden Forschungen. Einen Übergang dazu bilden seine schon aus früher Zeit stammenden, aus dem Studium des Clebsch-Gordanschen Werkes hervorgegangenen Untersuchungen über die kanonische Gestalt der Riemannschen Fläche (1871 in den mathematischen Annalen), in welchen er,

[1]) Eine ausgeführte Darstellung findet sich im 44. Band der mathematischen Annalen.

auf rein topologische Gesichtspunkte gestützt, zeigte, daß diese Fläche eine typische Darstellung erhalten kann, bei der die Verzweigungspunkte eine ebenso übersichtliche Lage besitzen, wie im hyperelliptischen Falle. Clebsch selbst, der dieser Lürothschen Arbeit Wert beilegte, hat seine Betrachtungen später noch erweitert. Aber auch Lüroth behielt diese Dinge dauernd im Auge, und so entstanden 1884 und 1887 die beiden umfangreichen Arbeiten über die kanonischen Perioden der Abelschen Integrale, welche im 15. und 16. Bande unserer Abhandlungen veröffentlicht sind.

Von 1878 an begannen die fundamentalen Untersuchungen Georg Cantors über die Beziehung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension aufeinander seine Aufmerksamkeit auf sich zu ziehen, dieser Frage, welche den Mannigfaltigkeitsbegriff, den Riemann auf die Anzahl der voneinander unabhängigen Koordinaten in seiner Habilitationsschrift gegründet hatte, aufzuheben schien. Zwar waren schon verschiedene Beweise geführt, das Cantorsche Paradoxon dahin aufzuklären, daß eine umkehrbar eindeutige stetige Beziehung zwischen Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension unmöglich sei, aber Lüroth wies schon auf der Naturforscherversammlung in Cassel 1878 darauf hin, daß aus denselben keine Entscheidung gewonnen werden könne. So entstand zunächst ein Aufsatz über die Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension aufeinander in den Berichten der Erlanger Medizinisch-physikalischen Gesellschaft 1878, sowie 1882 in den mathematischen Annalen über die durch Zahlen vermittelst eindeutiger Abbildung der Punkte des Quadrates auf eine geradlinige Strecke. Auf die allgemeine Frage der Abbildbarkeit von Räumen verschiedener Dimension aufeinander ist Lüroth noch 1899 in den Erlanger Berichten, sowie 1906 im 63. Band der mathematischen Annalen zurückgekommen. In den letzteren zeigt er vermittelst eines ihm eigentümlichen geometrischen Verfahrens, daß eine stetige umkehrbar eindeutige Beziehung von Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n, $m > n$, wenigstens für die Fälle $n = 1, 2, 3$ nicht möglich ist.

Wie tief ihn aber die fundamentalen Fragen der Analysis überhaupt berührten, zeigt die Bearbeitung der „Grundlinien für eine Theorie der Funktionen einer reellen Variabelen“ des ausgezeichneten italienischen Mathematikers Ulisse Dini, die er in Verbindung mit seinem Schwager A. Schepp unternahm, welcher, der italienischen Sprache vollkommen mächtig, besonders geeignet erschien, die Wiedergabe eines so abstrakt geschriebenen Werkes für das deutsche Publikum zu unterstützen. Lüroth hat in dasselbe zugleich die Forschungen der deutschen Mathematiker G. Cantor, P. du Bois-Reymond, K. Weierstraß aufgenommen, soweit es die dem Werke, das er mit Recht in seiner Eigenart zu erhalten suchte, gesteckten Grenzen gestatteten.

Seine anfängliche Beschäftigung mit der praktischen Astronomie hatte, wie schon erwähnt, Lüroth, wohl in Rücksicht auf seine Kurzsichtigkeit, aus der sich später ein schweres Augenleiden entwickelte, aufgeben müssen. Das lebendige Interesse für die Anwendungen der Mathematik auf Mechanik, Physik, Astronomie und Geodäsie aber ist ihm geblieben und bildet einen charakteristischen Zug seiner wissenschaftlichen Persönlichkeit. Seine Vorlesungen über Astronomie, insbesondere die über populäre Astronomie, waren stets sehr zahlreich besucht. Mehrfach hat er sich auch geradezu mit geodätischen Fragen beschäftigt, wie zum Beispiel in dem durch die Allgemeinheit der geometrischen Fragestellung bemerkenswerten Aufsatze in den Sitzungsberichten unserer Akademie vom Jahre 1892 über die Bestimmung einer Oberfläche durch geodätische Messungen. Diese mit großem Scharfsinn ausgeführten Studien über geodätische Abbildung, welche er im 51. Bande der mathematischen Annalen noch weiter ausführte, zeigen, daß die Begriffe der projektiven Geometrie auch bei Untersuchungen der Geodäsie fruchtbar sind und zu neuen, eigentümlichen Problemen Veranlassung geben.

So interessiert ihn auch in der Festschrift zum fünfzigjährigen Regierungsjubiläum des Großherzogs Friedrich von Baden die Frage, ob jede Fläche, deren sämtliche Tan-

gentenkegel vom zweiten Grade sind, selbst eine Fläche zweiten Grades sein müsse; sie erscheint ihm als ein Beispiel dafür, aus der scheinbaren Gestalt eines Körpers die wirkliche zu bestimmen. Indem er es verschmäht, dieselbe im dualistischen Sinne aufzufassen, wo sie allerdings fast unmittelbar zu beantworten ist, bedient er sich der gleich zu erwähnenden Vektorrechnung zur Behandlung.

Damit betreten wir das Gebiet der Mechanik. Bereits im Jahre 1884 entstand sein Grundriß der Mechanik, der gänzlich abweichend von der klassischen Darstellung im Lagrange-Jacobischen Sinne, der auch Clebsch in seinen viel benutzten Karlsruher Vorträgen über analytische Mechanik zu folgen pflegte, unter sorgfältiger Berücksichtigung der Lehren von der absoluten und relativen Bewegung und der empirischen durch die Tatsachen der Astronomie und physikalischen Geographie gelieferten Daten, im Anschluß an H. Graßmanns Ausdehnungslehre und an der Hand der Hamiltonschen Quaternionenrechnung die ausführlichen Rechnungen der analytischen Behandlungsweise zu vermeiden sucht. Lüroth hat damit einen Weg betreten, der, seitdem man sich gänzlich auf die Vektorenrechnung beschränkt hat, namentlich durch A. Föppls wirksamen Einfluß allgemein zur Durchführung auch in Deutschland gekommen ist; allerdings scheint seine Schrift, wohl hauptsächlich wegen der in derselben verwendeten Hamiltonschen Symbolik, keine große Verbreitung gefunden zu haben. Lüroth hat übrigens auch selbst die Kinematik des starren Körpers (in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band 43, 1898) nach den Methoden Graßmanns behandelt.

Sein Interesse für die praktische Verwendung der Mechanik geht auch daraus hervor, daß er das Werk des englischen Mathematikers J. Jellett über die Theorie der Reibung 1890 (wiederum in Gemeinschaft mit A. Schepp) in deutscher Sprache herausgab. Und ein wesentliches Verdienst erwarb er sich noch durch die 1900 erfolgte Herausgabe der auf Mechanik bezüglichen Arbeiten H. Graßmanns, insbesondere der in

dessen Nachlasse vorhandenen hierher gehörigen Fragen, die er schon 1893 druckfertig vorbereitet hatte.

Eine ganze Reihe kleinerer Aufsätze astronomischen Inhaltes, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und verwandten Gebieten, stammen schon aus seinen ersten Dozentenjahren. Seit 1875 hatte Lüroth auch wiederholt Vorlesungen über die Praxis des numerischen Rechnens gehalten. So entstanden die 1900 von ihm veröffentlichten „Vorlesungen über numerisches Rechnen“, dieses von manchen vernachlässigte und doch eigentlich für die Entwicklung der Mathematik so fundamentale Gebiet, das seitdem durch R. Mehmke in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften eine so umfangreiche Darstellung erhalten hat. Abgesehen von den von dem Leipziger Astronomen H. Bruns verfaßten „Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens“, 1903, welche gleichsam einen zweiten Teil der Lürothschen Schrift bilden, ist dieses Werk, wie es scheint, die einzige Monographie geblieben, die in neuerer Zeit in Deutschland über die Technik des Rechnens erschienen ist.

In dieser Schrift, die, von den einfachsten Grundlagen des Ziffernrechnens ausgehend, die Konstruktion der Rechenmaschinen behandelt, und eine Fülle von Winken enthält, die nur dem praktischen Rechner geläufig sein können, um schließlich mit der approximativen Lösung der trinomischen Gleichungen zu enden, zeigt sich zugleich die Wertschätzung, welche Lüroth auf die Beherrschung der elementaren Mathematik als unerläßliche Bedingung für den künftigen Lehrer der Mathematik legte, die er auch in Vorlesungen und Übungen seinen Schülern nachdrücklich ans Herz legte, eine Maxime, die gerade in der Gegenwart durch die Betonung der Entwicklungsgeschichte der Mathematik und die Anknüpfung an die bereits im Altertum erfaßten großen Ideen erhöhte Bedeutung gewonnen hat.

Mit dem wenige Jahre älteren, ebenfalls aus Mannheim stammenden Ernst Schröder, dem scharfsinnigen Entwickler des Logikkalkuls in Deutschland, stand Lüroth in lang-

jähriger freundschaftlicher Beziehung. Er gehörte namentlich zu denen, die dem Logikkalkul Verständnis und Interesse entgegenbrachten, und gewiß nicht nur dem Freunde zu Gefallen, sondern weil sein eigenes Denken sich ebenfalls gern in abstrakten Formen bewegte, wenn er auch selbst nicht eigentlich produktiv auf diesem Gebiete hervorgetreten ist. Schon in seinen ausführlichen Rezensionen (in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band 36, 1891; 42, 1897) des ersten und dritten Bandes von Schröders groß angelegtem Werke sucht er mit ganz ungewöhnlicher Klarheit Inhalt und Tendenz desselben einem größeren Kreise verständlich zu machen und auf die Fruchtbarkeit dieser Logik des Umfanges hinzuweisen, welche eine Fülle von neuen jedenfalls höchst beachtenswerten Problemen stellt. Doch verhehlte er sich nicht, daß die Hoffnungen, welche Schröder sich über den praktischen Erfolg seiner Besprechungen machte, sich nicht erfüllen würden, solange es nicht gelang, Aufgaben zu bezeichnen, die sich in bequemerer Weise durch die Algebra der Logik, als durch die gewöhnlichen direkten Methoden lösen ließen[1]).

Und dem Freunde, dem es nicht vergönnt war, sein Lebenswerk zu vollenden, setzte er im 12. und 13. Bande der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1903/04 ein von liebevollem Geist getragenes Denkmal, noch einmal in ausgezeichnet durchsichtiger Weise die Grundzüge seiner Forschungen, namentlich auch die über die „Algebra der Relative", hervorhebend.

Diesem kurzen Abriß, der nur den Zweck hatte, die ausgebreitete und originelle Vielseitigkeit des Verstorbenen an einzelnen Beispielen zu schildern, und keineswegs den Anspruch erhebt, eine vollständige Würdigung seiner gesamten

---

[1]) Schröder war übrigens nicht immer nur Enthusiast für den Logikkalkul. Mir gegenüber äußerte er, allerdings zu Beginn seiner Arbeiten (1876), einmal in seiner drastischen Weise: „Ich glaube damit auch wohl eine Fliege gefangen zu haben, wenn es auch vielleicht nur eine Schmeißfliege ist."

wissenschaftlichen Arbeiten anzustreben[1]), von denen nur ein Teil aus den drei Gebieten der Geometrie, Analysis und der angewandten Mathematik namhaft gemacht ist, seien noch einige Bemerkungen allgemeinen Charakters hinzugefügt.

Inmitten seiner unablässigen Arbeiten, trotz der mannigfachen Hemmungen, die ihm sein Augenübel und ein sich allmählich entwickelndes Herzleiden verursachte, fand Lüroth doch noch Zeit, sich nicht allein seinem Lehrberufe mit der größten Hingebung zu widmen, sondern auch die Geschäfte seiner Fakultät durch seinen stets hochgeschätzten Rat zu unterstützen. So gewann er in Freiburg bald eine allgemein verehrte Stellung. Er war Rektor der Universität im Jahre 1890; wiederholt zum Dekan gewählt, leitete er noch im letzten Lebensjahre unter ganz besonders wichtigen Umständen, die mit einer Umgestaltung der Verfassung der philosophischen Fakultät zusammenhingen, die Dekanatsgeschäfte, bis unerwartet schnell der Tod ihn seinem schönen Familienkreise, seinen zahlreichen Freunden und der Wissenschaft entriß, der er gewiß noch manche wertvolle Gabe zu bieten gehabt hätte.

Lüroth war eine vornehm empfindende, fein organisierte, ruhige Natur, vielfach von künstlerischen und literarischen Interessen erfüllt, die auch in seinem Hause gepflegt wurden, voll Herzensgüte und Versöhnlichkeit, von reinster Lauterkeit des Charakters, beseelt vom eifrigsten Interesse für seine Schüler, in nie getrübter langjähriger Freundschaft mit seinen Studiengenossen A. Brill, E. Schröder, M. Noether und seinen Freiburger Kollegen verbunden. So gestaltete sich denn auch sein Begräbnis am 18. September zu einem tief empfundenen Trauerakte, der wohl allen denen, die daran teilnehmen konnten, in bleibender Erinnerung haften wird. „Nichts lag, sagt sein Kollege L. Neumann in seiner pietätvollen Grabrede, seinem klaren Sinne fern, nichts war seinem Interesse

[1]) Wie ich von Herrn M. Noether erfahre, wird eine solche in einem von ihm und Herrn Brill gemeinsam verfaßten Nachruf in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung gegeben werden.

fremd, was irgendwie einen Menschengeist fesseln, ein Menschenherz erwärmen kann. Und darin lag gerade seine Bedeutung, daß sein Wirken nicht nur segensreich zur Geltung kam im Hörsaal und im Seminar, sondern auch in allen Fragen, die die Gesamtheit unserer akademischen Körperschaft angehen. Der Universitas literarum galt stets seine volle Teilnahme nach jeder Richtung hin."

Und ein solch ehrenvolles Andenken wird der edlen Persönlichkeit des feinsinnigen Mathematikers auch unsere Akademie stets bewahren.

A. Voss.

Stanislao Cannizzaro wurde am 13. Juli 1826 als Sohn eines hohen Polizeibeamten in Palermo geboren. Im Herbst 1845 lernte er den berühmten Physiker Melloni kennen, welcher ihm riet, bei Piria in Pisa Chemie zu studieren. Piria, der hervorragendste italienische Chemiker der damaligen Zeit, nahm in seinem Laboratorium nicht nur die jungen Leute auf, die Lust hatten, sich der Chemie zu widmen, sondern spürte sie sogar in den verschiedenen Orten Italiens auf. „Ich bin, erzählte Cannizzaro, wie sein Schüler Miolati berichtet, eine Frucht dieser Jagd nach Schülern, und verdanke es Melloni, der von Piria beauftragt war, Schüler für das Pisaner Laboratorium anzuwerben, daß ich dahin gegangen bin und mich mehr der Chemie als einem anderen Zweige der Wissenschaften gewidmet habe. Denn ich möchte nicht unterlassen zu gestehen, daß ich zum Unterschied von Piria nicht durch einen mächtigen inneren Drang zu diesem Beruf, sondern durch die Anziehungskraft dieses berühmten Lehrers dazu veranlaßt wurde, diese Laufbahn zu erwählen."

Dieses Geständnis ist in hohem Grade bemerkenswert, weil Cannizzaro unter den Begründern der modernen Chemie einen hervorragenden Platz einnimmt, während seine chemischen Arbeiten nur eine mäßige Bedeutung haben. Seine erste chemische Untersuchung über die Benzylverbindungen hat er unter Pirias Leitung begonnen, und die umfassendste Unter-

suchung aus seinen späteren Lebensjahren über das Santonin erhebt sich nicht über das mittlere Niveau derartiger Arbeiten.

Das Werk, welches Cannizzaro so berühmt gemacht hat, war ein kleines Schriftchen „Sunto d'un corso di filosofia chimica", welches 1858 erschien und einen Auszug aus Vorträgen enthielt, die er an der Universität Genua gehalten. Diese Schrift wurde erst im Jahre 1860 bei Gelegenheit des Chemiker-Kongresses in Karlsruhe in weiteren Kreisen bekannt.

Lothar Meyer sagt darüber in einer Anmerkung zu der deutschen Ausgabe des „Sunto" in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften folgendes:

„Um den Einfluß, welchen diese Abhandlung Cannizzaros auf die Entwickelung der theorethischen Chemie geübt hat, richtig würdigen zu können, muß man sich völlig in den Stand der chemischen Theorien zurückversetzen, wie er zur Zeit des Bekanntwerdens der kleinen Schrift sich gestaltet hatte. Man erkennt dann leicht, daß damals zwar zu dem auf den Trümmern der elektro-chemisch-dualistischen Theorie zu errichtenden Neubau bereits viele mächtige Bausteine vorhanden waren, daß aber erst Cannizzaros Abhandlung den Schlußstein des Gewölbes lieferte und diesem damit die Festigkeit gab, ohne welche es das seither fast ins Ungeheuerliche angewachsene experimentelle Material nicht zu tragen vermocht hätte, das jetzt in Form eines regelrechten Baues sicher auf ihm ruht.

Als die Verwilderung den Gipfel erreicht zu haben schien, zugleich aber einige Hoffnung auftauchte, es möchte durch gegenseitigen persönlichen Meinungsaustausch wenigstens über einige Hauptpunkte einige Einigung erzielt werden können, unternahmen es drei angesehene Vertreter neuerer Richtungen, Weltzien in Karlsruhe, Wurtz in Paris und August Kekulé damals in Gent, im September 1860 eine Versammlung aller gelehrten Chemiker der Welt nach Karlsruhe zusammenzuberufen. Weit über hundert der Geladenen folgten dem Rufe, und man kann sagen, daß in den seither verflossenen Jahren niemals mehr eine so glänzende Versammlung von Chemikern irgendwo in der Welt getagt hat."

Die gehoffte Einigung wurde indessen nicht erzielt, und am Schlusse fassten Hermann Kopp und Otto Linné Erdmann als Vertreter des chemischen Philisteriums das Ergebnis des Kongresses in dem Satze zusammen, daß man über wissenschaftliche Fragen nicht abstimmen könne, und jedem einzelnen Forscher seine volle Freiheit lassen müsse.

Lothar Meyer schließt seine Erzählung mit den Worten:

„Nach Schluß der Versammlung verteilte Freund Pavesi im Auftrage des Verfassers eine kleine, ziemlich unscheinbare Schrift, den „Sunto“ Cannizzaros, der schon einige Jahre früher erschienen, aber wenig bekannt geworden war. Auch ich erhielt ein Exemplar, das ich einsteckte, um es unterwegs auf der Heimreise zu lesen. Ich las es wiederholt auch zu Hause und war erstaunt über die Klarheit, die das Schriftchen über die wichtigsten Streitpunkte verbreitete. Es fiel mir wie Schuppen von den Augen, die Zweifel schwanden, und das Gefühl ruhigster Sicherheit trat an ihre Stelle.“

Ebenso wie Lothar Meyer ging es vielen anderen Chemikern. Cannizzaro hat durch sein Werk zwar keine neuen Gesetze in die Wissenschaft eingeführt, aber gezeigt, daß durch eine konsequente Durchführung der Gesetze von Avogadro und von Dulong-Petit sämtliche Schwierigkeiten beseitigt werden, welche der Errichtung eines allen Anforderungen entsprechenden chemischen Lehrgebäudes entgegengestanden haben. Wenn es heute über die Begriffe Atom und Molekül keine Meinungsverschiedenheiten mehr gibt, so verdankt man dies Cannizzaro.

Seine wissenschaftliche Tätigkeit hatte übrigens durch die politischen Umwälzungen in Italien vielfach zu leiden. So war er nach dem Berichte seines Schülers Miolati beim Ausbruch der Revolution im Januar 1848 als Artillerieoffizier in Messina tätig, und wurde dann als Abgeordneter in das sizilianische Parlament entsandt. Bei dem Bombardement von Messina im September desselben Jahres leistete er als Kommissar der provisorischen Regierung den bourbonischen Truppen Widerstand und floh im Mai nach Marseille, als der Aufstand unterdrückt und er zum Tode verurteilt war. 1849—1851

setzte er seine Studien in Paris fort und wurde dann von der piemontesischen Regierung zum Professor der Physik und Chemie an der Oberrealschule in Alessandria ernannt, wo er bis 1855 blieb. In der Zwischenzeit begann er seine Untersuchungen über die Benzylreihe, welche für die damalige Zeit eine hervorragende Bedeutung hatten. 1855 wurde er zum Professor an der Universität Genua berufen, wo er seinen „Sunto“ schrieb, 1860—1870 war er Professor an der Universität Palermo, und von 1870 bis zu seinem am 10. Mai 1910 erfolgten Tode Professor der Chemie an der Universität Rom. Im Jahre 1871 wurde er zum Senator ernannt und bekleidete auch für einige Legislaturperioden die Stelle eines Vizepräsidenten des Senates. Miolati sagt in seinem Nekrologe Adolf Baeyer habe sich über Cannizzaro in einem Briefe folgendermaßen geäußert: „Wenn Italien heutzutage manche ausgezeichnete Chemiker aufzuweisen hat und auf dem Schlachtfelde der Wissenschaft einen der vordersten Plätze einnimmt, so hat es dies hauptsächlich Cannizzaro zu verdanken, der als Meister und Vorbild, aber auch als väterlicher Freund die Begeisterung der italienischen Jugend für unsere schöne Wissenschaft erweckt und über ein Menschenalter hinaus lebendig erhalten hat.“ A. v. Baeyer.

Rudolf Fittig, am 6. Dezember 1835 in Hamburg geboren, studierte Chemie in Göttingen und erwarb dort 1858 mit einer unter Limprichts Leitung angefertigten Arbeit über „Aceton“ den Doktorgrad. 1860 wurde er zum Privatdozenten und 1866 zum außerordentlichen Professor ernannt. In dieser Stellung verblieb er aber nur vier Jahre, da er 1870 nach Tübingen als ordentlicher Professor der Chemie berufen wurde. 1876 wurde er Adolf Baeyers Nachfolger in Straßburg, wo seiner die Aufgabe harrte, ein neues chemisches Institut zu bauen. 1882 wurde dieses musterhaft eingerichtete Laboratorium eröffnet, und in demselben wirkte er bis zu seinem im Jahre 1902 erfolgten Rücktritt an der Spitze einer zahlreichen Schülerzahl. Obgleich noch körperlich und geistig vollständig

rüstig, zog er sich schon im Alter von 66 Jahren vom Lehramt zurück, weil er außer der Chemie noch viele andere Interessen hatte. Namentlich beschäftigte ihn die Kunstgeschichte und veranlaßte ihn jährlich zu großen Reisen. Die Nachricht von seinem am 19. November 1910 erfolgten Tode kam allen Freunden unerwartet, da er sich einer sehr guten Gesundheit erfreute und niemand sich erinnerte ihn krank gesehen zu haben.

Fittigs erste Arbeit über das Aceton führte ihn zu der für die damalige Zeit äußerst wichtigen Entdeckung, daß ein Kondensationsprodukt desselben, das Mesitylen, ein Derivat des Benzols ist. Er gab dadurch den Anstoß zu der Reihe von Arbeiten, welche die Konstitution der Kondensationsprodukte des Acetons aufgeklärt haben.

Wenn Fittig auch aus der Schule Limprichts hervorgegangen ist, so machte er sich doch bald selbständig, und entdeckte schon 1864 — also ein Jahr vor der Aufstellung der Benzoltheorie durch Kekulé — die Synthese der Homologen des Benzols durch Einwirkung von Natrium auf ein Gemisch von Brombenzol und Jodalkyl. Eine höchst wertvolle Verallgemeinerung der von Wurtz herrührenden Synthese der Paraffine durch Einwirkung von Natrium auf Halogenalkyle.

Vom Jahre 1874 bis zum Ende seiner wissenschaftlichen Tätigkeit beschäftigte ihn eine Untersuchung über ungesättigte Säuren und Laktone, von denen im Anfang seiner Arbeit nur sehr wenige Repräsentanten bekannt waren, von den Laktonen z. B. nur das Kumarin. Fittig hat nach zwanzigjähriger Arbeit über dieses Thema das Resultat seiner Untersuchung in einem zusammenfassenden Vortrag niedergelegt, den er 1894 vor der Deutschen Chemischen Gesellschaft in Berlin gehalten hat.

An dieser Stelle ist es nicht möglich, auf die Einzelheiten dieser äußerst umfangreichen Untersuchungen einzugehen, welche jedem Fachmann bekannt sind. Dem der Chemie ferner stehenden Leser wird die Einleitung der Rede Fittigs am besten einen Einblick in die Natur des behandelten Stoffes und zugleich in die Eigenart der Denkweise Fittigs geben, weshalb sie hier wörtlich wiedergegeben wird.

„Es ist mir wiederholt von Fachgenossen bemerkt worden, daß es so schwierig sei, sich durch meine umfangreichen Abhandlungen hindurchzuarbeiten und ich glaube, manche werden wohl gefragt haben, ob es denn erforderlich gewesen sei, ein so großes neues Material herbeizuschaffen und dieselbe Reaktion immer in einer solchen Anzahl von Einzelfällen zu prüfen. Meine Herren, ich versichere Sie, daß die Darstellung neuer chemischer Verbindungen niemals während meines ganzen Lebens irgendwelchen Reiz für mich gehabt hat. Als ich aber den Plan zu diesen Untersuchungen faßte und darüber mit befreundeten Fachgenossen sprach, wußte ich recht gut, daß die Durchführung desselben vieljährige Arbeit erfordern würde, denn es war mir vollständig klar, daß aus vereinzelten Beobachtungen keine gesetzmäßigen Beziehungen von allgemeiner Bedeutung abgeleitet werden konnten, und daß ich diesen Plan überhaupt nur in Angriff nehmen konnte, weil ich in der glücklichen Lage war, immer eine größere Zahl älterer Schüler um mich zu haben, die stets bereit waren, bei der Verfolgung bestimmter Gedanken mich mit ihrer Arbeitskraft zu unterstützen. Ihnen fällt daher auch das Hauptverdienst an dem, was erreicht worden ist, zu. Was nun die vielen Hunderte von neuen Körpern betrifft, welche diese Arbeiten kennen gelehrt haben, so gebe ich bereitwilligst zu, daß dieselben Resultate vielleicht auch mit einer geringeren Zahl hätten erzielt werden können, aber, meine Herren, viele von Ihnen werden wohl, wie ich, die Erfahrung gemacht haben, wie sehr sich das Auge schärft, wenn man denselben Vorgang wiederholt beobachtet, wie jede folgende Untersuchung die vorige ergänzt, und wie man dadurch erst das Gefühl erlangt, daß man einen sicheren Boden unter sich hat. Mir hat sich immer von neuem wieder bestätigt, daß man mancherlei übersieht und unberücksichtigt läßt, wenn man zum erstenmal eine neue Reaktion studiert. Es ist ja nicht zu vermeiden, daß man sich irgend eine Vorstellung macht, was man erreichen will und sich nur zu leicht zufrieden gibt, wenn die Reaktion zu dem erwarteten Resultat geführt hat. Bis in die letzte

Zeit hat sich immer von neuem herausgestellt, daß bei früher, wie ich glaubte, von uns sehr genau verfolgten Reaktionen doch noch etwas übersehen war. Es ist eben leicht etwas zu beobachten, was man sucht, aber sehr schwer Reaktionen und besonders Nebenreaktionen wahrzunehmen, auf welche man gar nicht rechnet und deren statthaben außer jeglicher Vermutung liegt. Das war der leitende Gedanke bei dieser ganzen Untersuchung, deshalb ist sie so umfangreich geworden, aber ich glaube, daß dadurch die allgemeinen Folgerungen außerordentlich an Sicherheit gewonnen haben."

A. v. Baeyer.

Am 28. März 1910 starb auf der Rückreise nach Amerika an Bord des Dampfers „Adriatic" im Alter von 75 Jahren **Alexander Agassiz**. Er war ein Sohn des als Zoologe, Geologe und Paläontologe gleich berühmten Louis Agassiz. Vater und Sohn gehörten unserer Akademie als korrespondierende Mitglieder an, Alexander seit dem Jahre 1886.

A. Agassiz wurde am 17. Dezember 1835 in Neufchâtel geboren, wo damals sein Vater die Professur der Zoologie an der Universität bekleidete. Als dieser 1846 nach Amerika übersiedelte, blieb er zunächst in seiner Heimat, folgte ihm aber im Jahre 1849 nach. Seine Studien beendete er am Harvard-College; er widmete sich der Chemie und den Ingenieurwissenschaften, pflegte aber gleichzeitig unter dem Einfluß seines Vaters das Studium der Zoologie. Wie sehr sich seine Interessen zunächst zwischen Zoologie und Technik teilten geht daraus hervor, daß er 1859 Assistent an der N. S. Coast Survey, von 1860—65 Assistent am Harvard-College, 1866—69 Inspektor der Hekla-Kupferminen am Obersee wurde. Der praktischen Beschäftigung mit der Montan-Industrie verdankte er sein selbst für amerikanische Verhältnisse bedeutendes Vermögen, welches ihm ermöglichte mehrere Millionen Mark wissenschaftlichen Zwecken zu opfern. Nach dem Tode seines Vaters wurde er Kurator des Museums of comparative Zoology. In dieser Stellung entfaltete er eine ganz außergewöhnliche organi-

satorische Begabung; er sammelte in ähnlicher Weise, wie es sein Vater früher getan hatte, einen Generalstab wissenschaftlicher Zoologen um sich, welche die reichen Schätze bearbeiteten, welche teils sein Vater teils er selbst zusammengebracht hatte. Sein Hauptaugenmerk wandte er marinen Untersuchungen zu; er organisierte großartige Expeditionen, zu denen die Coast Survey ihm die Dampfer Blake und Albatroß zur Verfügung stellten. Dieselben wandten sich im Lauf der Jahre dem Golf von Mexiko, Westindien, den Sandwich-, Fidji- und Galapagosinseln, den zahlreichen Korallenriffen des Stillen Ozeans und dem großen Barrièreriff Australiens zu. Agassiz hat in dieser Weise ein ungeheures empirisches Material zusammengebracht, um sichere Grundlagen für eine Kritik der Darwinschen Theorie der Korallenriffe zu liefern und vom Charakter und der Verbreitungsweise der pelagischen Tierwelt und der Tiefseefauna ein richtiges Bild zu gewinnen.

Agassiz war selbst ein guter Kenner der Tierwelt des Meeres und hat sich an der Bearbeitung der Cölenteraten und Echinodermen beteiligt. Vorübergehend hat er sich auch mit entwicklungsgeschichtlichen Untersuchungen (Entwicklung der Fische und des Balanoglossus) beschäftigt, wenn auch diese nicht die Bedeutung gewannen, welche seinen faunistischen Arbeiten zukommen. Wie sein Vater Louis, so genoß auch Alexander Agassiz in seiner Heimat hohes Ansehen, so daß man ihn als den einflußreichsten Zoologen Amerikas bezeichnen konnte. Aber auch in Europa wurden seine Verdienste um Zoologie und Geographie hoch geschätzt, wie daraus hervorgeht, daß er Mitglied zahlreicher Akademien war und daß zahlreiche Ehrungen, wie die Verleihung der Victoria research medal und des Ordens pour le mérite ihm zuteil wurden.

R. v. Hertwig.

Am 28. April 1910 starb nach kurzem Krankenlager **Eduard van Beneden**, Professor der Zoologie, Entwicklungsgeschichte und vergleichenden Anatomie an der Universität Lüttich, seit 1891 korrespondierendes Mitglied der mathematisch-physika-

lischen Klasse unserer Akademie. Geboren in Löwen als Sohn des Professors der Zoologie P. J. van Beneden, welcher unserer Akademie ebenfalls als korrespondierendes Mitglied in den Jahren 1859—1894 angehört hatte, beabsichtigte er zunächst Ingenieur zu werden, gab diesen Plan jedoch bald wieder auf und studierte Zoologie anfangs unter Leitung seines Vaters, später an deutschen Universitäten, besonders in Würzburg, wo er Schüler Köllikers wurde. Nach dem Tode Lacordaires wurde er in Lüttich 1871 zunächst mit dem Unterricht in Zoologie betraut, wurde aber schon ein Jahr später zum außerordentlichen, 1874 zum ordentlichen Professor dieses Fachs ernannt, eine Stellung, welche er bis zu seinem Tode bekleidete.

E. van Beneden gehörte zu den hervorragendsten Zoologen der Neuzeit, besonders unter den Zoologen französischer Zunge. Gleich ausgezeichnet als Lehrer wie als Forscher hat er namentlich auf dem Gebiet der Entwicklungsgeschichte den nachhaltigsten Einfluß ausgeübt. In seinen jüngeren Jahren beschäftigte er sich hauptsächlich mit wirbellosen Tieren. Er gab die erste genaue Darstellung vom Bau und der Entwicklung der Dicyemiden, welche er als eine zwischen Protozoen und Metazoen stehende Gruppe „Mesozoa“ bezeichnete, und untersuchte genau die erste Embryonalentwicklung der Bandwürmer. Das Studium der Entwicklungsgeschichte der Tunikaten leitete ihn über zu den Wirbeltieren. Eine Reihe ausgezeichneter Untersuchungen veröffentlichte er über die Entwicklung der Säugetiere, wobei er hauptsächlich Gastrulation und Bildung der Keimblätter sowie der Fötalmembranen berücksichtigte. Was ihm aber vor allem hohes Ansehen in den weitesten Kreisen der Biologen verschaffte, waren seine klassischen Untersuchungen über Eireife und Befruchtung von Ascaris megalocephala. Er stellte als der erste die für die Vererbungslehre fundamental wichtige Tatsache fest, daß Eikern und Samenkern bei Ascaris nicht verschmelzen, sondern getrennt ihre Chromosomen bilden, daß die Zahl der Chromosomen in beiden Kernen die gleiche ist, die Hälfte der in der Furchungsspindel enthaltenen. Gleichzeitig entdeckte er das

Centrosoma und wies nach, daß dieser durch seine Teilung die Zellteilung verursacht.

An Anerkennung hat es dem belgischen Forscher weder in seinem Vaterlande noch im Ausland gefehlt: er war Mitglied zahlreicher Akademien und Ehrendoktor mehrerer Universitäten.

R. v. Hertwig.

Melchior Treub. Geboren am 26. Dezember 1851 zu Vorschooten bei Leiden, zeigte Treub schon früh eine Vorliebe für Naturwissenschaften. Er widmete sich deren Studium in Leiden, wo damals Suringar die Botanik vertrat, auf dessen Anregung aber wohl nur sehr wenige von Treubs Arbeiten zurückzuführen sind. Seine Dissertation[1]) betraf eine damals brennende Frage: die Natur der Flechten, um welche ein heftiger Kampf sich entsponnen hatte. Treub gelang es, auf Grund von Kulturen die Schwendenersche Theorie zu bestätigen und zu zeigen, daß aus Hyphen keine „Gonidien" entstehen können (wie damals noch teilweise behauptet wurde). Schon diese erste Arbeit läßt die charakteristischen Eigenschaften seiner späteren erkennen: ein großes präparatives Geschick, eine, man möchte sagen „elegante" Schärfe der Beobachtung und eine ungemein klare Darstellung. Und noch etwas anderes teilte sie mit den späteren: den äußeren Erfolg. Sie wurde mit einer Goldmedaille gekrönt[2]), und der Verfasser trat als Assistent bei Suringar ein. Die Arbeiten, welche er bis zu seiner Übersiedelung nach Java veröffentlichte. zeigen, wieweit der Interessenkreis und wie gediegen die Kenntnisse des jungen Forschers waren. Es kam ihm dabei die gründliche Schulung zustatten, die in Holland üblich ist.

Auf Suringars (der teratologische Studien liebte) Einfluß ist wohl die kleine Arbeit über Hieracium umbellatum zurückzuführen[3]). Sie brachte die interessante Beobachtung, daß in

[1]) Onderzoekingen over de Natuur der Lichenen. Leiden 1873.

[2]) Vgl. J. P. Lotsy, Melchior Treub. Een korte levensschets. In „Eigen Haard" 1903, p. 253.

[3]) Notice sur l'aigrette des Composés àpropos d'une monstruosité de l'Hieracium umbellatum. Arch. néerl. VIII, 1873.

durch Gallenbildung veränderten Blütenköpfen statt des Pappus ein fünfblätteriger Kelch oder gespaltene Kelchstrahlen auftreten können, weshalb Treub den Pappus als aus Spaltung von Kelchstrahlen entstanden ansieht.

Auf dem Gebiete der chemischen Physiologie, dem er in Java erst später wieder nahetrat, bewegt sich eine Arbeit über die Zusammensetzung des Chlorophylls[1]), speziell über die Frage nach dem Vorhandensein von grünen und gelben Farbstoffen. Treub verteidigte darin G. Kraus gegen die Angriffe von Conrad.

Am wertvollsten aber sind seine in rascher Folge sich aneinanderreihenden Arbeiten auf dem Gebiete der Entwicklungsgeschichte und der Zellenlehre. In ersterer Hinsicht waren es die Pteridophyten, welche ihn früh schon beschäftigten. Seine Arbeit über die Vegetationsorgane von Selaginella Martensii[2]) kann als Vorläuferin seiner berühmt gewordenen Lycopodiaceen-Arbeiten gelten. Sie brachte eingehende Mitteilungen über Scheitelwachstum, Verzweigung, Histogenie, Wurzelträger, Wurzeln und Blätter. Diese Untersuchungen und die über die Wurzelmeristeme[3]) haben freilich zunächst nur die Bedeutung vortrefflicher Einzelarbeiten mit schon gegebener Fragestellung. Aber sie mußten seinen Blick schärfen — das neuerdings fast ganz abgekommene exakte Zeichnen von Zellnetzen ist ein vortreffliches Erziehungsmittel für genaue Beobachtung. Daß seine zytologischen Beobachtungen über Kernteilung an lebenden Zellen[4]) von Bedeutung waren, zeigt schon die Tatsache, daß eine Treubsche Figur noch in der neuesten Auflage des bekannten Bonner Lehrbuchs sich findet. Seine Beobachtungen über mehrkernige Zellen und über das Sklerenchym seien hier nur erwähnt. In der Reihe seiner

[1]) Jets over the Chlorophyll, 1874.

[2]) Recherches sur les organes de la végétation du Selaginella Martensii. Leiden 1877.

[3]) Le meristème primitif de la racine dans les Monocotylédones Leiden 1876.

[4]) Recherches sur la rôle du noyan dans la division des cellules végétales. Amsterdam 1876.

embryologischen Arbeiten nimmt schon die in Leiden ausgeführte über die Embryobildung der Orchideen[1]) einen ehrenvollen Platz ein. Sie ist nicht nur reich an interessanten Beobachtungen, sondern zeichnet sich auch dadurch aus, daß die Gestaltungsverhältnisse (namentlich des aus der Mikropyle herauswachsenden Embryoträgers) in Verbindung gebracht werden zu der Ernährung des Embryos. Eine solche Verwertung entwicklungsgeschichtlicher Beobachtungen war damals noch selten.

Wir sehen also Treub in seiner Leidener Zeit in sehr produktiver Tätigkeit. Er greift mit fein ausgearbeiteten Untersuchungen in die meisten der damals im Vordergrunde des Interesses stehenden Fragen ein und trägt zu ihrer Entscheidung wesentlich bei.

Diese Arbeiten brachten dem jungen Forscher auch rasch die verdiente Anerkennung. Schon als Assistent wurde er Mitglied der Holländischen Akademie der Wissenschaften und als durch Scheffers Tod die Stelle eines Direktors des Botanischen Gartens in Buitenzorg frei wurde, lenkten sich die Blicke auf Treub, der aber zunächst wenig geneigt war, nach Java zu gehen. Seine Fachgenossen waren offenbar der Ansicht, daß ein Mann von solchen Gaben und solcher Energie auch auf einem Gebiete, welches ihm bisher recht ferne lag, Ausgezeichnetes leisten werde, — sie haben sich nicht getäuscht!

Der Buitenzorger Garten, 1817 durch Reinwardt begründet, hatte längere Zeit hindurch ein ziemlich kümmerliches Dasein geführt, war aber namentlich durch Teysmanns verdienstliche Tätigkeit sehr gefördert worden. Auch der treffliche Scheffer entfaltete in den 11 Jahren seiner Amtsdauer eine rege Tätigkeit. Namentlich förderte er den kolonialen Landbau und schuf für die wissenschaftliche (auf Systematik beschränkte) Tätigkeit des Gartens eine eigene Zeitschrift, die „Annales du Jardin botanique de Buitenzorg“, von der er aber nur noch einen Band herausgeben konnte.

[1]) Notes sur l'embryogénie de quelques Orchidées. Amsterdam 1879.

Indes blieb die Bedeutung des Buitenzorger Gartens zunächst eine rein lokale — auch die „Annales“ blieben in Batavia liegen. Erst Treub war es vorbehalten, dem Buitenzorger Garten einen Weltruf zu verschaffen, die „Annales“ neu zu beleben und sie namentlich durch seine eigenen Arbeiten zu einer der wichtigsten botanischen Zeitschriften auszugestalten. Ihnen schlossen sich umfangreiche andere mehr praktischen Zwecken des Gartens gewidmete Veröffentlichungen an. Im November 1880 siedelte Treub nach Java über, fast gleichzeitig mit ihm trat der auch vor kurzem verstorbene Dr. W. Burck als zweiter Direktor des Gartens ein.

Mit Treub wurde zum erstenmal ein „moderner“ Botaniker als Vorstand eines botanischen Gartens in die Wunderwelt der Tropen versetzt.

Es liegt in der Natur der Dinge, daß man die Pflanzenwelt der Tropen zunächst in systematischer und pflanzengeographischer Richtung zu erforschen suchte, während in Europa aus und neben der systematischen Botanik sich die „allgemeine“ Botanik entwickelt hatte. Diese war dabei auf das kärgliche Pflanzenmaterial angewiesen, welches die mitteleuropäische Flora bot, eine Tatsache, welche, wie Treub nachdrücklich betont hat, zu manchen einseitigen Auffassungen führen mußte. Nur wenige Botaniker hatte das Mikroskop nach den Tropen begleitet, so Griffith in Ostindien, Crüger in Trinidad. Es bedarf kaum der Hervorhebung, daß diese Forscher ohne die Hilfsmittel eines Laboratoriums mit großen Schwierigkeiten zu kämpfen hatten. Ihre Untersuchungen mußten deshalb vielfach unvollständig bleiben. Treub erkannte sofort mit scharfem Blicke, wie wichtig es sei, den Buitenzorger Garten mit Sammlungen und Laboratorium auszurüsten und verstand es vortrefflich, für seine Pläne auch die Regierung zu interessieren und zur Genehmigung der nötigen Mittel zu veranlassen.

Ehe wir indes auf seine Leistungen als Organisator hinweisen, sei zunächst seine wissenschaftliche Tätigkeit in Java hervorgehoben. Für seine kraftvolle Persönlichkeit ist es be-

zeichnend, daß er neben zeitraubenden administrativen Aufgaben noch eine lange Reihe ganz ausgezeichneter wissenschaftlicher Untersuchungen ausführen konnte, und das in einem Klima, in welchem die Energie vieler Europäer nach einigen Jahren sehr nachzulassen pflegt.

Gewiß hatte er dabei zwei Vorteile: einmal lebte er in einem Zeitalter der pflanzlichen Morphologie, das wir als das „heroische" bezeichnen können, weil es galt, auf der von Hofmeister beschrittenen Bahn noch eine ganze Anzahl unbekannt gebliebener Gestaltungsverhältnisse aufzufinden, und zwar wie z. B. die Lycopodium prothallien zeigen, zu finden im wörtlichen Sinne. Sodann kam er in ein Land, in welchem ihm interessante Pflanzenformen, die in Europa nur in kleinen Bruchstücken oder gar nicht zugänglich sind, in Hülle und Fülle zur Verfügung standen. Aber auch in den Tropen gibt es nichts, das dem berühmten Apparat vergleichbar wäre, „an welchem man an dem einen Ende dreht, um am anderen eine wissenschaftliche Entdeckung in Empfang nehmen zu können". Treubs Arbeiten sind nicht die mühelos geernteten Früchte von Spaziergängen im Buitenzorger Garten, sondern das Resultat angestrengter Tätigkeit. Fast kein Band der von ihm neu belebten „Annales" erschien ohne eine Abhandlung von ihm. Wir können in seinen Arbeiten vier Gruppen unterscheiden. Erstens solche, die sich auf die Entwicklung der Pteridophyten beziehen, zweitens die über Samenentwicklung und Apogamie, drittens die über die „Ökologie" von Tropenpflanzen und viertens die über chemische Physiologie. Es seien kurz die Hauptergebnisse dieser Arbeiten hervorgehoben.

1. Mit am berühmtesten sind wohl seine Untersuchungen über die Prothallien der Lycopodiaceen[1]) geworden. Vor dreißig Jahren wußte man über die Gametophyten von Lycopodium äußerst wenig. Die Keimung der Sporen wollte nicht gelingen (und nur für eine Art, L. annotinum, lagen dürftige Angaben über die Gestaltung der Prohallien vor). Treub gelang es, in

[1]) Études sur les Lycopodiacées. Ann. I, Sér. 4, 5, 7, 8.

Java zunächst die chlorophyllhaltigen Prothallien von L. cernuum (und Salakansa) und dann die höchst merkwürdigen saprophytisch lebenden Prothallien anderer Arten aufzufinden und dadurch (zusammen mit den schönen Untersuchungen von Bruchmann), eine der klaffendsten Lücken in unserer Kenntnis der lebenden Pteridophyten auszufüllen.

2. Schon im zweiten Bande der „Annales" erscheinen die „recherches sur le Cycadées", welche auf Grund der Entwicklung der Pollensäcke und Samenanlagen die primitive Stellung dieser Samenpflanzen schön erläuterten. Besonders war sein Interesse auch den Angiospermen zugewendet, bei denen die Untersuchung der Samenentwicklung große technische Schwierigkeiten bot. Er überwand sie auch in der Zeit vor der Mikrotomtechnik mit Leichtigkeit. Es sei erinnert an die klassischen Untersuchungen über Loranthaceen[1]), welche zeigen, wie weit die Rückbildung der Samenanlagen gehen kann, ferner an die über Barringtonia, Orchideen und Balanophora[2]). Besonders bekannt geworden sind seine Untersuchungen über Casuarina[3]). Einerseits durch die Entdeckung der Chalazogamie, andererseits weil es schien, als ob hier ein besonders primitiver Typus der Samenpflanze vorliege. Die Einteilung der Angiospermen in „Chalazogamen" und „Porogamen", welche Treub vorschlug, hat sich freilich auf Grund der Untersuchungen von Murbeck u. a. nicht aufrechterhalten lassen, auch in der Ausbildung des Embryosackes weicht nach Frye Casuarina nicht wesentlich von anderen Angiospermen ab. Wenn also auch derzeit kein irgendwie zwingender Grund vorliegt, Casuarina für eine „primitive" Angiospermenform zu halten (viel wahrscheinlicher ist, daß sie eine sehr stark reduzierte ist), so hat Treubs Untersuchung noch eine Anzahl merkwürdiger und interessanter Tatsachen ergeben, die für die spätere Entscheidung der Frage wichtig sind. Theo-

---

[1]) Notes sur l'embryon, le sac embryonnaire et l'ovule. Ann. I, 3, 4.

[2]) L'organe femelle et l'apogamie du Balanophora elongata Bl. Ann. I, 8.

[3]) Sur les Casuarinées et leur place dans le système naturel. Ann. I, 10.

retische Ausführungen „lagen" ihm, wie mir scheint, überhaupt weniger als die Entdeckertätigkeit in der Auffindung von Tatsachen. So halte ich auch seinen Protokorm nicht für ein lebensfähiges Gebilde; aber das tut dem Wert der Arbeiten keinerlei Eintrag, zumal er selbst von jeder dogmatischen Neigung weit entfernt war. Das Problem der Apogamie beschäftigte ihn namentlich bei Ficus hirta[1]) und Elatostema acuminatum[2]). Dem feinen Naturbeobachter konnte bei letzterer in Tjibodas häufiger Pflanze nicht entgehen, daß männliche Pflanzen sehr viel seltener sind als weibliche. Trotzdem zeigen diese Samenbildung. Er schloß daraus auf die Wahrscheinlichkeit von Apogamie und fand diese auch, wie er denn schon früher für Balonophora eine sehr merkwürdige Form der Apogamie nachgewiesen hatte[3]).

3. Daß Treub (wie leider mancher Botaniker) die Natur nicht nur durch das Mikroskop ansah, zeigen seine ausgezeichneten „ökologischen" Untersuchungen. Von Epiphyten beschäftigten ihn Dischidia Rafflesiana mit ihren merkwürdigen Urnenblättern, deren Bau, Entwicklung und Funktion er aufklärte[4]), und namentlich auch die Myrmecodien[5]), um deren von Ameisen bewohnte hohle Knollen so manche phantastische Anschauung rankte. Treub wies nach, daß die Myrmecodienknollen ganz ohne Mitwirkung von Ameisen entstehen und daß die Ameisen für den Weiterbestand der Pflanzen nicht nötig sind, ebensowenig als dies für Dischidia der Fall ist. Seine Warnung bei „biologischen" Untersuchungen in den

---

[1]) L'organe femelle et l'embryogenèse dans Ficus hirta varel. Ann. II, 3.

[2]) L'apogamie de l'Elatostema acuminatum. Ann. II, 4.

[3]) Treub hat selbst bedauert, daß er diesen Fall experimentell nicht weiter verfolgen konnte. Da die apogamen Elatostema sonst nur weibliche Nachkommen ergeben, so liegt die Vermutung nahe, daß nicht alle Blüten apogam sind, sonst wäre das Vorhandensein männlicher Exemplare schwer verständlich.

[4]) Sur les Urnes du Dischidia Rafflesiana. Ann. I, 3.

[5]) Sur le Myrmecodia echinata Gaud. Ann. I, 3. Nouvelles recherches sur le Myrmecodia de Java. Ann. I, 7.

Tropen nicht allzu rasch auf eine mutualistische Symbiose zwischen Pflanzen und Ameisen zu schließen, war sehr berechtigt; bekanntlich sind die Aktien auch der „echten Ameisenpflanzen" neuerdings sehr gefallen!

Wertvolle Resultate ergaben auch die Studien über Kletterpflanzen[1]), speziell die Hackenpflanzen, und oft zitiert sind seine Untersuchungen über die Wiederbesiedelung der Insel Krakatau mit Pflanzen[2]). Bekanntlich war durch einen heftigen vulkanischen Ausbruch die frühere Vegetation vollständig zerstört worden. Treub besuchte die Insel drei Jahre nach dem Ausbruch und stellte fest, daß sich eine größere Anzahl von Pflanzen schon wieder auf dem unwirtlichen Boden angesiedelt hatte. Von besonderem Interresse war dabei ein „Zusammenwirken" verschiedener Pflanzen, indem durch das Vorhandensein schleimiger Cyanophyceen die Ansiedelung von Farnen und Moosen erst ermöglicht wird. Auf ein solches Zusammenwirken hat Treub auch in einer seiner letzten Arbeiten hingewiesen[3]), in welcher er den tropischen Urwald als eine große Pflanzengenossenschaft, in welcher nicht nur ein Kampf sondern auch ein Zusammenwirken der einzelnen Komponenten stattfinde, auffaßte. — Eine sehr hübsche Endeckung waren auch die „Wasserkelche" von Spathodea campanulata (die später auch bei anderen Pflanzen nachgewiesen wurden). Er wurde durch die Spiele javanischer Knaben (die sich damit spritzten) darauf aufmerksam[4]).

4. Ganz besonders am Herzen aber lag ihm offenbar eine Reihe von Untersuchungen, welche sich mit der Bedeutung der Blausäure für die chlorophyllhaltigen Pflanzen befaßt[5]). Er

[1]) Observations sur les plantes grimpantes du Jardin botanique de Buitenzorg. Ann. I, 3. Sur une nouvelle catégorie de plantes grimpantes, ibid.

[2]) Notice sur la nouvelle flore de Krakatau. Ann. I, 7.

[3]) La forêt vierge comme association. Ann. II, Ser. 1, VII (1908).

[4]) Les bourgeons floraut du Spathodea campanulata Beaw. Ann. I, 8.

[5]) Sur la localisation, le transport et le rôle de l'acide cyanhydrique dans le Pangium edule Reinw. Ann. I, 13. Nouvelles recherches sur le rôle du l'acide cyanhydrique dans les plantes vertes. Ann. II, 4.

wies z. B. für Phaseolus lunatus nach, daß zur Bildung der Blausäure Kohlenhydrate und Nitrate notwendig sind, und faßte die Blausäure auf als das erste erkennbare Produkt der Stickstoffassimilation, aus welchem dann die komplizierter gebauten Stickstoffverbindungen hervorgehen.

Eine Anzahl kleinerer Arbeiten kann hier unerwähnt bleiben, sie würden, obwohl sie alle interessante Beobachtungen enthalten, doch dem Bilde von Treubs wissenschaftlicher Tätigkeit keine neuen Züge hinzufügen.

Es wurde schon oben hervorgehoben, daß Treubs Energie sich in seinen wissenschaftlichen Arbeiten keineswegs erschöpfte. So zahlreich und bedeutungsvoll diese auch sind, so kann man doch sagen, daß er nicht minder Hervorragendes als Organisator leistete, teils für die reine Wissenschaft teils für die tropische Agrikultur.

In seiner Rede zur Feier des 75 jährigen Bestehens des Buitenzorger Gartens[1]) hebt Treub die Bedeutung der botanischen Gärten in den Tropen für Wissenschaft und Praxis in lichtvoller Weise hervor. Es war ihm von Anfang an klar, daß mit einem auf der Höhe seiner Aufgabe stehenden botanischen Garten nicht nur ein Herbarium verbunden sein dürfe, sondern eine Reihe von Laboratorien erforderlich sei, welche die Untersuchung der Pflanzen (und Tierwelt) nach allen Richtungen hin gestattet und namentlich auch dem Übelstand steuert, den er in dem Satze zusammenfaßte „die ‚allgemeine' Botanik unserer Hand- und Lehrbücher ist zum größten Teile nur diejenige der gemäßigten Zonen, nicht die der Tropen".

Für die Besucher Buitenzorgs sind besonders wichtig geworden das „Fremdenlaboratorium" in Buitenzorg und das Laboratorium in Tjibodas. Ersteres gestattete die Untersuchung der reichen Pflanzenschätze des Gartens mit allen Hilfsmitteln moderner Forschung. Auch von weitem her brachten die von Treub den Besuchern zur Verfügung gestellten einheimischen

[1]) Vgl. die Festschrift 'slands plantentuin te Buitenzorg, 18. Mai 1817 bis 28. Mai 1872, Batavia, Landsdrukkerij (Deutsch: der Botanische Garten zu Buitenzorg auf Java, Leipzig 1895).

Pflanzensammler des Gartens Rafflesien, Balanophoren, Myrmecodien, Farne, Orchideen und andere Herrlichkeiten. Aber noch schöner fanden es doch wohl die meisten Besucher in Tjibodas. Dort war früher nur ein kleiner Berggarten vorhanden. Treub erfaßte sofort, wie wichtig es sein würde, ein Laboratorium unmittelbar am Urwald der Bergzone zu haben. Er richtete ein solches ein und verschaffte den fremden Besuchern auch die Möglichkeit, in dem Gebäude des Gartens zu wohnen. Er erreichte von der Regierung, daß ein großes Stück Urwald, der unmittelbar an den Berggarten angrenzt, fortan unberührt blieb. Es wurde nur für Wege und Orientierung gesorgt, so daß dort ein wahres botanisches Paradies geschaffen wurde.

Nicht zu vergessen ist auch, daß Treub den Besuchern ihre Aufgabe dadurch wesentlich erleichterte, daß er für eine Bearbeitung der Flora von Westjava nicht nur der Phanerogamen sondern auch der Kryptogamen sorgte und auch sonst in aufopfernder Weise seinen wissenschaftlichen (nicht selten auch persönlichen) Gästen, wie er sich ausdrückte, als „Impresario“ diente.

Selbst die schönsten Einrichtungen sind aber fruchtlos, wenn sie nicht benützt werden. Eine Reise nach Buitenzorg ist aus finanziellen Gründen vielen nicht möglich, denen sie als Erfüllung langgehegter Wünsche vorschwebt. Treub benutzte einen Urlaubsaufenthalt in Europa, um diesem Übelstand abzuhelfen. Er veranlaßte zunächst in seinem Heimatlande Bekannte und Freunde zu einer Geldstiftung, die Regierung zu einer Subvention. Andere Länder, wie z. B. das Deutsche Reich, Österreich und die Schweiz, folgten, und so wurde es möglich, daß etwa 120 Besucher (nicht nur Botaniker sondern auch Zoologen) die von Treub geschaffenen Einrichtungen benützt haben. Es ist wohl keiner von Java geschieden ohne das Bewußtsein, dort mit die schönste Zeit seines Lebens verbracht zu haben, und ohne innigen Dank für Treub und die Hochherzigkeit der holländischen Regierung. Treub war sich wohl bewußt, daß seine Forderung der Wissenschaft auch eine nationale Bedeutung

habe. In den Werken des Friedens liegt die Kraft und das Ansehen kleiner Völker begründet. Und wo diese, wie es bei uns der Fall ist, auch Herrscher über große und schöne Kolonien sind, da reiht sich an diese Erwägung noch eine andere an, und zwar „royauté oblige“ [1]). Wenn jemand seinem Lande Ehre gemacht hat, ist gewiß er es gewesen!

In Buitenzorg reihten sich dem botanischen Laboratorium allmählich pharmakologisch-chemische und andere an, namentlich wurde auch die Untersuchung der so wichtigen Baumflora (durch Valeton und Koorders) energisch gefördert.

Allmählich aber trat die praktische Tätigkeit zur Förderung der tropischen Agrikultur mehr in den Vordergrund. Treub verstand es, die Pflanzer für die Erforschung der wissenschaftlichen Grundlagen der Pflanzenkultur zu interessieren und sie zur Hergabe von Mitteln zu veranlassen, welche die Einrichtung von Speziallaboratorien ermöglichten. So stellten 1894 ihm die Delitabakpflanzer Mittel zur Untersuchung des Tabaks zur Verfügung, andere folgten diesem Beispiel, wobei zur Bedingung gemacht wurde, daß die Pflanzer sich nicht in die Untersuchung selbst einmischen durften. Eine große Anzahl für die tropische Agrikultur wichtiger Untersuchungen sind aus diesen Laboratorien hervorgegangen.

Später wurden diese mit dem Buitenzorger Garten zu einem „Department van landbouw“ vereinigt, an dessen Spitze Treub als eine Art Ackerbauminister trat.

Manche der alten Besucher des Buitenzorggartens haben diese Veränderung wohl nicht ohne einige Besorgnis miterlebt. Einerseits mußte dadurch die Last administrativer Pflichten, welche Treubs Schultern aufgeladen war, eine noch größere werden, andererseits fragte sich, ob nicht die rein wissenschaftlichen Ziele dabei etwas in das Hintertreffen geraten könnten.

Nun, solange Treub an der Spitze stand, konnte man sicher sein, daß der alte Kurs nicht aufgegeben werde. Wird aber auch nach seinem Scheiden das von ihm gegründete Reich zusammenhalten und weiter gedeihen? Wir wollen es hoffen!

[1]) Festschrift, S. 21.

Im Oktober 1909 verließ er Java, um den Rest seines Lebens in Europa zuzubringen. Er wollte sich an der französischen Riviera ansiedeln, liebte er doch Frankreich ganz besonders, wie denn auch seine Arbeiten fast ausschließlich in französischer Sprache erschienen sind. Aber seine Gesundheit war schon gebrochen. Trotz eines Aufenthaltes in Ägypten kräftigte sie sich nicht wieder. Er verschied am 3. Oktober 1910 in St. Rafael.

An äußerer, wohlverdienter Anerkennung hat es ihm nicht gefehlt. Er war Mitglied wohl aller Akademien und gelehrten Gesellschaften der Welt, die holländische Regierung ernannte ihn zum Professor, und Orden wurden ihm in großer Anzahl verliehen. Besonders hoch schätzte er aber die Anerkennung seiner Fachgenossen und Mitarbeiter.

Sein 25jähriges Doktorjubiläum wurde feierlich begangen, und frühere Besucher des Gartens stifteten damals einen Ergänzungsband für die Annalen, eine Ehrung, die sich bei seinem Abgange von Java wiederholte. Holländische und andere Universitäten suchten ihn als Professor der Botanik zu gewinnen. Er hat mit Recht solche Berufungen abgelehnt, in keiner anderen Stellung hätte er der Wissenschaft und der Menschheit so dienen können wie in seiner Buitenzorger. Sein Name wird mit der Erforschung der Pflanzenwelt der Tropen stets verbunden bleiben.

K. Goebel.

Zum Schluß hielt das ordentliche Mitglied der historischen Klasse Herr v. Riezler die im Druck besonders erschienene Festrede: Die Kunstpflege der Wittelsbacher.



Sitzung am 6. Mai.

1. Herr v. Drygalski legt eine für die Abhandlungen bestimmte Arbeit über

Spitzbergens Landformen und ihre Vereisung

vor, welche die Ergebnisse der Landuntersuchungen darlegt, die er gelegentlich der Zeppelin-Studienfahrt nach Spitzbergen und ins Nördliche Eismeer im Sommer 1910 gewann, während die Ergebnisse seiner ozeanographischen Forschungen auf dieser Reise einer späteren Mitteilung vorbehalten bleiben.

In dieser ersten Abhandlung werden zunächst die Umrisse der Inselgruppe, ihre Tektonik, Landformen und Vereisungstypen besprochen. Dann werden Einzelbeobachtungen über die Gletscher Spitzbergens mitgeteilt und diskutiert, wobei besonders die heutigen Rückgangserscheinungen der Gletscher, ihre Formen, Strukturen, Bewegungsverhältnisse und Eisbergbildungen Erörterung finden. Darnach werden die niedrigen flachen Vorländer, welche die Gebirge der Insel an den Küsten umsäumen, beschrieben und durch Brandungswirkungen eines höheren Meeresstandes in der Präglazial- und Glazialzeit erklärt, und schließlich die Formen und Bodenflußerscheinungen der Tundra Spitzbergens, welche teils auf einem Abwärtsgleiten zersetzter und gelockerter Gesteine auf starrer Unterlage teils auf Zustandsänderungen innerhalb solcher Lockerböden beruhen.

2. Herr A. Sommerfeld legt eine Note von Professor R. Gans in Tübingen vor:

Wie fallen Stäbe und Scheiben in einer reibenden Flüssigkeit?

Die Note gibt eine Erweiterung der Stockersschen Theorie des Fallens von Kugeln.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr v. Dyck berichtet über das von ihm in der Bibliothek des Predigerseminars zu Wittenberg wieder aufgefundene im Jahre 1623 anonym erschienene

„Glaubensbekenntnis“ von Johannes Kepler.

Es ist dieses Glaubensbekenntnis in Keplers Schriften und Briefwechsel mehrfach erwähnt: es läßt sich seine Indentität unzweifelhaft feststellen.

In dieser 30 Seiten umfassenden Schrift greift Kepler noch einmal seine Auffassungen zusammen, welche ihn in seiner bis ins Jahr 1612 zurückgehenden Kontroverse mit dem württembergischen Konsistorium hinderten, die von ihm geforderte Unterschrift unter die sogenannte Konkordienformel zu geben. Man liest mit Ehrfurcht die schlichten, ergreifenden Worte des Mannes, der zeit seines Lebens um seines Glaubens und seines offenen Bekenntnisses willen gelitten, der in der Bedrängnis und Not seines Herzens, unter dem Eindruck des anbrechenden furchtbaren Kampfes noch einmal und zu einer letzten Abwehr und Rechtfertigung von seinem Glauben Zeugnis ablegt, „vermeinend, er wolle sich der Heucheley abthuen und in Gottes Sachen eine gewissenhafte, ja Teutsche Redlichkeit gebrauchen“.

(Erscheint in den Abhandlungen.)

4. Herr Pringsheim legt vor eine Mitteilung von Professor Oskar Perron:

Einige Konvergenz- und Divergenzkriterien für alternierende Kettenbrüche.

Der Verfasser entwickelt für Kettenbrüche mit reellen, abwechselnd positiven und negativen Teilbrüchen gewisse Konvergenz- und Divergenzkriterien, welche u. a. die bisher bekannten, von Herrn Gmeiner herrührenden als spezielle Fälle umfassen. Die dazu benützten Hilfsmittel sind völlig elementarer Art.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

5. Herr K. v. Goebel legte eine Abhandlung von Professor Dr. Dingler in Aschaffenburg für die Sitzungsberichte vor:

Über Periodizität sommergrüner Bäume Mitteleuropas im Gebirgsklima Ceylons.

Der Verfasser untersuchte das Verhalten einer Anzahl mitteleuropäischer Wald- und Obstbäume in dem gleichmäßig feuchten und verhältnismäßig geringe Temperaturschwankungen aufweisenden Klima des Hochlandes von Ceylon (Nuwara-Eliya und Hakgalla). Die Stieleichen zeigten an den einzelnen Exemplaren ein sehr ungleiches Verhalten. Die Ausschlagszeiten waren sowohl nach Individuen, als nach Zweigen einer Pflanze sehr unregelmäßig, drängen sich aber deutlich in zwei Perioden, Herbst (September—Dezember) und Frühjahr (März—Mai), zusammen. Eine kleine Zahl von Individuen macht eine, wenn auch nur kurze blattlose Ruheperiode durch, die große Mehrzahl ist nie ganz ohne lebende Blätter. Quercus Cerris zeigte die alten Blätter zur Zeit der Bildung der jungen noch grün, sie ist nach des Verfassers Bezeichnung „zweifach sommergrün“, Pyramiden-Pappeln zeigen zweimaligen Blattschub im Jahr. Birne, Pfirsich, Kirsche, Pflaumen und Äpfel entwickeln zweimal im Laufe von 12 Monaten Blätter und Blüten, die Früchte werden in der Regel nur einmal im Jahre ausgebildet. Eine deutliche Periodizität ist also bei diesen Pflanzen auch in Ceylon vorhanden, nur wird der Kreis ihrer Lebensfunktionen, von den Früchten abgesehen, zweimal im Jahre durchlaufen. Es werden längere Jahre hindurch fortgesetzte Beobachtungen zahlreicher Bäume notwendig sein, um die Frage nach der Regelung der Periodizität vollständig zu klären.

6. Herr v. Dyck legt vor und bespricht ein neuerdings erschienenes Werkchen von Lyzealprofessor Wilhelm Hess in Bamberg:

Himmels- und Naturerscheinungen in Einblattdrucken des 15. bis 18. Jahrhunderts.

Die Originale dieser kulturhistorisch wie astronomisch und meteorologisch interessanten Einblattdrucke finden sich in den

Beständen der Münchener Hof- und Staatsbibliothek, der K. Bibliothek in Bamberg und der K. Graphischen Sammlung zu München. Der Verfasser beabsichtigt die Untersuchungen auch über die in den übrigen Bibliotheken Bayerns vorhandenen Einblattdrucke auszudehnen und erbittet zu diesem Zwecke die Unterstützung der Akademie für die Veröffentlichung.

Sitzung am 10. Juni.

1. Herr H. v. Seeliger hält einen Vortrag

Über die räumliche Verteilung der Fixsterne.

In zwei früheren Abhandlungen, von denen die erste vor 13 Jahren der Akademie vorgelegt wurde, hat er die Ansicht aufgestellt und näher begründet, daß derjenige Teil des Universums, der unseren optischen und photographischen Hilfsmitteln erreichbar ist, ein abgeschlossenes System bildet, dessen Dimensionen keineswegs so ungeheuer groß sind, wie man früher meinte. Diese Dimensionen werden etwa in 10000 bis 20000 Jahren vom Licht durchmessen. Mit dieser Ansicht lassen sich nun auch die empirisch gefundenen mittleren Entfernungen der schwächeren Sterne vereinigen. Der Nachweis dieser Übereinstimmung war immerhin erwünscht, obwohl die erwähnten mittleren Entfernungen durchaus hypothetisch sind. Der Vortragende macht auch Mitteilungen über den mathematischen Charakter des vorliegenden Problems.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr A. Voss bespricht eine Abhandlung von Dr. F. Böhm

Über die Transformation von homogenen bilinearen Differentialausdrücken.

Es werden diejenigen Transformationen bestimmt, welche einen von den Differentialen der $2n$ unabhängigen Variabeln $x_1\ x_2\ \ldots\ x_n;\ y_1\ y_2\ \ldots\ y_n$ gebildeten bilinearen Differential-

ausdruck mit konstanten Koeffizienten bis auf einen Faktor in denselben mit den neuen Variabeln x_i', y_k' überführen, mit besonderer Berücksichtigung des Falles $n = 3$, welcher in der Lehre von den infinitesimalen Biegungsdeformationen einer Fläche auftritt.

3. Herr A. Finsterwalder macht Mitteilungen über ein von Dr. v. Rohr in Jena der Klasse übersandtes Werk „Die Brille als optischer Apparat", für welches dem Verfasser der Dank der Klasse ausgesprochen wird.

4. Herr H. Ebert legt zwei Arbeiten des Herrn Dr. C. W. Lutz vor:

Luftelektrische Messungen am Erdmagnetischen Observatorium (Sternwarte) München.

In der ersten Arbeit wird über die Ergebnisse der fünfjährigen Registrierung des luftelektrischen Potentialgefälles (1905—10) berichtet. Der Registrierapparat nach Benndorf wurde aus Stiftungsmitteln der Akademie beschafft.

In der zweiten Arbeit beschreibt der Verfasser einen von ihm konstruierten Apparat zur Messung des vertikalen elektrischen Leitungsstromes in der Luft und der elektrischen Oberflächendichte der Erde nach der Methode von C. T. R. Wilson. Die mit diesem Apparate im Jahre 1909 täglich angestellten Messungen ergaben interessante Zusammenhänge mit den meteorologischen Faktoren.

(Erscheinen in den Sitzungsberichten.)

5. Herr A. Pringsheim legt vor eine Abhandlung von W. H. Young:

Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe.

Als verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe wird diejenige Fouriersche Reihe bezeichnet, welche jene erstere zu einer Reihe nach ganzen positiven Potenzen der Exponential-

funktion mit rein imaginärem Argument ergänzt. In einer früher in den Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlung hat A. Pringsheim u. a. gezeigt, daß die absolute Konvergenz eines gewissen Integrals eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der verwandten Reihe liefert, deren Summe alsdann durch ein anderes, ebenfalls absolut konvergentes Integral dargestellt wird. Der Verfasser beweist, daß für den Fall einer erzeugenden Funktion mit beschränkter Schwankung schon die bloße Existenz, also auch die nur bedingte Konvergenz des letzteren Integrals die gleiche Schlußfolgerung gestattet und daß dieses Resultat sich noch in gewisser Weise verallgemeinern läßt.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

6. Herr R. v. Hertwig legt eine Arbeit von Herrn Professor A. Forel zur Aufnahme in die Sitzungsberichte vor. Dieselbe behandelt die Ameisen, welche in den letzten Jahrzehnten von der zoologischen Staatssammlung erworben wurden, darunter auch das Material, welches aus der Sammlung des bekannten englischen Forschungsreisenden Bates stammt. Das Interesse der Arbeit besteht einerseits in der Revision der seiner Zeit aus der Batesschen Sammlung von Smith beschriebenen Formen, andererseits in der Aufstellung einer größeren Anzahl neuer Arten und Unterarten, welche vornehmlich aus Liberia, Südafrika, Altcalabar, dem Amazonas-Gebiet und Neu-Guinea stammen.

Sitzung am 1. Juli.

1. Herr L. Burmester spricht

Über die Konstruktionen der Beschleunigungen bei zusammengesetzten Mechanismen.

Infolge schneller Bewegung können zuweilen an Gliedern eines Mechanismus sehr große Beschleunigungen entstehen, so daß die beschleunigenden Kräfte, die sich als das Produkt aus der Beschleunigung und der betreffenden Masse ergaben, auf den Mechanismus störend und auch gefährlich einwirken. Dies kann z. B. eintreten bei komplizierten Steuerungs-Mechanismen schnellgehender Lokomotiven und Dampfmaschinen. Deshalb ist es zweckmäßig, vor der praktischen Ausführung eines derartigen Mechanismus in seinem Entwurf die Beschleunigungen seiner Glieder zu konstruieren und die Wirkung der beschleunigenden Kräfte zu untersuchen.

Es kommt vor, den Beschleunigungszustand eines Gliedes in einem zwangläufigen Mechanismus zu bestimmen, wenn dieses Glied durch drei Glieder mit je einem anderen bewegten Gliede gelenkig verbunden ist. Hiezu ist die Lösung eines klassischen, kinematischen Problems erforderlich. Die nicht einfache, aber doch nicht schwierige Ausführung dieser Lösung führt schließlich auf die leichte Konstruktion des selbstentsprechenden Punktes zweier in einer Geraden liegenden, ähnlichen Punktreihen, die durch zwei Paar entsprechender Punkte bestimmt sind.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr S. Günther legt für die Sitzungsberichte eine Abhandlung vor:

Durchbohrte Berge und Orographische Fenster.

Mit diesem letzteren Worte werden, um eine Verwechselung mit dem neuerdings üblichen Ausdrucke „Geologisches Fenster“ zu vermeiden, wirkliche Durchbohrungen (Naturtunnels) be-

zeichnet, welche sich in größerer Höhe über dem Meere finden. Es gelang, siebzehn Vorkommnisse dieser Art ausfindig zu machen, fünfzehn in den Alpen, je eines in Korsika und Argentinien. Die Erklärung hat stets drei verschiedene Ursachen auseinanderzuhalten; die petrographische Beschaffenheit, tektonische Umformungen und die verschiedenen Modalitäten der Verwitterung und Erosion spielen jeweils eine Rolle. Dies wird für jeden Einzelfall näher ausgeführt.

3. Herr Sommerfeld legt eine Arbeit von Dr. M. Laue vor:

Über einen Versuch zur Optik der bewegten Körper.

Der von Michelson projektierte Versuch, welcher zur Achsendrehung der Erde in einem ähnlichen Verhältnis steht wie der klassische Michelson-Versuch zur Bewegung der Erde um die Sonne, wird diskutiert hinsichtlich seiner theoretischen Folgerungen 1. für die Relativitätstheorie, 2. die Theorie des starren Äthers, 3. die Cohnsche, 4. die Hertzsche Theorie.

Sitzung am 4. November.

Herr Rothpletz legte eine Arbeit des Herrn Julius Schuster vor:

Über Goepperts Raumeria.

Es ist dies ein mächtiger Stamm von $^1/_2$ m Durchmesser, der 1751 in der Kreide Polens gefunden wurde und in das Zwinger-Museum nach Dresden kam. Es wird gezeigt, daß es sich um eine vollständig ausgestorbene Pflanzenklasse handelt, in welcher zum ersten Male Zwitterblüten wie bei unseren höheren Pflanzen auftreten, und zwar sind die Staubblätter farnwedelartig, was auf eine Abstammung von den bekannten samentragenden Steinkohlenfarnen hinweist. Das Dresdener Exemplar ist von vorzüglicher Erhaltung, so daß selbst die feinsten Strukturen unter dem Mikroskop erkannt werden können. Hoffentlich gelingt es bald, die nicht ganz unerheblichen Mittel aufzubringen, um nicht nur wie bisher kleine Splitter, sondern auch die Blüten selbst zu Dünnschliffen verarbeiten zu können, die zu diesem Zwecke aus dem harten, verkieselten Klotz herausgebohrt werden müssen.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Öffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 18. November.

Der Präsident der Akademie, Herr K. Th. von Heigel, eröffnete die Festsitzung mit einer Ansprache, welche besonders im Drucke erschienen ist.

Dann verkündigten die Klassensekretäre die Wahlen.

Es wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigt

in der mathematisch-physikalischen Klasse

als ordentliches Mitglied:

Dr. Siegfried Mollier, o. Professor der Anatomie an der Universität München, bisher a. o. Mitglied der Akademie;

als außerordentliches Mitglied:

Dr. Max Schmidt, o. Professor der Geodäsie und Topographie an der Technischen Hochschule München;

als korrespondierende Mitglieder:

Dr. Julius Bauschinger, o. Professor der Astronomie an der Universität Straßburg i. E.,

Nils Christofer Dunér, Professor, Sternwartedirektor a. D. und Sekretär der Vetenskaps-Societäten in Upsala,

Dr. Max Planck, o. Professor der mathematischen Physik an der Universität Berlin,

William Henry Perkin, Professor der anorganischen Chemie an der Universität Manchester,

Ernst Rutherford, Professor der Physik an der Universität Manchester,

Dr. Johannes von Kries, o. Professor der Physiologie an der Universität Freiburg i. Br.

Dr. Wilhelm Roux, o. Professor der Anatomie an der Universität Halle,

Dr. Emil Wiechert, o. Professor der Geophysik an der Universität Göttingen.

Darauf hielt das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse, Herr J. Rückert, die besonders im Druck erscheinende Festrede

Das materielle Substrat der Vererbungserscheinungen.

Sitzung am 2. Dezember.

1. Herr Föppl trug vor:

Über die Sprödigkeit von Glas.

Wenn auch alle Gläser als spröde Körper zu bezeichnen sind, so ließen sich doch zwischen verschiedenen Glassorten. die aus dem Jenaer Glaswerk bezogen waren, recht große Unterschiede im Grade der Sprödigkeit feststellen. Aus den Gläsern wurden würfelförmige Körper hergestellt, auf die in einem Schlagwerke mit einem Hammer Schläge nach einem bestimmten Versuchsplane abgegeben wurden, bis der Bruch erfolgte. Je spröder das Glas war, desto früher mußte der Würfel unter sonst gleichen Umständen zerbrechen. Zum Vergleich konnte dabei die Sprödigkeit des Granits dienen, da für dieses Gestein schon von früher her zahlreiche Versuchsergebnisse vorlagen, die sich auf die Widerstandsfähigkeit gegen Schläge beziehen. Die meisten Gläser sind viel spröder als Granit. Dagegen hat sich gezeigt, daß eines der untersuchten Gläser, ein Borat, Flintglas, weniger spröd, also zäher war als ein durchschnittlicher Granit.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr A. Voss legte für die Sitzungsberichte vor eine Abhandlung von Dr. C. Salkowski:

Die Cesàroschen Kurven.

3. Herr Rothpletz legte eine Arbeit des Herrn Kurt Leuchs vor:

Geologische Untersuchungen im Chalyktau, Temurlyktau, dsungarischen Alatau (Tian-Schan).

Die Arbeit enthält die geologischen Ergebnisse der von Prinz Arnulf mit Prof. Merzbacher und dem Verfasser 1907 unternommenen Expedition in den Tian Schan. An eine ausführliche Routenbeschreibung schließt sich die Besprechung

der Gesteine des Gebietes, unter denen Eruptivgesteine und kontaktmetamorphe Sedimente überwiegen. Die sedimentäre Serie weist im Chalyktan starke Lücken auf. Über älterem Paläozoikum liegt diskordant das Unterkarbon. Mesozoische Sedimente sind ausschließlich und tertiäre fast ganz auf die den Chalyktan umgebenden Gebiete beschränkt. Der Tian Schan verdankt, soweit er in dieser Arbeit besprochen wird, seine Entstehung in der Hauptsache zwei großen gebirgsbildenden Vorgängen, welche zeitlich weit auseinanderliegen und in ganz verschiedener Weise die Struktur des Gebirges beeinflußt haben. Doch ragt der Chalyktan als ein von der zweiten Gebirgsbildung nur wenig beeinflußter Überrest des älteren Gebirges inmitten der später gefalteten Tian Schan-Ketten horstartig auf.

(Erscheint in den Abhandlungen.)

4. Herr Alfred Pringsheim spricht:

Über einige funktionentheoretische Anwendungen der verallgemeinerten Eulerschen Reihentransformation.

Seit Hadamards grundlegender Abhandlung über die Taylorsche Reihe hat man sich vielfach mit der Aufgabe beschäftigt, Lage und Charakter der singulären Stellen einer analytischen Funktion aus der Natur der als definierendes Funktionselement dienlichen Taylorschen Reihe herzuleiten. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, inwieweit diese sonst mit wesentlich komplizierteren Hilfsmitteln behandelte Aufgabe mit Hilfe der sehr elementaren Methode der Eulerschen Transformation gelöst werden kann.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Verzeichnis der im Jahre 1911 eingelaufenen Druckschriften.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten.

Aachen. Geschichtsverein:
— — Zeitschrift, Bd. 32, 1910.
Aarau. Historische Gesellschaft des Kantons Aargau:
— — Argovia, Bd. 34, 1911.
— — Taschenbuch für 1910.
Abbeville. Société d'Émulation:
— — Bulletin trimestriel 1910, No. 3, 4; 1911, No. 1, 2.
Aberdeen. University:
— — Studies, No. 42—51, 4°.
Adelaide. Royal Geographical Society of Australasia:
— — Proceedings, Sess. 1886/87—1906/07, vol. 2—9; Sess. 1909/10, vol. 11.
— Royal Society of South-Australia:
— — Transactions, Proceedings and Report, vol. XXXIV, 1910.
Agram. Südslavische Akademie der Wissenschaften:
— — Codex diplomat. regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae, vol. VIII.
— — Ljetopis 25, 1911.
— — Rad, Kniga 183—187.
— — Zbornik, Kniga XVI, 1.
— — Rječnik 29.
— — Starine, Kniga 14, Svezak 2; Kniga 15, Svezak 1, 2.
— — Strohal, Statuti 1911.
— — Popis Publikacija 1911.
— K. Kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv:
— — Vjestnik, Bd. XII, Heft 3, 4; Bd. XIII, Heft 1—4.
— — Historia archivi 1910.

Agram. Kroat. archäologische Gesellschaft:
— — Vjestnik, Bd. XI, 1910—11.
Aix. Société d'études Provençales:
— — Annales de Provence, 7e année, No. 2—6; 8e année, No. 1, 2.
— Bibliothèque de l'Université:
— — Annales de la faculté des lettres, tom. 4, No. 1, 2.
— — „ „ „ „ de droit, tom. 3, No. 1—4.
Albuquerque. University of New Mexico:
— — Bulletin, Whole No. 53, 57, 58, 60, 61.
Alençon. Société historique et archéologique de l'Orne:
— — Bulletin tom. 29, No. 1, 3, 4.
Allegheny. Observatory:
— — Publications, vol. II, No. 9—12.
— — Miscell. scient. papers, N. Ser. vol. 2, No. 1.
Altenburg. Geschichts- und altertumsforschender Verein des Osterlandes:
— — Mitteilungen, Bd. 12, Heft 2.
Amani. Biologisch-landwirtschaftliches Institut:
— — Der Pflanzer, 6. Jahrg., 17—21; 7. Jahrg., No. 1 (mit Beilage), 2, 3 (mit Beilage), 4—11.
— — Berichte über Land- und Forstwirtschaft, Bd. 3, Heft 5.
Amiens. Académie:
— — Album archéologique, fasc. 17.
— — La Picardie, tom. 4, No. 2.
— — Dict. historique . . . de la Picardie 1.
— Société des Antiquaires de Picardie:
— — Bulletin trimestriel, année 1910, trim. 1—4.
— — Mémoires IV, fasc. 6.
— — Documents inédits sur . . . Corbie 1, 1910.
Amsterdam. K. Academie van Wetenschappen:
— — Verhandelingen, afd. Natuurkunde, II. sectie, XVI, 4, 5; I. sectie, deel X. 2; XI, 1, 2.
— — Verslagen en vergaderingen, deel 19, No. 1, 2.
— — Verhandelingen, afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, deel XII, No. 1.
— — Verslagen en mededeelingen, 4. Reeks, deel 10.
— — Jaarboek 1910.
— — Prijsvers, 1911, 4 Stücke.
— K. N. aardrijkskundig Genootschap:
— — Tijdschrift, deel 28, No. 1—7.
— Wiskundig genootschap (Société de mathémat.):
— — Nieuw archief, 2. Reeks, deel 9, stuk 4.
— — Wiskundige opgaven; Register zu 1875—1910.
— — Revue des publications mathém., tom. 19, partie 1, 2.

Ansbach. Historischer Verein:
— — 58. Jahresbericht, 1911.

Antwerpen. Société d'Astronomie d'Anvers:
— — Gazette astronomique, No. 39, 40, 43—48.
— — Rapport 1910.

Aschaffenburg. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11.
— — Programm von Stöcker.

Athen. École Française:
— — Bulletin du Correspond. hellénique, année 34, 8—12, 1910; année 35, 1—12, 1911.
— Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Athena, tom. 23, Heft 1, 2.
— Universität:
— — *Ἐπιστημονικὴ ἐπετερὶς* 4, 1907—08; 5, 1908—09; 6, 1909—10; 7, 1910—11.
— — *Τὰ κατὰ τὴν πρυτανείαν*, 1907—08.

Augsburg. K. Realgymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 und 1911/12 mit Programm von Ledermann.
— Historischer Verein:
— — Zeitschrift, 36. Jahrg., 1910.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Bericht 39 und 40, 1911.

Aurillac. Société des lettres, sciences et arts:
— — Revue de la Haute-Auvergne, 12e année, 1910, fasc. 4; 13e année, 1911, fasc. 1—3.

Bagnères-de-Bigorre. Société Ramond:
— — Explorations Pyrénéennes, Bulletin, No. 45.

Baltimore. Peabody Institute:
— — 44th Annual Report, 1911.
— Johns Hopkins University:
— — Circulars 1910, No. 5—7, 9, 10; 1911, No. 1—3.
— — American Journal of Mathematics, vol. 32, No. 3, 4; vol. 33, No. 1, 2.
— — American Journal of Philology, vol. 31, No. 1—4; vol. 32, No. 1.
— — Bulletin of the Johns Hopkins Hospital, vol. 22, No. 238—251.
— — Report, vol. 16.
— Chemical Society:
— — American Chemical Journal, vol. 43, No. 6; vol. 44, No. 1—6; vol. 45, No. 1—4.

Bamberg. K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Pet. Schneider.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11.
— K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1910/11.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Bericht 21.
— Historischer Verein:
— — Jahresbericht 68, 1910.
Barbados. Imp. Commissioner of agriculture:
— — Agricultural News, No. 226—234, 236—247, 249—252; Titel und Register zu Bd. 9, 1910.
Barcelona. R. Academia de Ciencias y Artes:
— — Boletin, vol. 3, No. 2.
— — Memorias, vol. 8, No. 24—31; vol. 10, No. 1, 2; Titel und Register zu vol. 8.
— — Nomina del personal 1910/11.
— Institut d'Estudis Catalans:
— — Memorie für 1910.
— — Les pintures murals, fasc. 2, 1910; fasc. 3, 1911.
Bar-le-Duc. Société des lettres, sciences et arts:
— — Mémoires, IV. sér., tom. 7, 1909.
Basel. Historisch-antiquarische Gesellschaft:
— — Basler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde, Bd. X, Heft 1.
— Universität:
— — Schriften der Universität aus dem Jahre 1910/11 in 4⁰ und 8⁰.
— — Jahresverzeichnis der Schweizer Universitätsschriften 1909/10; 1910/11.
Bastia. Société des sciences historiques et naturelles:
— — Bulletin, fasc. 310—327.
Batavia. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
— — Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde, deel 52, afl. 3—6; deel 53, afl. 1—6.
— — Notulen van de algemeene en directievergaderingen, deel 48, afl. 3, 4; deel 49, afl. 1, 2.
— — Verhandelingen, deel 58, afl. 4; deel 59, afl. 1 und 2, 1.
— R. Magnetical and Meteorological Observatory:
— — Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie 31, 1911.
Bayreuth. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Speidel.

Bayreuth. Historischer Verein:
— — Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken, Bd. 24, Heft 3.

Belgrad. K. Serbische Akademie der Wissenschaften:
— — Hodišnjak, vol. 23.
— — Spomenik, vol. 48—50.
— — Zbornik Sprpski Etnografski, vol. 16, 17.
— — Glas, vol. 83—84, 86.
— — Sbrnja 1788—91 von Graf Brankodič.

Bergen (Norwegen). Museum:
— — Aarbog 1910, Heft 3; 1911, Heft 1, 2.
— — Sars G. O., An Account of the Crustacea of Norway, pars 31—36.

Bergzabern. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11.

Berkeley. University of California:
— — Bulletin, third Serie, vol. IV, No. 1—9.
— — Chronicle, vol. 12, No. 1—4 (Titel und Register); vol. 13, No. 1, 2.
— — Publications, Botany, Titel und Register zu vol. 3; vol. 4, No. 1—10; American Archaeology etc., vol. 9, No. 1—3; vol. 10, 1; Economics, vol. 2; Geology, vol. 5, No. 30; vol. 6, No. 1—7 und 19; Class. Philology, vol. 2, No. 5; Modern Philology, vol. 1, No. 4; vol. 2, No. 1; Semitic Philology, vol. 1, No. 1; vol. 2, No. 1, 2; Philosophy, vol. 2, No. 4; Physiology, vol. 4, No. 1—5; Psychology, vol. 1, No. 1, 2; Zoology, vol. 6, No. 10, 12—14; vol. 7, No. 2—6; vol. 8, No. 1.
— — Academy of Pacific Coast history, vol. 1, No. 6—7 (Titel u. Register).
— — Memoirs, vol. II, 1910.
— College of Agriculture:
— — Bulletin 206—211.

Berlin. K. Preuß. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen { Philos.-histor. Klasse, 1910, 4⁰.
Physikal.-math. Klasse, 1910, 4⁰. }
— — Sitzungsberichte 1910, No. 40—54; 1911, No. 1—38.
— — Acta Borussica, Handels-, Zoll- und Akzisepolitik, Bd. 1.
„ „ Münzwesen, beschreibender Teil, Heft 3.
— Archiv der Mathematik und Physik:
— — Archiv, Bd. 15, 4; Bd. 16, 1—4; Bd. 17, 1—4; Bd. 18, 1—4.
— K. Bibliothek:
— — Jahresbericht für 1910/11.
— Deutsche Chemische Gesellschaft:
— — Berichte, 43. Jahrg., No. 19; 44. Jahrg., No. 1—5, 7—18 und Mitgliederverzeichnis 1911.

Berlin. Deutsche Geologische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Bd. 62, Heft 4; Bd. 63, Heft 1—3.
— — Monatsberichte 1910, No. 7—10; 1911, No. 1—10.
— Medizinische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 41, 1910.
— Deutsche Physikalische Gesellschaft:
— — Die Fortschritte der Physik, 66. Jahrg., 1910, 1–3.
— — Verhandlungen, Jahrg. 12, No. 24; Jahrg. 13, No. 1—16, 18—24.
— Physiologische Gesellschaft:
— — Zentralblatt für Physiologie, Bd. 24, No. 19–26a; Bd. 25, No. 1—21.
— — Bibliographia physiologica, III. Serie, Bd. 6, No. 1—4; Bd. 7, No. 1, 2.
— K. Technische Hochschule:
— — Rede von Witt, 1911.
— Kais. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abteilung s. unter Rom):
— — Jahrbuch, Bd. 25, Heft 3, 4; Bd. 26, Heft 1—3.
— Preuß. Geologische Landesanstalt:
— — Potonié, Lief. 6.
— — Abhandlungen, N. F., Heft 56, 58—63, 66, 67.
— — Jahrbuch 1906, 1907, 1908 I; 1909 I; 1910 I 1, 2; II 1, 2; 1911 I 1, 2.
— Redaktion des „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“:
— — Jahrbuch, Bd. 39, Heft 1—3; Bd. 40, Heft 1.
— Lehranstalt für die Wissenschaft des Judentums:
— — 29. Bericht, 1911.
— Astronomisches Recheninstitut:
— — Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1913.
— Reichsmarineamt:
— — 50 Jahre Hydrographisches Bureau, 1861—1911.
— Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuß. Staaten:
— — Gartenflora, Jahrg. 1911, No. 1—24; 1912, No. 1.
— — Mitgliederverzeichnis 1911.
— Verein für Geschichte der Mark Brandenburg:
— — Forschungen zur brandenburgischen und preußischen Geschichte, Bd. 23, 2. Hälfte; Bd. 24, 1. Hälfte.
— Verein für die Geschichte Berlins:
— — Schriften, Heft 44, 1911.
— — Mitteilungen 1911, No. 1—12; 1912, No. 1.
— Universitätsbibliothek:
— — Jahrhundertfeier 10./12. Oktober 1910.
— Zeitschrift für Instrumentenkunde:
— — Zeitschrift, 31. Jahrg., No. 1—12.

Bern. Bibliothek:
— — Jahrbuch, Bd. 35, 36.
— — Quellen, N. F. I; 1, 2; II; 1.
— Historischer Verein:
— — Archiv, Bd. 20, Heft 2.
— Universitätskanzlei:
— — Schriften der Universität, 1910/11 (259 Stück).

Besançon. Société d'Emulation du Doubs:
— — Mémoires, table générale 1799—1809.

Beyrut. Université Saint Joseph:
— — Mélanges de la Faculté Orientale, tom. V, 1.

Béziers. Société archéol., scientif. et littéraire:
— — Bulletin, 3. sér., tom. 8, livr. 2.

Bielefeld. Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Bericht über die Jahre 1909 und 1910.

Bistritz. Deutsches Gewerbelehrlingsinstitut:
— — Jahresbericht 36.

Bologna. R. Accademia delle Scienze dell' Istituto:
— — Classe di scienze morali: a) Sezione di scienze storico-filologiche, Memorie, ser. I, tom. 4; b) Sezione di scienze giuridiche, ser. I, vol. 2—4. Classe di scienze fisiche: Memorie VI, 7, No. 1—4.
— — Rendiconto, vol. 2, fasc. 2; vol. 3, 1909—10.
— — Rendiconto, N. Ser., vol. 14, 1909—10.
— — Adunanza plenaria 1910.
— Osservatorio astronomico e meteorologico:
— — Osservazioni meteorologiche dell' annata 1909.
— R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna:
— — Atti e Memorie, ser. III, vol. 28, fasc. 1—6.

Bombay. Anthropological Society:
— — Journal, vol. 8, No. 5.
— Meteorol. department siehe Simla.

Bonn. Universitätsbibliothek:
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11.
— Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande:
— — Bonner Jahrbücher, Heft 119, 1—3 und Bericht der Kommission für Denkmalpflege 1908/09.
— Naturhistorischer Verein der preußischen Rheinlande:
— — Verhandlungen, 67. Jahrg., 1. und 2. Hälfte.
— — Sitzungsberichte 1910, 1. und 2. Hälfte.

Bordeaux. Société des sciences physiques et naturelles:
— — Mémoires, tom. 5, cahier 1.

Bordeaux. Société des sciences physiques et naturelles:
— — Procès-verbaux 1909/10.
— Commission météorologique:
— — Bulletin, année 1909.
— Société de géographie commerciale:
— — Bulletin 1911, année 37, No. 1—12.
Boston. American Academy of Arts and Sciences:
— — Proceedings, vol. 46, No. 6—24; vol. 47, No. 1—7.
— American Urological Association:
— — Transactions, vol. 4, 1910.
— Museum of Fine Arts:
— — Bulletin, No. 49—54.
— — Annual Report 35, 1910.
Bourg. Société d'émulation:
— — Annales 43, 1910, 1—4.
Bremen. Meteorologisches Observatorium:
— — Grosse, Klima Bremens, 1911.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Abhandlungen, Bd. XX, Heft 2.
Brisbane. Geographical Society:
— — Geographical Journal, vol. 25.
Bromberg. Stadtbibliothek (Deutsche Gesellschaft für Kunst und Wissenschaft):
— — Jahresbericht 9, 1910—11.
— — Jahresbericht (Abt. Literatur) 8.
— — Mitteilungen der Stadtbibliothek, Jahrg. 4, No. 4—12.
— — Katalog der Stadtbibliothek, Heft 1.
— — Minde-Pouet, Die Stadtbibliothek Bromberg, 1911.
— Kaiser Wilhelms-Institut für Landwirtschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 3, Heft 3—5; Bd. 4, Heft 1.
Brünn. Mährisches Landesmuseum:
— — Časopis, Bd. XI, Heft 1, 2.
— — Zeitschrift, Bd. XI, Heft 1, 2.
— — Zprava (Bericht über die Tätigkeit der Mähr. Museumsgesellschaft) für die Jahre 1909 und 1910.
— — Zpravy (Bericht der Kommission zur naturwissenschaftlichen Erforschung Mährens), meteorologische Abteilung, Heft 2.
— Deutscher Verein für die Geschichte Mährens u. Schlesiens:
— — Zeitschrift, 14. Jahrg., Heft 3, 4; 15. Jahrg., Heft 1—4.
— Naturforschender Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 48, 1909.
— — Bericht der meteorologischen Kommission 26, 1906.
— — Ergebnisse der phänologischen Betrachtungen 1906.

Brüssel. Académie Royale de médecine:
— — Mémoires couronnés, Collection in 8⁰, tom. 20, fasc. 8, 9.
— — Bulletin, IVᵉ sér., tom. 24, No. 9—11; tom. 25, No. 1—9.
— Académie Royale des sciences:
— — Annuaire 1911.
— — Bulletin: a) Classe des lettres, 1910, No. 11, 12; 1911, No. 1—11; b) Classe des sciences, 1910, No. 11, 12; 1911, No. 1—11.
— — Mémoires, Classe des sciences, Collection in 8⁰, IIᵉ sér., tom. 3, fasc. 1—4.
— — Mémoires, Classe des lettres, Collection in 4⁰, IIᵉ sér., tom. 4, fasc. 2 und 3, 1911.
— — Mémoires, Classe des sciences, Collection in 4⁰, IIᵉ sér., tom. 3, fasc. 3—7.
— — Programme des concours, Classe des lettres, 1913, 1914.
— — „ „ „ , „ „ sciences, 1911.
— — Biographie nationale de la Commission Royale d'Histoire, tom. 21, fasc. 1.
— — Inventaire des archives Farnésiennes de Naples, Br. 1911.
— — Poncelet, Inventaire 1.
— — Hemicourt 1, 1910.
— Institut Solvay:
— — Bulletin mensuel 1910, No. 1—4.
— Jardin botanique:
— — Bulletin, vol. 1, No. 4; vol. 2, 1910; vol. 3, fasc. 1, 1911.
— Ministère des Colonies:
— — Annales du Musée du Congo Belge: A. Geologie, Paléontologie, Mineralogie, sér. I, fasc. 1, 1910; B. Botanique, sér. V, tom. 3, fasc. 2; C. Ethnographie et Anthropologie, sér. III, tom. 2, fasc. 1 (Bushongo).
— Observatoire Royal siehe Uccle.
— Société d'archéologie:
— — Annales 1910, No. 3, 4; 1911, No. 1.
— — Annuaire, tom. 22, 1911.
— Société des Bollandistes:
— — Analecta Bollandiana, tom. 30, fasc. 1—4.
— Société botanique de Belgique:
— — Bulletin, tom. 47, fasc. 1—4, 1910.
— Société chimique:
— — Bulletin, 25ᵉ année, No. 1—12.
— Société entomologique de Belgique:
— — Annales, tom. 54, 1910.
— — Mémoires, tom. 18, 1911.

Brüssel. Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie:
— — Mémoires, fasc. 3, 1909; fasc. 4, 1910.
— — Nouveaux Mémoires, No. 3, 1910.
— — Bulletin: a) Mémoires, tom. 24, fasc. 3, 4 mit Titel und Register; tom. 25, fasc. 1, 2; b) Procès-verbaux, tom. 24, No 8—10; tom. 25, No. 1—7.
— Société Royal zoologique et malacologique:
— — Annales, tom. 45, 1910.

Budapest. K. Ungarische Akademie der Wissenschaften:
— — Mathem. und naturwissenschaftl. Berichte aus Ungarn, Bd. 26, 1—3.
— — Almanach 1911.
— — Rapparten 1910.
— — Nyelvtudományi (Sprachwissenschaft), Bd. 2, fasc. 4; Bd. 3, fasc. 2, 3,
— — Monumenta Hungariae Historica, vol. 35.
— — Értekezések, Bölcsèzet tudományi (philosophische Abhandlungen), Bd. 3, No. 6—8.
— — Értekezések, Nyelvtudományi (sprachwissenschaftliche Abhandlungen), Bd. 21, No. 3—9.
— — Értesitö, Archaeologiai N. F., Bd. 30, No. 4. 5; Bd. 31, No. 1—3.
— — „ Mathemat., Bd. 27, No. 3—5; Bd. 28, No. 3—5; Bd. 29, No. 1, 2.
— — Értekezések, Farsadalomtudományi (sozialwissenschaftliche Abhandlungen), Bd. 14, No. 5.
— — Értekezések, Történettudományi (geschichtswissenschaftliche Abhandlungen), Bd. 22, No. 8—10; Bd. 23, No. 1.
— — Közlemények, Nyelvtudományi (sprachwissenschaftliche Mitteilungen), Bd. 40, No. 1—3.
— — Einzelwerke, 1910, 9 Bände; 1911, 7 Bände.
— Association géodésique internationale:
— — 16e Conférence 1909.
— Statistisches Bureau:
— — Publikationen, No. 45.
— Ungarische Ethnographische Gesellschaft:
— — Ethnographia, Jahrg. 21, Heft 6: Titel und Register zu Jahrg. 21; Jahrg. 22, Heft 1—5.
— K. Ungarische Geographische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, vol. 37, livr. 1, 2, 4. 8—10; vol. 38, livr. 1—10; vol. 39, livr. 1—6.
— Ungarische volkswirtschaftliche Gesellschaft:
— — Közgazdasági Szemle, Bd. 44, Heft 4—6; Bd. 45, Heft 1 und 2 mit Bibliographie (August—Dezember 1910); Bd. 46, Heft 1—5 mit Bibliographie (Mai—September 1911).

Budapest. Landesrabbinerschule:
— — Jahresbericht 34, 1910—11.
— Ungarisches Nationalmuseum:
— — Ertesitöje, XI. Jahrg., 3, 4; XII. Jahrg., 1—4.
— K. Ungarische Geologische Reichsanstalt:
— — Földtani Közlöny, Bd. 40, Heft 7—12; Bd. 41, Heft 1—8.
— — Sektionsblatt, Zone 25, vol. 25.
— — Erläuterungen zur geologischen Spezialkarte, Zone 22, Kol. 29; Zone 25, Kol. 25.
— — Jahrbuch, Bd. 17, No. 2; Bd. 18, No. 1—4; Bd. 19, No. 1—4.
— — Mitteilungen aus dem Jahrbuch, Bd. 17, Heft 2; Bd. 18, Heft 1 und 2; Bd. 19, Heft 1; Titel und Register zu Bd. 17.
— — Jahresbericht 1886; 1908.
— — Schafarzik, A magyar Köbányák 1904.
— — „ Mitteilungen über die ungarischen Steinbrüche 1909.
— — Tóth Jul., Chemische Analyse der Trinkwässer Ungarns.
— Reichsanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus:
— — Verzeichnis der erworbenen Bücher, No. 8.
— — Bericht über die Tätigkeit der Anstalt, 9. Bericht.
— — Jahrbücher, vol. 37, No. 1—4; vol. 38, No. 1, 4.
— — Büky, Untersuchung des ... Apparates „Dines“, 1911.
— K. Ungarische Ornithologische Zentrale:
— — Aquila 17, 1910.

Buenos Aires. Museo nacional publico:
— — Anales, ser. III, tom. 13 und 14, 1911.
— Sociedad cientifica:
— — Anales, tom. 69, No. 5, 6; tom. 70, No. 1—6; tom. 71, No. 1—6; tom. 72, No. 1, 2.

Buffalo. Society of natural sciences:
— — Bulletin, vol. 10, No. 1.

Buitenzorg (Java). Departement van landbouw:
— — Bulletin, No. 44—46, 4°.
— — Mededeelingen, No. 10, 12—16.
— — Jaarboek 1909 und 1910.
— — Bulletin du jardin botanique, II. sér., No. 1, 2.

Bukarest. Academia Română:
— — Analele (Partea administration), 2. ser., tom. 31.
— — Memoriile, Sect. istorica, Bd. 31, 1908—09.
— — „ „ stiintifica, Bd. 31, 1908—09.
— — Creşterea colectiunilor, 1909, No. 10—12.
— — Publicatiunile fondulin Vas. Adamachi, tom. 3, No. 6—16.
— Meteorologisches und Astronomisches Institut:
— — Buletinul anul 16, 1907; anul 19, 1910.

Bukarest. Société des Sciences:
— — Bulletin, anul 19, No. 6; anul 20, No. 1—5.

Burghausen. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Stechele.

Caen. Société Linnéenne de Normandie:
— — Bulletin, sér. VI, vol. 2, fasc. 1.

Cairo. Institut Égyptien:
— — Bulletin, sér. V, tom. 4, fasc. 2.
— — Mémoires, tom. 6, fasc. 3.
— Ministry of Finance:
— — A list of maps, plans and publications, Cairo 1909.
— Université Égyptienne:
— — Bulletin de la Bibliothèque, 2e année, 1911, fasc. 1, 2.

Calcutta. Board of Scientific Advice for India:
— — Annual Report 1909/10.
— Imp. Department of agriculture:
— — Report on the progress of agricultura in India 1902—1910.
— Meteorological Department of the Government of India siehe Simla.
— Government of Bengal:
— — Hrīshikeśa Sāstrī and Nīlamani Cakravartti, a descriptive Catalogue of Sanskrit Manuscripts in the Library of Calcutta Sanskrit College, No. 28.
— Indian Museum:
— — Memoirs, vol. 3, part 1 und 2.
— — Records, vol. 4, No. 1—6; vol. 5, No. 1—4; vol. 6, No. 1—3.
— Mathematical Society:
— — Bulletin, vol. 1, No. 1—3.
— Royal Asiatic Society of Bengal:
— — Bibliotheca Indica, N. Ser., No. 1187, 1195, 1216, 1219, 1223, 1224. 1226—1230, 1235, 1236.
— — Journal and Proceedings, vol. 5, No. 1—11; vol. 6, No. 1—6.
— — Memoirs, vol. 2, No. 10, 11; vol. 3, No. 1.
— Geological Survey of India:
— — Records, vol. 40, part 1—4.
— — Palaeontologia Indica, ser. XV, vol. 4, No. 3.

Cambrai. Société d'émulation:
— — Memoirs, tom. 64.

Cambridge (Engl.). Observatory:
— — Annual Report 1908/09.

Cambridge. Antiquarian Society:
— — Proceedings, No. 58 = 15, 1; No. 59 = 15, 1 und 2.
— — List of members 1911.
— Philosophical Society:
— — Proceedings, vol. 15, part 2; vol. 16, part 1—4.
— — Transactions, vol. XXI, No. 15, 16.
Cambridge (Mass.). Peabody Museum of American Archaeology and Ethnology:
— — Memoirs, vol. 5, No. 1, 2.
— — Papers, vol. 4, No. 2; vol. 6, No. 1.
— Museum of comparative Zoology at Harvard College:
— — Bulletin, vol. 52, No. 14—17; vol. 53, No. 5, 6; vol. 54, No. 1—9.
— — Memoirs, vol 25, No. 3; vol. 26, No. 7; vol. 34, No. 3; vol. 39, No. 1, 2; vol. 40, No. 1—4; vol. 41, No. 1, 2; vol. 44, No. 1.
— — Annual Report 1908/09, 1909/10, 1910/11.
— Astronomical Observatory of Harvard University:
— — 65th Annual Report.
— — Annals, vol. 56, part 5; vol. 58, part 2; vol. 59, part 7 und 8; vol. 64, part 7; vol. 65 und 66; vol. 71, part 1.
— — Circular, No. 153—168, 4⁰.
— — Dinner of Lawrence School Association, 29. Juny 1910.
— — Annual Report of the Observatory Syndicate 1910/11.
Capetown. Geological commission:
— — Annual Report 14, 1909.
— Geological Survey:
— — Map, sheet 11, 13, 32, 40.
Catania. Accademia Gioenia di scienze naturali:
— — Atti, ser. V, vol. 3, 1910.
— — Bollettino, ser. II, fasc. 14—18.
— Società degli spettroscopisti:
— — Memorie, vol. 40, disp. 1—11.
— Società di storia patria per la Sicilia Orientale:
— — Archivio, anno VII, No. 3; anno VIII, No. 1—3.
Chalons s. S. Société d'histoire et d'archéologie:
— — Mémoires, 2e sér., tom. 1, partie 1, 2 = vol. 9; tom. 2, partie 1, 2 = vol. 10; tom. 3, partie 1, 2 = vol. 11.
Charkow. Gesellschaft für physikalische und chemische Wissenschaften:
— — Trudy, Bd. 36, 1908; Bd. 37, 1909.
— Université Imperiale:
— — Sapiski 1910, No. 4; 1911, No. 1—3 und Beilage zu No. 2.
Charlottenburg. Physikalisch-technische Reichsanstalt:
— — Die Tätigkeit der physikal.-techn. Reichsanstalt im Jahre 1910.

Château-Thierry. Société historique et archéologique:
— — Annales, année 1910.

Chicago. John Crerar Library:
— — 15th and 16th Annual Report for 1909/10.
— Field Museum of Natural History:
— — Publications, No. 145—150.
— University of Chicago Library:
— — The astrophysical Journal, vol. 27, 28, 1908; vol. 29, 30, 1909; vol. 31, 32, 1910; vol. 33, No. 1—4, 1911; vol. 34, No. 1—5, 1911.

Christiania. Norske geografiska Selskab:
— — Aarboog 21, 1909/10.
— Videnskabsselskabet:
— — Forhandlinger, Aar 1910.
— — Skrifter, I. math.-naturwiss. Klasse, 1910; II. histor.-filos. Klasse, 1910.
— Universitäts-Bibliothek:
— — Det Kongelige Frederiks-Universitet 1811—1911, Bd. 1, 2.
— — Jahrbuch des Norwegischen Meteorolog. Instituts für 1904—1910.
— — Aarsberetning 1903/04—1910.
— — Universitets- og Skol-Annaler 20, 1905—25, 1910.
— — Norske gaardnavne, Bd. 5, 6, 8, 11, 13, 16, 17.
— — Archiv für Mathematik und Naturwissenschaft, Bd. 27—31.
— — Nyt magazin, Bd. 43—48.

Chur. Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden:
— — 40. Jahresbericht, 1910.

Cincinnati. Lloyd Library:
— — Bulletin, No. 14, 15.
— — Mycological writings, No. 36.
— — „ notes: Polyporoid issue, No. 1—3; Old Species Series, No. 1.
— — Bibliographical contributions, No. 1—3.
— Observatory:
— — Publications, No. 17.
— University:
— — Record, ser. 1, vol. 7, No. 2—4.
— — University Studies, ser. II, vol. 6, No. 3, 4; Titel und Register zu vol. 6; vol. 7, No. 1, 2.

Claremont. Pomona College:
— — Journal of entomology, vol. 2, No. 4; vol. 3, No. 1—4.

Clermont. Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts:
— — Mémoires, II. sér., fasc. 22.
— — Bulletin historique et scientifique de l'Auvergne, sér. II, 1911, No. 4—9.

Clermont. Société des amis de l'Université:
— — Revue d'Auvergne et Bulletin de l'Université, année 26, 1909; année 27, 1910.
— — Mémoires, fasc. 2.
— — Mélanges littéraires.

Cleveland. Archaeol. Inst. of America:
— — American Journal of Archaeology, vol. 14, No. 4; vol. 15, No. 1—4.
— — Bulletin, vol. 2, No. 1—4; vol. 3, No. 1.

Colombo. Museum:
— — Spolia Zeylonica, part 26—28.
— — Administration Report 1910/11, part 4.
— — Laws Observatory, Bulletin, No. 17—19.

Columbia. University of Missouri:
— — Studies, Philosophy and Education Series, vol. 1, No. 1.

Como. Società storica:
— — Periodico, fasc. 75, 76.
— — Raccolta Storica, vol. 6, disp. 4—6.

Concarneau. Laboratoire maritime:
— — Travaux scientifiques, tom. 2, fasc. 1—7.

Czernowitz. Franz Josephs-Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, W.-S. 1910/11, S.-S. 1911.
— — Personalstand 1910/11.
— — Inauguration des Rektors 1908/09, 1910/11.

Danzig. Westpreußischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen, Jahrg. 10, No. 1—4.
— — Zeitschrift, Heft 53.
— — Quellen und Darstellungen, Bd. 6, 1911.
— — Stephan, Straßennamen Danzigs, 1911.
— Technische Hochschule:
— — Schriften des Jahres 1910/11.
— — Personalverzeichnis S.-S. 1911, W.-S. 1911/12.
— — Programm 1911/12.
— Westpreußischer Botanisch-zoologischer Verein:
— — Bericht 31—33.

Darmstadt. Historischer Verein für das Großherzogtum Hessen:
— — Archiv für hessische Geschichte, Ergänzungsband 4, Heft 4, N. F., Bd. 7.
— — Quartalblätter, Bd. 4, No. 17—19.

Davenport. Academy of Sciences:
— — Proceedings, vol. 12, 223—240; Titel und Register zu vol. 11.

Davos. Meteorologische Station:
— — Wetterkarten 1910, November, Dezember; 1911, Januar–November.
— — Jahresübersicht der Beobachtungen 1910.
— — Monatsübersichten 1908—10.
Delft. Technische Hoogeschool:
— — 6 Dissertationen, 1910/11.
Denver (Colorado). Colorado Scientific Society:
— — Proceedings, vol. VIII, pag. 31—38, 247—256; vol. IX, pag. 403 bis 458; vol. X, pag. 1—38.
Dijon. Académie des Sciences:
— — Mémoires, sér. IV, tom. 11, 1907—10.
Dillingen. Historischer Verein:
— — Archiv für die Geschichte des Hochstifts Augsburg, Bd. 2, Lief. 5 und 6.
Douai. Société d'agriculture, sciences et arts:
— — Mémoires, 3e sér., tom. 9, 1903/04; tom. 10, 1905/06.
— Union géographique du Nord de la France:
— — Bulletin, année 31, trim. 4; année 32, trim. 1, 2.
Dresden. K. Sächsischer Altertumsverein:
— — Neues Archiv für sächsische Geschichte, Bd. 32, 1911.
— K. Sächsische Landes-Wetterwarte:
— — Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1907, 2. Hälfte; 1908, 1. Hälfte.
— Flora, K. Sächsische Gesellschaft für Botanik und Gartenbau:
— — Jahrg. 15, 1910/11.
— Redaktion des Journals für praktische Chemie:
— — Journal 1910, No. 22—24; 1911, No. 1—15, 18—22.
— Verein für Erdkunde:
— — Mitteilungen, Bd. II, Heft 1.
— — Mitgliederverzeichnis 1910.
— Verein für die Geschichte Dresdens:
— — Dresdener Geschichtsblätter, Bd. 18, 1909, 1—4; Bd. 19, 1910, 1—4.
— — Mitteilungen, Heft 21, 1909.
— — Dresdener Bildnisse, 1. Reihe.
Dublin. Royal Irish Academy:
— — Proceedings, vol. 29, sect. A, No. 1—4; sect. B, No. 1—6; sect. C, No. 1—8; vol. 31, No. 2, 4, 5, 10, 14, 22, 24, 37, 38, 39, 51, 52, 65.
— Royal Dublin Society:
— — The Economic Proceedings, vol. 2, No. 3, 4.
— — The Scientific Proceedings, vol. 13, No. 1—11.
Dünkirchen. Société Dunkerquoise:
— — Mémoires, tom. 50, 1909.

Dürkheim. Pollichia:
— — Mitteilungen, No. 26, 1910.
— Progymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11.

Easton (Pa.). American Chemical Society:
— — The Journal, vol. 33, No. 1—12; vol. 34, No. 1.
Edinburgh. R. College of Physicians:
— — Reports from the laboratory, vol. 10, 11, 1911.
— R. Botanic Garden:
— — Notes, No. 26, 27.
— Botanical Society:
— — Transactions and Proceedings, vol. 25.
— Royal Society:
— — Proceedings, vol. 30, part 7; vol. 31, part 1—4.
— — Transactions, vol. 44, part 1, 2, 4; vol. 47, part 3.
— Geological Society:
— — Transactions, vol. 9, part 5, 1910.
— Mathematical Society:
— — Proceedings, vol. 16—27 (1897—1908); vol. 29, 1910—11.
— — Mathematical Notes, No. 1—7.
— Royal Physical Society:
— — Proceedings, vol. 18, No. 3.
Eichstätt. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Dimpfl.
Eisenach. Karl Friedrich-Gymnasium:
— — Jahresbericht für 1910/11 mit 2 Beilagen.
Eisenberg. Geschichts- und altertumsforschender Verein:
— — Mitteilungen, Heft 26 und 27.
Eisleben. Verein für Geschichte und Altertümer der Grafschaft Mansfeld:
— — Mansfelder Blätter, Jahrg. 24, 1910.
Emden. Naturforschende Gesellschaft:
— — Jahresbericht 94, 1908/09.
Erfurt. K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften:
— — Jahrbücher, N. F., Heft 36.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde von Erfurt:
— — Mitteilungen, Heft 32.
Erlangen. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11.
— K. Universitätsbibliothek:
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11 in 4^0 und 8^0.

Florenz. Reale Accademia dei Georgofili:
— — Atti, ser. V, vol. 7, disp. 4; vol. 8, disp. 1—4.
— Biblioteca Nazionale Centrale:
— — Bollettino delle Pubblicazioni Italiane, No. 121—131.
— Società Asiatica Italiana:
— — Giornale, vol. 23, 1910.

Frankfurt a. M. Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 31, 1; Bd. 33, 1—3.
— — 41. Bericht, Heft 3, 4.
— Physikalischer Verein:
— — Jahresbericht 1909/10.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde:
— — Mitteilungen über römische Funde in Heddernheim 5.
— Römisch-germanische Kommission des Kais. Deutschen Archäologischen Instituts:
— — Kataloge west- und süddeutscher Altertumssammlungen, Bd. 1, Xanten 1911.

Frankfurt a. O. Naturwissenschaftlicher Verein für den Regierungsbezirk Frankfurt a. O.:
— — Helios, Bd. 26, 1910.

Frauenfeld (Schweiz). Thüringische Naturforschende Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Heft 19, 1910.

Freiburg i. Br. Breisgau-Verein Schau ins Land:
— — „Schau ins Land", 37. Jahrlauf, 2. Hälfte: 38. Jahrlauf, 1. und 2. Hälfte.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Berichte, Bd. 18, Heft 2; Bd. 19, Heft 1.
— Kirchengeschichtlicher Verein:
— — Freiburger Diözesanarchiv, Bd. 38, 1910.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11 in 4⁰ und 8⁰.

Freiburg i. S. Universitätsbibliothek:
— — Collectanea Friburgensia, N. Ser., fasc. 11. 12.

Friedberg i. H. Geschichtsverein:
— — Geschichtsblätter, Heft 3.

Friedrichshafen. Verein zur Geschichte des Bodensees:
— — Schriften, Heft 39.

Fürth. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Schiller.

Geneva. U. St. Agricultural Experimental Station:
— — Bulletin, No. 324—339.
— — Technical Bulletin, No. 14—18.

Genf. Conservatoire et jardin botanique:
— — Annuaire 13/14, 1909 et 1910.
— Redaktion des „Journal de chimie physique":
— — Journal, tom. 9, No. 1—4.
— Observatoire:
— — Observations, fortifications de St. Maurice, 1909.
— — Observations météorologiques pendant l'année 1909 et 1910.
— — Résumé météorologique de l'année 1907 – 10.
— Société d'histoire et d'archéologie:
— — Bulletin, tom. 3, livr. 5.
— Société de physique et d'histoire naturelle:
— — Mémoires, vol. 36, fasc. 4; vol. 37, fasc. 1, 2.
— — Compte rendu des séances 27, 1910.
— Universität:
— — Thèses 1910/11.
— — Actes du jubilé 1909.

Gent. Vlaamsche Academie van tal- en letterkunde:
— — Verslagen, Dezember 1910; Jan.-Nov. 1911.
— — Jaarboek 1911.
— — Bly, Onze Zeilvischsloepen, 1910.
— — De Cock-Teirlinck, Brab. Sagenboek, I, 1909.
— — Jan Bols, Brieven aan Willems, 1909.
— — Teirlinck I, 2. — Bruyker. — Fierens.
— Het Vlaamsch Natuur- en geneeskindig Congres:
— — Handelingen van het 14. Congres 1910.

Giessen. Oberhessischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen, N. F., Bd. 18.
— Gesellschaft für Erd- und Völkerkunde:
— — Geographische Mitteilungen aus Hessen, Heft 6, 1911.
— Gesellschaft für Natur- und Heilkunde:
— — Bericht, N. F., naturwissenschaftliche Abteilung, Register zu Bd. 1—34 (der alten Folge).
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11 in 4⁰ und 8⁰.

Glasgow. Geological Society:
— — Transactions, vol. 14, part 1.

Görlitz. Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Codex diplomaticus Lusatiae superioris, Heft 6.
— — Neues Lausitzisches Magazin, Bd. 86.

Görlitz. Naturforschende Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 27.

Göttingen. K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Göttingische Gelehrte Anzeigen 1911, No. 1—9.
— — Abhandlungen, N. F., a) Philol.-hist. Klasse, Bd. 9, No. 2; Bd. 12, No. 3; b) Math.-phys. Klasse, Bd. 8, No. 1—3; Bd. 9, No. 1.
— — Nachrichten, a) Philol.-hist. Klasse, 1910, Heft 1—4; 1911, Heft 1 bis 3 und Beiheft; b) Math.-phys. Klasse, 1910, Heft 5, 6; 1911, Heft 1—4; c) Geschäftliche Mitteilungen, 1910, Heft 2; 1911, Heft 1.

Gothenburg. K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Handlingar, Bd. 12, 1909.
— Högscola:
— — Årskrift, Bd. 15, 1909.

Granville (Ohio). Scientific Association of Denison University:
— — Bulletin, vol. 16, articles 1—17; Titel und Register zu 11—14.

Graz. Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen im S.-S. 1911, W.-S. 1911/12.
— — Verzeichnis der akademischen Behörden etc., 1911/12.
— Historischer Verein für Steiermark:
— — Zeitschrift, Jahrg. 8, Heft 1—4.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark:
— — Mitteilungen, Bd. 47, Heft 1, 2.

Greifswald. Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein:
— — Pommersche Jahrbücher, Bd. 11, 1910.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern:
— — Mitteilungen, 42. Jahrg., 1911.

Grenoble. Académie Delphinale:
— — Bulletin, V. sér., tom. III, 1909.
— — Table des matières zu sér. IV (1886—1906).
— Société de statistique des sciences naturelles et des arts industriels:
— — Bulletin, IV. sér., tom. 11 (37 de la collect.).
— Université:
— — Annales, tom. 22, 1910, trim. 2, 3 mit Suppl.; tom. 23, 1911, trim. 1.

Grimma. Fürsten- und Landesschule:
— — Jahresbericht 1910/11, 4°.

Groningen. Astronomisches Laboratorium:
— — Publications, No. 7, 9—11, 13, 17, 21—24.
— — Kapteyn, 1. und 2. report of the progress of plan of selected areas, 1911.

Guben. Gesellschaft für Anthropologie und Altertumskunde:
— — Niederlausitzer Mitteilungen, Bd. 8, Heft 1—8; Bd. 9, Heft 1—8; Bd. 10, Heft 1—8; Bd. 11, Heft 1—4.

Gunzenhausen. K. Realschule:
— — Jahresbericht 18, 1910—11.

Haag. Gesellschaft zur Verteidigung der christlichen Religion:
— — Programm für das Jahr 1910 und 1911.
— — Preisschrift 1911: Ad. Frey.
— Fondation pour l'internationalisme:
— — Eijkmann P. H., L'internationalisme scientifique, 1911.
— — K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie:
— — Bijdragen, VII. Reeks, deel I, afl. 3, 4; deel 65; deel 66, afl. 1—3.
— — Catalogus der Koloniale Bibl., 3. opgave.

Haarlem. Hollandsche Maatschappy der Wetenschappen:
— — Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, sér. II, tom. 15, livr. 5; sér. III A, tom. 1, livr. 1, 2; sér. III B, tom. 1, livr. 1, 2.
— — Gerth van Wijk, Dictionary of plantnames, 2 voll., 1910.
— Musée Teyler:
— — Archives, sér. II, vol. 12, partie 2.
— — Theologisch Tijdschrift, Jahrg. 9, No. 1—4.
— — Verhandelingen rakende den naturl. en geopenbaarden godsdienst, N. Ser., deel 17, 1911.

Habana. Sociedad economica de Amigos del Pais:
— — Revista bimestre Cubana, vol. 5, No. 4; vol. 6, No. 1—4.

Hall. K. K. Franz Joseph-Gymnasium:
— — Programm 1910/11.

Halle. K. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Naturforscher:
— — Leopoldina, Heft 47, No. 1—12 und Titel und Register.
— — Nova Acta, Bd. 92, 93, 1910, 4⁰.
— Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Bd. 64, Heft 4; Bd. 65, Heft 1—3.
— — Abhandlungen XII, 3, 4.
— Thüringisch-Sächsischer Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums:
— — Neue Mitteilungen, Bd. 24, Heft 3.
— — Jahresbericht für 1910/11.
— — Zeitschrift für Geschichte und Kunst, Bd. 1, Heft 1.

Halle. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11 in 4⁰ und 8⁰.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1911, W.-S. 1911/12.
— — Amtliches Verzeichnis des Personals etc. für S.-S. 1911, W.-S. 1911/12.
— — Akademische Preisverteilung, 1910.
— — Rektoratsrede 1910.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen u. Thüringen:
— — Zeitschrift für Naturwissenschaften, Bd. 82, No. 1—5.

Hamburg. Stadtbibliothek:
— — Jahrbuch der wissenschaftlichen Anstalten Hamburgs 26, 1908 und Beiheft 1—5; 27, 1909 und Beiheft 1—6.
— — Jahresbericht der Verwaltungsbehörden, 1909, 4⁰.
— — Staatshaushaltsberechnung 1909, 4⁰.
— — Entwurf des hamburgischen Staatsbudgets für 1911, 4⁰.
— — Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft, 1910, 4⁰.
— Mathematische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. V, Heft 1.
— Deutsche Seewarte:
— — Aus dem Archiv, Bd. 33, No. 3, 4; Bd. 34, No. 2, 3.
— — 33. Jahresbericht für das Jahr 1910, 4⁰.
— — Annalen der Hydrographie, 39. Jahrg., No. 1—12; 40. Jahrg., No. 1.
— — Dekadenberichte 1910, No. 34—36; 1911, No. 1—34.
— — Deutsche überseeische meteorologische Beobachtungen, Heft 19.
— — Tabellarische Reiseberichte, Bd. 8, 1910.
— — Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen, Jahrg. 32, 1., 4., 6. und 9. Nachtrag zum Katalog.
— Sternwarte:
— — Astronomische Abhandlungen, Bd. 2, 1910.
— Verein für Hamburgische Geschichte:
— — Mitteilungen, 30. Jahrg., 1910.
— — Zeitschrift, Bd. XV, 2; Bd. XVI, 1; Register zu Bd. 13—15.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Abhandlungen, Bd. 19, Heft 3—5.
— — Verhandlungen III, 17, 1909; III, 18, 1910.
— Verein für naturwissenschaftliche Unterhaltung:
— — Verhandlungen, Bd. 14, 1907—09.

Hanau. Geschichtsverein:
— — Hanauer Geschichtsblätter 1911, No. 1.

Hannover. Verein für Geschichte der Stadt Hannover:
— — Hannoverische Geschichtsblätter, 13. Jahrg., Heft 4; 14. Jahrg., Heft 1—4.
— Historischer Verein für Niedersachsen:
— — Zeitschrift, Jahrg. 1910, Heft 2, 4.

Hanoi. École Française d'Extrême Orient:
— — Bulletin, tom. 10, No. 3, 4; tom. 11, No. 1, 2.

Hartford. Geological and Natural History Survey:
— — Bulletin, No. 13, 16, 17.

Heidelberg. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der math.-naturwiss. Klasse, 1910, 1.
— — Sitzungsberichte, a) philol.-histor. Klasse, 1910, Abh. 13—16; 1911, Abh. 1—7; b) math.-naturw. Klasse, 1910, Abh. 25—32; 1911, Abh. 1—24.
— — Jahresheft 1909/10.
— Reichslimeskommission:
— — Der obergermanisch-rätische Limes des Römerreiches, Lief. 34, 1910; Lief. 35, 1911.
— Sternwarte:
— — Publikationen des Astrophysikalischen Instituts, Bd. III, No. 7, 8.
— Universität:
— — Schriften der Universität aus dem Jahre 1910/11 in 4⁰ und 8⁰.
— — Duhn, Gräberforschung.
— Naturhistorisch-medizinischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. XI, Heft 1, 2.

Helgoland. Biologische Anstalt:
— — Meeresuntersuchungen, N. F., Bd. 10, Abt. Helgoland, Heft 1; Bd. 12 und 13, Abt. Kiel.

Helsingfors. Finnische Akademie der Wissenschaften:
— — Annales, ser. A, vol. 2; ser. B, vol. 2, No. 2—10, vol. 3.
— — Sitzungsberichte 1909, II; 1910, I.
— — Documenta historica, Bd. 1, 2.
— Finnische Altertumsgesellschaft:
— — Suomen Museo XVII, 1910.
— Commission géologique de Finlande:
— — Bulletin, No. 23—30.
— Finnländische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Acta, tom. 38, 1, 3; tom. 40, 7, 8.
— — Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, Heft 70, 1, 2; Heft 72, 2—5; Heft 73, 1.
— — Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societatens Förhandlingar 53, 1910—11, A, B, C.
— — Finnländische hydrologisch-biologische Untersuchungen, No. 6.
— Institut météorologique central:
— — Observations météorologiques 1899/1900.
— — Meteorologisches Jahrbuch für Finnland, Bd. 4, 1904 und Beilage zu Bd. 3; Bd. 9, Teil 2, 1909.

Helsingfors. Suomen Historiallinen Seura:
— — Arkisto 22, 1, 2.
— Sällskapet för Finl. geografi:
— — Fennia, Bd. 28, 1909—10; Bd. 30, Text und Atlas.
— — Atlas de Finlande 1910.
— — Undersökning af förhållanden i Finlande 2, 1910.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11 in 4⁰ und 8⁰.
Hermannstadt. Verein für siebenbürgische Landeskunde:
— — Archiv, N. F., Bd. 37, Heft 2.
— Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften:
— — Verhandlungen und Mitteilungen, Bd. 60, 1910; Bd. 61, 1911, 1—3.
Hildburghausen. Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte:
— — Schriften, Heft 63.
Homburg i. Pf. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11.

Igló. Ungarischer Karpathen-Verein:
— — Jahrbuch, 38. Jahrg., 1911.
Indianapolis. Academy of sciences:
— — Proceedings, vol. 25, 1909.
Innsbruck. Ferdinandeum:
— — Zeitschrift, Heft 55, 1911.
— Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein:
— — Berichte, Bd. 32, 1908—10.
Irkutsk. Geographische Gesellschaft:
— — Izvěstija, tom. 41, 1910.
Ithaca. Journal of Physical Chemistry:
— — The Journal, vol. 14, No. 9; vol. 15, No. 1—8, gr. 8⁰.

Jassy. Societatea de stinti:
— — Annales scientifiques, tom. 6, fasc. 4; tom. 7, fasc. 1.
— Société des médecins et naturalistes:
— — Bulletin, année 24, 6—12; année 25, 1—10.
Jena. Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd. 47, Heft 1—3.
— Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde:
— — Zeitschrift, N. F., Bd. 20, Heft 2.
— Verlag der Naturwissenschaftlichen Wochenschrift:
— — Wochenschrift 1911, No. 1—53.
Johannesburg. Transvaal Meteorological Department Observatory:
— — Annual Report 1910.

Johannesburg. Geological Society of South Africa:
— — Transactions, vol. 13, 2; vol. 14, 1.
— — Proceedings, tom. 13, 1911.

Jurjew (Dorpat). Gelehrte Esthnische Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte 1910.
— — Verhandlungen, Bd. 22, Heft 2, 3.
— Naturforschende Gesellschaft bei der Universität:
— — Archiv, II. Serie, Biologische Naturkunde; Titel und Register zu Bd. 12.
— — Sitzungsberichte, vol. 19, No. 1—4; vol. 20, No. 1, 2.
— — Schriften, Bd. 20, 1911.
— — Katalog der Bibliothek, Teil 1 und 2.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11 in 4⁰ und 8⁰.
— — Učenija Zapiski (Acta et Commentationes), Jahrg. 18, 1910, No. 1–12.
— — Vorlesungsverzeichnis 1909, II; 1910, I, II; 1911, I, II.
— — Personenstand 1909, 1910.
— — Studien zur römischen Agrar- und Rechtsgeschichte, Heft 1, 1908.

Karlsruhe. Direktion der badischen Sammlungen für Altertums- und Völkerkunde:
— — Fundstätten und Funde, 2. Teil, 1911.
— Technische Hochschule:
— — Schriften 1910/11.
— Badische Historische Kommission:
— — Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins, N. F., Bd. 26, Heft 1—4, Heidelberg 1910.
— — Neujahrsblätter 1911 und 1912, Heidelberg.
— — Bericht über die 29. Plenarversammlung 1910.
— — Cahn Jul., Münz- und Geldgeschichte, 1. Teil, 1911.
— Zentralbureau für Meteorologie und Hydrographie:
— — Jahresbericht für das Jahr 1910.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 23, 1909—10.

Kasan. Société physico-mathématique:
— — Bulletin, IIe sér., tom. 16, No. 4; tom. 17, No. 1.
— Universität:
— — Učenija Zapiski, Bd. 77, Heft 12; Bd. 78, Heft 1–12.
— — Schriften des Jahres 1910 und 1911.

Kassel. Verein für hessische Geschichte und Landeskunde:
— — Zeitschrift, Bd. 45, 1911.
— — Mitteilungen 1910/11.

Kassel. Verein für Naturkunde:
— — Abhandlungen und Bericht 52, 1907—09.
Kaufbeuren. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11.
— Verein „Heimat":
— — Deutsche Gaue, Heft 221—240; Sonderheft 82 und 86.
Kempten. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 und Programm von Fischl.
Kew bei London. R. Botanical Garden:
— — Bulletin 1911, No. 1—10.
— — Appendix 1911, 2—4; 1912, 1.
Kiel. Gesellschaft für schleswig-holsteinische Geschichte:
— — Zeitschrift, Bd. 41, Leipzig 1911.
— K. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11 in 4⁰ und 8⁰.
— Anthropologischer Verein in Schleswig-Holstein:
— — Mitteilungen, Bd. 18, 1907; Bd. 19, 1911.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein:
— — Schriften, Bd. 13, Heft 2.
Kiew. Gesellschaft der Naturforscher:
— — Zapiski, tom. 11, No. 3, 4.
— Polytechnisches Institut Kaiser Alexander II.:
— — Chemische agronomische Abteilung, 10e année, livre 3, 4; 11e année, livre 1—4; 12e année, livre 1.
— Universität:
— — Izvěstija, Bd. 50, No. 10—12; Bd. 51, No. 1—8.
Klagenfurt. Landesmuseum:
— — Carinthia I, 100. Jahrg., No. 1—6.
— — Carinthia II, 1910, No. 5, 6; 1911, No. 1—4; Register zu 1811—1910.
— — Jahresbericht des Historischen Museums 1908 und 1909.
Klausenburg. Siebenbürgische Museums-Gesellschaft:
— — Erdélyi Múzeum, Bd. 27, Heft 6.
Köln. Historisches Archiv der Stadt Köln:
— — Mitteilungen aus dem Stadtarchiv, Heft 33.
— Gesellschaft für rheinische Geschichtskunde:
— — 30. Jahresbericht, 1910.
Königsberg. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft:
— — Schriften, Bd. 50, 1909; Bd. 51, 1910.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11.
— K. Sternwarte:
— — Astronomische Beobachtungen 43, II.

Konstantinopel. Institut d'histoire Ottomane:
— — Revue historique 1910, No. 6—10.
Kopenhagen. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Oversigt 1910, No. 6; 1911, No. 1—5.
— — Mémoires, Section des lettres, sér. 7, tom. 2, No. 1, 2; Section des sciences, sér. 7, tom. 6, No. 6—8; tom. 8, No. 5, 6; tom. 9, No. 1.
— Botanisk Haves Bibliothek:
— — Arbejder, No. 43, 51—64.
— Carlsberg-Laboratorium:
— — Comptes rendus des travaux, vol. 9, livre 2.
— — Nyrop, J. C. Jacobsen.
— Conseil permanent international pour l'exploration de la mer:
— — Rapports et Procès-verbaux, vol. 12, 1910; vol. 13, 1909—10.
— — Bulletin statistique des pèches maritimes, vol. 5, 1908.
— — Bulletin trimestriel des résultats . . . 1902—08, p. 1, 1910.
— — Publications de circonstance, No. 52, 53, 56—60.
— Gesellschaft für nordische Altertumskunde:
— — Aarböger, II. Raekke, Bd. 25.
— — Mémoires, N. Sér., 1910.
— — Nordiske fortitsminder, Bd. 2, Heft 1.
— Kommissionen for Havundersøgelser:
— — Meddelelser, Serie Plankton, Bd. I, No. 1—7, 9 und Appendix.
— — „ Hydrografi, Bd. II, No. 1.
— — Skrifter, No. 4—6.
— Observatorium:
— — Publikationer og mindre meddelelser, No. 4, 5.
— Dänische Biologische Station:
— — Report, No. 11—20.
Krakau. Akademie der Wissenschaften:
— — Katalog literaturij naukowej, tom. 10, No. 1—4.
— — Anzeiger (Bulletin international), 1. Classe de philologie, 1910, No. 3—5, 9, 10; 1911, No. 1—5; 2. Classe des sciences mathématiques, 1910, A, No. 8—10, B, No. 7—10; 1911, A, No. 1—9, B, No. 1, 3—8.
— — Materialy antropol., tom. 11, 1911.
— — Rocznik 1910.
— — Sprawozdania komisyi fizyograficzny, tom. 44, 1910.
— — Rozprawy, philolog.-philozoph. Kl., ser. II, tom. 20, No. 2.
— — „ histor. Klasse, tom. 53.
— — „ mathem. Abh., tom. 10, A und B.
— — Archivum do dziezów literaturij, tom. 11 und 12.
— — „ komisyi Prawniczej, tom. 8, fasc. 2, 1909.

Krakau. Akademie der Wissenschaften:
— — Biblioteka pisarzów polskich, No. 56—58.
— — Ubiory luda Polskiego, No. 2, 1909.
— — Acta rectoralia 2, 1909.
— — Tokarz, Warszawa przed wybuchem powstania 17, Kwietna 1794 roku. 1911.
— — Tretiak, Bohdan Zaleski 1802—31, 1911.
— — Finkel, Elekcya Zymunta I, 1910.
— — Sniadecki. — Tokavz.
— — Zoltowski, Metoda Hegla i zasady filozofii spekulatywnej, 1910.
— — Hryncewicz. — Wyprawa do Wilich. — Mochnacki. — Sobeski.
— Historische Gesellschaft:
— — Biblioteka, No. 27. 30.
— Numismatische Gesellschaft:
— — Wiadomosci 1911, No. 1—12.
Kyoto. Imperial University:
— — Memoirs of the College of Science and engineering, vol. 2, No. 12—14; vol. 3, No. 1—6.

Landau (Pfalz). K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Riedl.
Landsberg a. L. K. Realschule:
— — 33. Jahresbericht mit Beilage.
Landshut. Historischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 47, 1911.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — 19. Bericht, 1907—10.
Langres. Société historique et archéologique:
— — Bulletin, No. 83, 84.
Lausanne. Société d'histoire de la Suisse Romande:
— — Mémoires et documents, II. sér., tom. 8, 1910; tom. 9, 1911.
— Société Vaudoise des sciences naturelles:
— — Bulletin, No. 171—174.
Laval. Commission historique et archéologique:
— — Bulletin, 2e sér., tom. 26, No. 86, 87.
Le Havre. Société Havraise d'études diverses:
— — Recueil des publications, 76e année (1909), trim. 1—4.
Leiden. Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde:
— — Tijdschrift, deel 29, afl. 3, 4; deel 30, afl. 1—4.
— — Handelingen en Mededeelingen 1910/11.
— — Levensberichten 1910/11.
— s'Rijks Herbarium:
— — Mededeelingen 1910.

Leiden. Redaktion des „Museum“:
— — Museum, maandblad voor philologie en geschiedenis, Jaarg. 18, No. 5—12; Jaarg. 19, No. 1—4.
— Sternwarte:
— — Verslag 1908/10.
— Universitätsbibliothek:
— — Codices manuscripti I, 1910.

Leipzig. Redaktion der Beiblätter zu den Annalen der Physik:
— — Beiblätter 1910, Bd. 34, No. 24; 1911, Bd. 35, No. 1—23.
— — K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 28, No. 3—8, gr. 8⁰.
— — „ „ math.-phys. „ Bd. 32, No. 2—4.
— — Berichte über die Verhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 62, No. 6—11; Bd. 63, No. 1—5.
— — Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 62, No. 2—7; Bd. 63, No. 1—6.
— Verein für Erdkunde:
— — Mitteilungen für das Jahr 1910.
— — Wissenschaftliche Veröffentlichungen, Bd. 7, 1911.
— Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft:
— — Preisschriften, Bd. 40, 1911.

Le Mans. Académie de géographie botanique:
— — Bulletin, tom. 20, 1911, No. 255—265; tom. 21, 1912, No. 266.

Lemberg. K. K. Franzens-Universität:
— — Programm der Vorlesungen 1911/12.
— — Skład 1911/12.
— Towarzystwo dla popierania nauki polskiej:
— — Archiwum naukowe, Abt. II, tom. 1, No. 1—6; tom. 2, No. 1—3; tom. 3, No. 3, 4; tom. 4, No. 1—3.
— — Bulletin 10; Titel und Register zu 1—10.
— — Études sur l’histoire du droit polonais, Bd. 3, No. 3.
— — Monuments de la littérature polonaise, Bd. 1—5.
— Ševcenko-Gesellschaft:
— — Mitteilungen 97, 98, 101—103.
— — Sammelschriften der naturw.-ärztl. Sektion, T. 14.
— — Sammlung, ethnographische, T. 27—29.
— — Sbirnik filolog. sektii, T. 13.
— — Studien auf dem Gebiete der Sozialwissenschaften, Bd. 1, 1909.
— — Archiw ukrainsko-russkie, T. 6.
— — Chronik 38—44.
— — Matériaux d’ethnologie ukraino-ruthène, T. 13.
— — Beiträge zur ukrainischen Bibliographie, No. 2.

Lemberg. Verein für Volkskunde:
— — Lud, tom. 11—16 (je No. 1—4).

Lille. Société géologique du Nord:
— — Annales, vol. 38, 1909; vol. 39, 1910.
— — Mémoires, tom. 6, No. 1—3; tom. 7, No. 1.

Lincoln. University of Nebraska library:
— — Bulletin of the Univ. of Nebr., ser. XVI, No. 8.
— — Bulletin of agr. Experim. Station, No. 113—120.
— — Press Bulletin, No. 32, 33.
— — University studies, vol. 4, No. 1—4; vol. 10, No. 4.
— — Annual Report, vol. 23, 1909.

Lindenberg. K. Preuß. Aëronautisches Observatorium:
— — Ergebnisse der Arbeiten. Bd. 5, 1909; Bd. 6, 1911; 4⁰.

Linz. Museum Francisco-Carolinum:
— — 69. Jahresbericht, 1911.
— — Urkundenbuch des Landes o. d. Enns, Bd. 9, 1906 und Index.

Lissabon. Académie des sciences de Portugal:
— — Trabalhos, tom. 2, parte 1.
— — 3 kleine Broschüren.
— Commissão do serviço geologico:
— — Communicações, tom. 7, 1907—09; tom. 8, 1909—10.
— — Delgrado, Terrains paléozoiques du Portugal, 1911.
— Sociedade de geographia:
— — Boletim 28, No. 9—12; 29, No. 1—8.
— Société Portugaise des sciences naturelles:
— — Archivos, vol. 3, fasc. 1, 2.

Liverpool. School of Tropical Medecine:
— — Bulletin of Yellow Fever Bureau, No. 1—8.
— Literary and philosophical Society:
— — Proceedings, No. 71, sess. 1897—99.

Loewen. Université Catholique:
— — Annuaire 1911.
— — Programme des cours 1910/11.
— — Recueil de travaux, fasc. 25, 27, 28.
— Société scientifique de Bruxelles:
— — Annales 35, fasc. 1—4.

Lohr. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Thannheimer.

London. British Astronomical Association:
— — Journal XXI, No. 3—9; XXII, No. 1, 2.
— — Memoirs, vol. 17, part 4.
— — List of members, Sept. 1911.

London. Redaktion der Zeitschrift: Illuminating Engineer:
— — Illuminating Engineer 1911 (= vol. 4), No. 1—12.
— R. Institution of Great Britain:
— — Proceedings, vol. 19, 1 = 102; vol. 19, 2 = 103.
— Redaktion der Zeitschrift „Jon“:
— — Jon, vol. II, No. 1—6.
— Redaktion der Zeitschrift „Nature“:
— — Nature, No. 2150—2200.
— India Office:
— — Technical Art Series 1910, plates 1—6.
— Royal Society:
— — Proceedings, ser. A, 573—583; ser. B, 563—573.
— — Philosophical Transactions, ser. A, vol. 210; ser. B, vol. 201.
— — Year-Book 1911.
— — Report on the sleeping sickness commission, No. 6—10.
— — Bulletin of sleeping sickness Bureau, No. 4—32.
— — Catalogue of a collection of early printed books 1910.
— R. Society of Arts:
— — Journal, No. 3033—3086.
— R. Astronomical Society:
— — Monthly Notices, vol. 71, No. 2—9; Index zu vol. 53—70.
— — Memoirs, vol. 59, part 5; vol. 60, part 1, 2; 4°.
— Chemical Society:
— — Journal 1911, No. 580—590.
— — Proceedings, vol. 26, No. 365—379; vol. 27, No. 380—394.
— Farady Society:
— — Transactions, vol. 7, part 1, 2.
— Geological Society:
— — Quarterly Jonrnal, vol. 66, 1—4 (= No. 261—264); vol. 67, 1—3 (= No. 265—267).
— — Geological literature for the year 1909 and 1910.
— — List of members 1910 and 1911.
— — Charter and by-laws 1889.
— Society of Chemical Industry:
— — Journal, vol. 30, No. 1—24.
— — List of members 1911.
— Linnean Society:
— — Proceedings 1910/11.
— — The Journal, a) Botany, vol. 39, No. 273—275; b) Zoology, vol. 31, No. 208; vol. 32, No. 211, 212.
— — Transactions, a) Botany, vol. 7, part 3, 13—15; b) Zoology, vol. 9, part 10; vol. 10, part 4, 5, 9, 10; vol. 11, part 6, 7; vol. 13, part 1—4; vol. 14, part 1.

London. Linnean Society:
— — List of members 1910/11, 1911/12.
— Royal Microscopical Society:
— — Journal 1910, part 6; 1911, part 1—6.
— Zoological Society:
— — Proceedings 1910, part 4; 1911, part 1—4.
— — Transactions, vol. 18, part 4, 5.
— University:
— Catalogue of Dante Collection, Oxford 1910.
Lucca. Accademia delle scienze, lettere ed arti:
— — Memorie, vol. 1—5, 7—13, 1.
Ludwigshafen a. Rh. K. Oberrealschule:
— — Jahresbericht 1910/11 und Beilage.
Lüttich. Société géologique de Belgique:
— — Annales, tom. 36, livr. 4; tom. 37, livr. 4; tom. 38, livr. 1—3.
— Société de littérature wallone:
— — Annuaire, No. 23, 1910; No. 24, 1911.
— — Bulletin, tom. 53, part 2.
— — Bulletin du dictionnaire général, 6e année = 1911, No. 1, 2.
Lund. Kulturhist. förening och Museum:
— — Meddelanden, 2. årgang, 1895/96, 1—4; 3. årgang, 1897/98, 1—4.
— — Redogörelse för 1909/10 und 1910/11.
— — Das kulturhistorische Museum zu Lund, 1882—1911.
— Redaktion von „Botaniska Notiser":
— — Notiser, 1911, No. 1—6.
— Universität:
— — Acta Universitatis Lundensis, N. Ser., afd. I, 6, 1910; afd. II, 6, 1910.
— — Kyrkohistorisk Årskrift 1, 1900; 7, 1906; 8, 1907; 9, 1908; 11, 1910; Register zu 1900—1910.
— — Bibelforskaren 1910, 5, 6; 1911, 1—5.
— — Svenska synodalakkter, Heft 1—6; II. ser., Heft 2.
Luxemburg. Institut Grand-Ducal:
— — Publications (de la section historique) 1—57.
— Société des naturalistes Luxembourgeois:
— — Bulletin, N. F., Jahrg. 3, 1909.
Luzern. Historischer Verein der fünf Orte:
— — Geschichtsfreund, Bd. 65, 1910; Bd. 66, 1911 und Register zu Bd. 51—60.
Lyon. Académie des sciences, belles lettres et arts:
— — Mémoires, sér. III, tom. 11, 1911.
— Comité du Bulletin historique:
— — Bulletin historique, année 1, 1900; 11, 1910; 12, 1911 (= No. 1 jusque 71).

Lyon. Société d'agriculture, hist. nat. et arts utiles:
— — Annales 1909, gr. 8⁰.
— Société Linnéenne:
— — Annales, tom. 57, 1909.
— Université:
— — Annales, I. Sciences, Médecine, fasc. 25—30.
— — „ II. Droit, lettres, fasc. 21, 22.

Madison. Wisconsin Academy of sciences:
— — Transactions 1908/09, vol. 16, part 1, No. 1—6.
— Wisconsin Geological and Natural History Survey:
— — Bulletin, No. 21 und 22 = sciences series 6 und 7.
Madras. Kodaikanal and Madras Observatories:
— — Annual Report for 1909 und 1910.
— — Bulletin, No. 23, 24, 4⁰.
Madrid. R. Academia de ciencias exactas:
— — Revista, vol. 9, No. 5—12.
— — Anuario 1911.
— R. Academia de la historia:
— — Boletín, tom. 57, 6; tom. 58, 1—6; tom. 59, 1—4.
— Sociedad española de fisica y quimica:
— — Annales, anno 8, 1910; anno 9, 1911 (No. 69—88).
Mailand. R. Istituto Lombardo di scienze:
— — Rendiconti, ser. II, vol. 43, fasc. 17—20; vol. 44, fasc. 1—14.
— — Memorie, a) Classe di lettere, vol. 22, fasc. 4—6; b) Classe di scienze mat. et nat., vol. 21, fasc. 5.
— R. Osservatorio di Brera:
— — Pubblicazioni, No. 46 und 48.
— Società Italiana di scienze naturali:
— — Atti, vol. 49, fasc. 2—4; vol. 50, fasc. 1—3.
— — Memorie, vol. 7, fasc. 1.
— Società Storica Lombarda:
— — Archivio Storico Lombardo, ser. IV, anno 37, fasc. 28; anno 38, fasc. 29—31.
Mainz. Altertumsverein:
— — Mainzer Zeitschrift, Jahrg. 6, 1911.
Manchester. Literary and philosophical Society:
— — Memoirs and Proceedings, vol. 55, part 1—3.
— Victoria University-Library:
— — Publications, Historical series, No. 11.
— — „ Educational series, No. 4, 5.
— — „ Medical series, No. 13.
— — Ward, Leibniz as a Politician, 1911.

Manchester. Victoria University-Library:
— — Thorburn, The evolution of surgery, 1910.
— Museum:
— — Handbooks Publication 67—71.
Mannheim. Altertumsverein:
— — Mannheimer Geschichtsblätter, Jahrg. 1911, No. 1—12, 4⁰.
Mantua. R. Accademia Virgiliana:
— — Atti memorie 1868—1907, N. Ser., vol. 3, parte 2.
Marbach. Schwäbischer Schillerverein:
— — Rechenschaftsbericht 15, 1910/11.
Marburg. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11 in 4⁰ und 8⁰.
— Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaft:
— — Sitzungsberichte 1910.
Maredsous. Abbaye:
— — Revue Bénédictine, année 28, No. 1—4.
Marienwerder. Historischer Verein für den Regierungsbezirk Marienwerder:
— — Zeitschrift, Heft 31—49.
Marnheim (Pfalz). Realanstalt am Donnersberg:
— — Jahresbericht 1910/11.
Marseille. Faculté des sciences:
— — Annales, vol. 19, 1910.
Meiningen. Hennebergischer altertumsforschender Verein:
— — Neue Beiträge zur Geschichte des Altertums, Lief. 23, 1910; Lief. 24, 1911.
Meissen. Naturwissenschaftliche Gesellschaft Isis:
— — Zusammenstellung der Wetterwarte, 1910.
— Fürsten- und Landesschule St. Afra:
— — Jahresbericht für das Jahr 1910/11, 4⁰.
Melbourne. Commonwealth of Australia:
— — Onchocerca Gibsoni by Gilbruth 1911.
— Royal Society of Victoria:
— — Proceedings, N. Ser., vol. 23, part 2; vol. 24, part 1.
— — Transactions, vol. 1, fasc. 1, 2; vol. 2, fasc. 1, 2; vol. 3, fasc. 1; vol. 4.
Metten. K. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11.
Mexiko. Instituto geológico:
— — Parergones, tom. 3, No. 6—8.
— — Boletín, No. 27, 28.
— Comite Nacional Mexicano:
— — Boletín, tom. 1, No. 2, 6, 9.

Mexiko. Museo Nacional:
— — Anales, tom. II, No. 6—9.
— — Boletín 1911, Juli bis Okt.
— Observatorio meteorológico-magnético central:
— — Boletín mensual 1906—10; 1911, Jan. bis Juli.
— — Neujahrskarte 1911.
— Sociedad cientifica „Antonio Alzate":
— — Memorias y revista, tom. 27, No. 11, 12; tom. 28, No. 1—12; tom. 29, No. 1—6.
— Sociedad geológico Mexicano:
— — Boletin, tom. VII, 1.
— Sociedad Mexicana de historia natural:
— — La Naturaleza, III. ser., tom. 1, No. 2.
Middelburg. Seeländische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Archief 1910.
Milwaukee. Public Museum:
— — Bulletin of Wisconsin Natural History Society, vol. 8, No. 1—4; vol. 9, No. 1—3.
— — Bulletin of the Public Museum, vol. 1, part 1, 2.
Minneapolis. Minnesota Academy of Sciences:
— — Bulletin, vol. 4, No. 1, 2, 3—8, 10; Titel und Register zu 4.
— — Minnesota Plant studies 1—4.
— — Zoological series 2—4.
— — Annual Report 3, 1874.
— — „ „ of University 1876—80.
— — Minnesota botanical studies, vol. 1, 1894—98; 2d ser., part 1—6, 1898—1902; 3d ser., part 1—3, 1903—04, vol. 4, part 1, 1909.
— — Geology of Minnesota, vol. 1—3, 1; vol. 4—6.
— — Freeman, Minnesota plant diseases; v. Tiden, Minnesota Algae I.
Missoula. University Library of Montana:
— — Bulletin, Biological series, No. 15.
Modena. R. Accademia di scienze, lettere ed arti:
— — Memorie, ser. III, vol. 9, 1910.
— Società dei Naturalisti:
— — Atti, IV. ser., vol. 12, 1910 = 43.
Mölln. Verein für Geschichte des Herzogtums Lauenburg:
— — Archiv, Bd. 10, Heft 1.
Monaco. Musée et Institut océanographique:
— — Bulletin, No. 185—219; Titel und Register zu 156—190.
Montevideo. Museo nacional:
— — Anales, vol. VII, entrega 3; ser. II, tom. 1, entrega 3.
Montpellier. Académie de sciences et lettres:
— — Bulletin mensuel 1911, No. 1—12.
— — Mémoires, sect. de médecine, 2. ser., tom. 3, 1910.

Montpellier. Société archéologique:
— — Mémoires, II. sér., tom. 4, fasc. 1, 2.
— — Cartulaires d'Aniane, 3 voll., 1900—10.
Montreal. Numismatic and Antiquarian Society:
— — The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal, ser. III, vol. 7, No. 1, 2, 4; vol. 8, No. 1—3.
Moskau. Mathematische Gesellschaft:
— — Matematičeskij Sbornik, Bd. 27, Heft 4; Bd. 28, Heft 1.
— Lazarevsches Institut für morgenländische Sprachen:
— — Trudy, Bd. 5, 1, 2; Bd. 14, 18, 21, 22, 25, 26, 30—33, 35.
— Öffentliches und Rumanzewsches Museum:
— — Otčet, Jahrg. 1910.
— Société des amis d'histoire naturelle, d'anthropologie et ethnographie:
— — Izvěstija, tom. 119, 120, 1; tom. 121—123, 1.
— Société Impériale des Naturalistes:
— — Bulletin, année 1910, No. 1—4.
— — N. Mémoires, tom. 17, livr. 2.
— Universitätsbibliothek:
— — Učenija Zapiski, mediz. Abteilung, Bd. 17, 18.
Mount Hamilton (California). Lick Observatory:
— — Bulletin, No. 187—205.
— — Publications, vol. 9, 1907—11.
Mülhausen i. E. Historisches Museum:
— — Bulletin 34, année 1910.
München. Statistisches Amt:
— — Mitteilungen, Bd. 22, Heft 2, Teil 1, Heft 3; Bd. 23, Heft 1, Teil 3, Heft 2 und 3, Teil 2, Heft 4.
— — Jahresübersichten 1909, II; 1910, I.
— Ornithologische Gesellschaft:
— — Verhandlungen 1909, Bd. X.
— K. Ludwigs-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Wolf.
— K. Luitpold-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Mordstein.
— K. Maximilians-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Ruckdeschel II.
— K. Theresien-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Ries.
— K. Wilhelms-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Link.
— K. Wittelsbacher Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von F. Beck.

München. K. Realgymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11.
— K. Technische Hochschule:
— — Bericht über das Studienjahr 1909/10.
— — Programm für das Studienjahr 1911/12.
— — Personalstand im W.-S. 1910/11, S.-S. 1911, W.-S. 1911/12.
— — Schriften 1909/10.
— Hydrotechnisches Bureau:
— — Jahrbuch 1910, Heft 1, 2.
— — Schneedecke 1908/09—1910/11.
— — Veröffentlichungen, Donau 1909/11, Rhein-Elbe 1909/10.
— Metropolitan-Kapitel München-Freising:
— — Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1911.
— — Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising 1910 und 1911 mit Register.
— Oberbergamt:
— — Geognostische Jahreshefte, 23. Jahrg., 1910.
— K. Luitpold-Kreisoberrealschule:
— — 4. Jahresbericht, 1910/11.
— K. Maria Theresia Kreisrealschule:
— — 12. Jahresbericht, 1910/11.
— K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten:
— — Paul Steiner, Xanten, Frankfurt a. M. 1911.
— Universität:
— — Personalstand, S.-S. 1911, W.-S. 1911/12.
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11 in 4⁰ und 8⁰.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1911, W.-S. 1911/12.
— Ärztlicher Verein:
— — Sitzungsberichte, Bd. 20, 1910.
— Historischer Verein von Oberbayern in München:
— — Oberbayerisches Archiv, Bd. 53, Heft 3; Bd. 55, Heft 3, 4.
— — Altbayerische Monatschrift, Jahrg. 10, No. 3, 4.
— Meteorologische Zentralstation:
— — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreich Bayern während der Monate Nov. und Dez. 1910, Jan. bis Nov. 1911.
— — Veröffentlichungen: Deutsches meteorol. Jahrbuch (Bayern) für 1910.

Münnerstadt. K. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 und Programm von Rügamer.

Münster. Westfäl. Provinzialverein für Wissenschaft u. Kunst:
— — Jahresbericht 1909/10.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift für vaterländische Geschichte, Bd. 68, 1910.

Nancy. Académie de Stanislas:
— — Mémoires, année 160, VI. sér., tom. 7
— Société d'archéologique Lorraine et du Musée Historique Lorrain:
— — Bulletin 1911, No. 1—11.
— — Mémoires, tom. 60, 1910.

Nantes. Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France:
— — Bulletin, tom. 10, trim. 3, 4; Titel und Register zu tom. 10.

Narbonne. Commission archéologique:
— — Bulletin 1911, sem. 1.

Neapel. R. Istituto d'incorragiamento:
— — Atti 62, 1910.
— Società Reale di Napoli:
Accademia delle scienze fisiche e matematiche:
— — Rendiconto, vol. 17, fasc. 1—6.
— — Atti, ser. II, vol. 14, 1910.
— Stazione zoologica:
— — Mitteilungen, Bd. 20, Heft 2.

Neisse. Philomathie:
— — 35. Bericht, 1908/10.

Neuburg a. D. Historischer Verein:
— — Neuburger Kollektaneen-Blatt, 73. Jahrg., 1909.

Neuchâtel. Société des sciences naturelles:
— — Bulletin, tom. 37, 1909/10.

New Castle (upon-Tyne). Institute of mining and mechanical engineers:
— — Transactions, vol. 57, part 8; vol. 58, part 8; vol. 61, part 1—7.
— — Annual Report for the year 1911/12.

New Haven. American Oriental Society:
— — Journal, vol. 30, part 2—4; vol. 31, part 1—4; vol. 32, part 1.
— Connecticut Academy of arts and sciences:
— — Memoirs, vol. 2, 3, 1910.
— — Transactions, vol. 16, part 1—407.
— Yaly Observatory:
— — Report 1900—10.
— Yale University:
— — Yale Review, vol. 19, No. 4; Index zu vol. 1—19; N. Ser., vol. 1, No. 1, 2.
— — American Journal of Science, No. 181—193.
— — Report of the librarian 1909/10.

New-York. Academy of Sciences:
— — Annals, vol. 20, part 1, 2; vol. 21, part 1—6.
— American Philological Association:
— — Transactions and Proceedings, vol. 40, 1909.
— American Museum of Natural History:
— — Annual Report 42, 1910.
— — Anthropological Papers, vol. 5, part 2; vol. 6, part 2; vol. 7, part 1.
— — Journal, vol. 11, No. 1—8.
— — Bulletin, vol. 28, 29, 1910/11.
— — Memoirs, Tit. and Reg. zu vol. 3, 1900—07.
— — Guide Leaflet, No. 31—33.
— Botanical garden Library:
— — Bulletin, vol. 7, No. 25, 26.
— American Geographical Society:
— — Bulletin, vol. 42, No. 12; vol. 43, No. 1—12.
— Geological Society of America:
— — Bulletin, vol. 21, No. 4; vol. 22, No. 2.
— American Mathematical Society:
— — Bulletin, vol. 4—7, No. 61—100; vol. 17, No. 1—10, 191—200; vol. 18, No. 1—3, 201—203.
— — Transactions, vol. 12, No. 1—4.
— — Annual Register 1910 and 1911.
— — Catalogue of the library 1910.

Nimes. Académie:
— — Mémoires, tom. 32, année 1909 und Suppl. zu tom. 30 und 31.

Nizza. Observatoire de Nice:
— — Annales, tom. 12, 1910.
— Société des lettres, sciences et arts:
— — Annales, tom. 22, 1910.

Nürnberg. Naturhistorische Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 18, 1.
— K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Krauß II.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Groß.
— Germanisches Nationalmuseum:
— — Anzeiger 1910, Heft 1—4.
— — Mitteilungen 1910.
— Verein für Geschichte der Stadt:
— — 33. Jahresbericht, 1910.
— — Mitteilungen, Heft 19.

Oberlin (Ohio). Wilson Ornithological Club:
— — The Wilson Bulletin, vol. 22, No. 3, 4; vol. 23, No. 1, 2.
Odessa. K. Gesellschaft für Geschichte und Altertümer:
— — Zapiski 1850—89, 1893, 1894, 1896—1911.
— — Otschet 1909/10.
Orenburg (Rußland). K. Russische Geographische Gesellschaft:
— — Isvestja, Heft 22, 1911.
Orléans. Société archéologique de l'Orléanais:
— — Bulletin, tom. XV, No. 195—197.
Osnabrück. Verein für Geschichte und Landeskunde:
— — Mitteilungen, Bd. 35, 1910.
Ottawa. Department of Mines (Geological Survey Branch):
— — Summary Report 1907, 1908, 1910.
— — Mesozoic fossils, vol. 1, part 1, 2, 4.
— — Memoir, No. 1, 4—7, 9, 10, 11, 15, 16.
— — Map, No. 1066.
— — Publication, No. 973, 1006—1008, 1059, 1077, 1082, 1097.
— Department of Mines (Mines branch):
— — Bulletin, No. 1, 4, 5 (incl. map 71—77).
— — Publication, No. 32, 42, 58, 59, 69, 88, 93, 102.
— — Annual Report 1886, 1887, 1889—1903.
— — Report of Progressus 1863—66.
— Royal Society of Canada:
— — Proceedings and Transactions, ser. III, vol. 4.
Oxford. English Historical Review:
— — Review, vol. 26, No. 101—104.
— Radclyffe Observatory:
— — Observations 1900—05.

Paderborn. Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift, Bd. 68, 2.
Padua. R. Accademia di scienze, lettere ed arti:
— — Atti e memorie, anno 369 = 26.
— Accademia Veneto-Trentina Istriana:
— — Atti, Classi riunite, terza ser., anno 3, 1910.
Palermo. Circolo matematico:
— — Annuario 1911.
— — Rendiconti, tom. 31, fasc. 1—3; tom. 32, fasc. 1—3. Supplemento, vol. 5, No. 5, 6; vol. 6, No. 1—6.
— — Indici delle Pubblicazioni, No. 4, 1912.
— Società di scienze naturali ed economiche:
— — Giornale, vol. 28, 1911.

Palermo. Società Siciliana di scienze naturali:
— — Il Naturalista Siciliano, vol. 21, No. 9, 10.

Pará (Brasilien). Museo Goeldi:
— — Boletin, vol. 6, 1909.

Paris. Académie de médecine:
— — Bulletin 1910, No. 42; 1911, No. 1—43.
— — Mémoires 1912, No. 1.
— Académie des Sciences:
— — 1903—06, 1910, 1911.
— — Comptes rendus, tom. 152, No. 1—26; tom. 153, No. 1—26; tom. 154, No. 1, 2.
— Redaction „Cosmos“:
— — Cosmos, No. 1354—1407.
— École polytechnique:
— — Journal, II. sér., cahier 14, 15.
— Comité internat. des poids et mesures:
— — Travaux et mémoires, tom. 14, 1910.
— Institut général psychologique:
— — Bulletin, année 10, No. 5—6; année 11, No. 1—4.
— Ministère de l'instruction publ. et des beaux-arts:
— — Bulletin de la commission archéologique de l'Indochine, année 1910, livr. 1, 2.
— — Bulletin archéologique du comité des travaux historiques et scientifiques, année 1900—09; 1910, livr. 1, 2.
— Moniteur Scientifique:
— — Moniteur, No. 830—841, 4⁰.
— Musée Guimet:
— — Annales, Bibliothèque d'études, tom. 21.
— — Emile Guimet, 1910.
— Muséum d'histoire naturelle:
— — Bulletin, année 1910, No. 3—5; 1911, No. 1, 2, 6, 7.
— Revue des études d'histoire:
— — Revue, année 77, No. 73—75.
— Revue historique:
— — Revue, année 36, tom. 106—108; année 37, tom. 109, No. 1.
— Revue des questions historiques:
— — Revue, No. 177—181.
— Société d'anthropologie:
— — Bulletins et mémoires 1910, No. 3—6.
— Société astronomique de France:
— — Bulletin 1911, Janv.—Mars et No. 4—12; 1912, No. 1.

Paris. Société de géographie:
— — La Géographie, année 21, 1910, No. 5, 6; année 22, 1911, No. 1—6; année 23, 1912, No. 1—4.
— Société mathématique de France:
— — Bulletin, tom. 39, fasc. 1—3.
— Société météorologique de France:
— — Annuaire, tom. 58, 1910; tom. 59, Janvier—Juillet.
— Société de philosophie:
— — Bulletin, année 10, No. 8; année 11, No. 1—6.
— Société zoologique de France:
— — Mémoires, année 22, 1909.

Parma. R. Deputazione di storia patria:
— — Archivio storico, N. Ser., vol. 10, 1910.

Passau. K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1910/11.

Pavia. Società Pavese di storia patria:
— — Bolletino, anno XI, fasc. 1, 2.

Peradeniya. R. Botanic gardens:
— — Annals, vol. 4, part 7.
— — Circulars, vol. 5, No. 5—14.

Perth. Western Australian Geological Survey:
— — Bulletin, No. 39, 41.
— — Annual Report for 1910.

Peshawar (India). Arch. Survey of India:
— — Annual Report 1910/11.

St. Petersburg. Académie Impériale des sciences:
— — Travaux du Musée géologique, tom. IV, No. 3, 6, 7; tom. V, No. 1.
— — Bulletin 1911, No. 1—8.
— — Mémoires, Classe physico-mathémat., vol. 18, No. 9; vol. 24, No. 1, 10; vol. 25, No. 1—8.
— — Byzantina Chronika, Bd. XV, No. 2, 3.
— — Izvěstija, tom. 15, No. 3—4; tom. 16, No. 1, 2.
— Comité géologique:
— — Bulletins 1909, vol. 28, No. 9—10; 1910, vol. 29, No. 1—10.
— — Mémoires, N. Sér., No. 53—57, 59, 60, 66, 68.
— — Explorations scientifiques dans les regions de la Sibérie, 4 Hefte.
— Kais. Russische Archäologische Gesellschaft:
— — Zapiski, Orientalische Abteilung, tom. 18, No. 4 und Beilagen; tom. 19, No. 1—3.
— — „ Slavische Archäologie, tom. 8, No. 2.
— — „ Klassische Abteilung, tom. 6.

St. Petersburg. Kais. Russische Geographische Gesellschaft:
— — Izvěstija, tom. 46, 1910, No. 6—10; tom. 47, 1911, No. 1—6.
— — Otčet 1909 und 1910.
— Kais. Mineralogische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, II. Ser., Bd. 47, 1909.
— Physikalisch-chemische Gesellschaft an der Kais. Universität:
— — Zurnal, Physikalische Abteilung, tom. 42, Heft 9; tom. 43, Heft 1—8.
— — „ Chemische Abteilung, tom. 42, Heft 9; tom. 43, Heft 1—8.
— Société Impériale des Naturalistes:
— — Trudy: 1. Comptes rendus des sciences, vol. 40, fasc. 1, 2; vol. 41, fasc. 1—4.
2. Journal botanique, 3e année, 1908, No. 1—8.
3. Section de botanique, vol. 40, fasc. 1, 2; vol. 41, fasc. 1—4.
4. „ „ zoologie et de physiologie, vol. 38, 4; vol. 39, 2, partie 1, 2; vol. 39, 4; vol. 40, 2.
— Universitätsbibliothek:
— — Obozrenie 1910/11.
— — Otčet 1909 und 1910.
— — Protokoly zasědanij, No. 50—53, 55, 65.
— — Zapiski, No. 81, 91—98.
— — Scripta botanica, fasc. 26.
— — Biographisches Wörterbuch der Professoren der Universität, 2 Bde., 1896—98.
— — Gregorev, Die Universität Petersburg in den ersten 50 Jahren.
— Physikalisches Zentralobservatorium:
— — Annales 1907, part 1, 2, fasc. 1, 2.

Philadelphia. Academy of natural Sciences:
— — Proceedings, vol. 62, part 2, 3; vol. 63, part 1.
— — Journal, ser. II, vol. 14, part 2.
— College of pharmacy:
— — American journal of pharmacy, vol. 83, No. 1—12.
— Home for the training in speech of deaf children:
— — Report 2, 4—10.
— Franklin Institute:
— — Journal, vol. 169—172.
— Pennsylvania Museum and School of industrial art:
— — Bulletin, No. 33—36; Titel und Register zu vol. VIII.
— — Report 35, 1911.
— Geographical Society:
— — Bulletin, vol. 9, No. 1—4.

Philadelphia. Historical Society of Pennsylvania:
— — The Pennsylvania Magazine of History, vol. 34, No. 136; vol. 35, No. 137—140; vol. 36, No. 141.
— American Philosophical Society:
— — Proceedings, vol. 49, No. 197; vol. 50, No. 198, 199; vol. 51, No. 200, 201.
— University:
— — Publications Romanic languages, No. 1.
— — Contributions from the botanical laboratory, vol. 4, No. 1.
— — 13 Thesen, 1908—09; 19 Thesen, 1909—10.
— — Giesecke, American Commercial legislation before 1789.
— — Mac Farland, New England fisheries, 1911.
— — Sembower, Cotton, 1911.
— — Conlomb.

Pirmasens. K. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Merz.

Pisa. R. Scuola Normale Superiore:
— — Annali, Filos. e Filologia, vol. 22, 1910.
— Società Toscana di scienze naturali:
— — Atti, Processi verbali, vol. 19, No. 5; vol. 20, No. 1—3.
— Società Italiana di fisica:
— — Il nuovo Cimento, vol. 19, fasc. 11—12; ser. VI, anno 57, vol. 1, sem. 1, fasc. 1—6; vol. 2, sem. 2, fasc. 7—12.

Pistoia. R. Deputazione di storia patria:
— — Bulletino, anno XII, fasc. 3, 4.

Plauen. Altertumsverein:
— — Mitteilungen, 21. Jahresschrift, 1911.
— Gymnasium:
— — 22. Jahresbericht, 1910/11.
— — Festschrift zur Einweihung am 30. September 1911.

Plymouth. Marine Biological Association:
— — Journal, N. Ser., vol. 7, 1904—06; vol. 8, 1907—10; vol. 9, No. 1. 2.

Poitiers. Société academ. d'agriculture, belles-lettres, sciences et arts:
— — Bulletin, No. 370 (Juillet—Décembre), 1910.

Pola. Hydrographisches Amt der K. K. Kriegsmarine:
— — Veröffentlichungen, No. 1—18, 20—22, 25—31.

Portici. Laboratorio di zoologia:
— — Annali, ser. II, vol. 7, 1907.
— — Bolletino, vol. 5.

Porto (Portugal). Academia polytechnica:
— — Annaes scientificos, vol. V, No. 4; vol. VI, No. 1—3.

Posen. Historische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, 25. Jahrg., Heft 1 und 2.
— — Historische Monatsblätter, 11. Jahrg., No. 1—12.

Potsdam. Geodätisches Institut:
— — Veröffentlichungen, N. F., No. 46—52.
— — Veröffentlichungen des Zentralbureaus der internationalen Erdmessung, No. 21, 22, 1911.
— — Verhandlungen der 16. Konferenz für internationale Erdmessung 1909 in London und Cambridge.
— Astrophysikalisches Observatorium:
— — Photographische Himmelskarte, Bd. 21 und 22, 1.

Prag. Böhmische Kaiser Franz Joseph-Akademie:
— — Sbírka pramenů, Skupina 1, Rada I, číslo 9.
— — Věstník, Ročník 19, 1910.
— — Bulletin international, Classe des sciences mathématiques, année 15, 1910.
— — Almanach, Ročník 21, 1911.
— — Rozpravy, Třída I, číslo 40, 42, 43, 1911; Třída II, Ročník 18, 19; Třída III, číslo 33 und 35.
— — Simák, Handschriften der Nostizschen Bibliothek in Prag, 1911.
— — Bibliothek der griechischen und römischen Klassiker, číslo 18 und 19.
— Archäologische Kommission:
— — Topographie der historischen und Kunstdenkmäler, díl 24, 2, 3.
— — Bibliographie České Historie, díl V, svezak 1, 2.
— — Sbornik filologicky, Ročník 1.
— K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Jahresbericht für 1910.
— — Sitzungsberichte der philos.-hist. Klasse, 1910; der math.-naturwiss. Klasse, 1910.
— — Pracka, Untersuchung über den Lichtwechsel älterer Sterne I, 1910.
— — Vajs 1910.
— Landesarchiv des Königreichs Böhmen:
— — Mitteilungen, Bd. 3, 1910.
— — Die böhmischen Landtagsverhandlungen, Bd. 11, Teil 1.
— Lese- und Redehalle der deutschen Studenten:
— — 62. Bericht, 1910.
— Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos“:
— — Lotos, Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Bd. 58, No. 1—10.
— Museum im Königreich Böhmen:
— — Časopis musea království českeho, Bd. 85, No. 1—4.

Prag. Museum im Königreich Böhmen:
— — Památky archaeologické a mistopisné, díl 24, No. 4—6.
— — Bericht für 1910.
— Čechoslavisches Museum:
— — Nardopisny Vestnik Českoslavanský, Bd. 6, No. 1—10.
— K. K. Sternwarte:
— — Magnetische und meteorologische Beobachtungen, Jahrg. 70, 1909; Jahrg. 71, 1910.
— Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen:
— — Mitteilungen, Jahrg. 49, No. 1—4.
— Verein böhmischer Mathematiker:
— — Časopis, Ročník 39, číslo 1—5; Ročník 40, čílo 1, 2.
— — Sbornik, číslo 11, 1911.
— — Katalog der Bibliothek 1909.
— Deutsche Karl Ferdinands-Universität:
— — Die feierliche Inauguration des Rektors für das Jahr 1910/11.
— — Ordnung der Vorlesungen, S.-S. 1911, W.-S. 1911/12.
— — Personalstand 1911/12.
Princeton (N. J.). University Observatory:
— — Contributions, No. 1, 1911.
Pulkowa. Nikolai-Hauptsternwarte:
— — Publications, vol. 16, fasc. 1, 2; vol. 18, fasc. 2—4.
Pusa (Bengal). Agricultural Research Institute:
— — Annual Report of the Department of agriculture 1909/10.

Ravenna. Bolletino storico Romagnolo:
— — Felix Ravenna, No. 1—3.
Regensburg. K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht für 1910/11 und Programm von Keiper.
— Historischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 61, 1910.
Reims. Académie:
— — Travaux, année 1909/10, 127, 128.
Reno (Nevada). University:
— — Bulletin, vol. 3, No. 4; vol. 4, No. 1, 4; vol. 5, No. 1.
Riga. Gesellschaft für Geschichte und Altertumskunde der Ostseeprovinzen:
— — Mitteilungen, Bd. 21, Heft 1.
— — Sitzungsberichte 1910.
— Naturforscherverein:
— — Arbeiten, N. F., Heft 12 und 13.
— — Korrespondenzblatt 53, 1910; 54, 1911.

Rio de Janeiro. Biblioteca nacional:
— — Annaes, vol. 29, 1907.
— — Kosmos, anno 5, No. 3—8, 12; anno 6, No. 4.
— — do Paco, Catalogo 1910.
— — Relatorio 1909.
— — Senna, Vianna.
— Instituto historico e geografica Brazileiro:
— — Revista 59.
— Observatorio:
— — Annuario 27, 1911.
— — Boletim mensal, April—Dez. 1908.
Rochefort. Société de géographie:
— — Bulletin, tom. 32, 1910, No. 1—4; tom. 33, 1911, No. 1.
Rochester. Academy of science:
— — Proceedings, vol. 5, p. 1—38.
Rom. Reale Accademia dei Lincei:
— — Annuario 1911.
— — Atti, ser. V, Notizie degli scavi di antichità, vol. 7, fasc. 9—12; vol. 8, fasc. 1—6.
— — Atti, ser. V, Rendiconti, Classe di scienze fisiche, vol. 19, 2. sem., No. 11, 12; vol. 20, No. 1—12; vol. 21, 2. sem., No. 1—11.
— — Atti, Rendiconti, Classe di scienze morali, ser. V, vol. 19, fasc. 7—12; vol. 20, fasc. 1—6.
— — Memorie, Classe di scienze fisiche, ser. V, vol. 8, fasc. 7—17.
— — Memorie, Classe di scienze morali, vol. 14, fasc. 5, 6.
— — Atti, Rendiconto dell' adunanza solenne, 1911, vol. 2.
— — Cinquanta Anni di storia Italiana, vol. 1, 2, 1911.
— Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei:
— — Atti, anno 64, sessione 1—7.
— — Memorie, vol. 7—28.
— R. Comitato geologico d'Italia:
— — Bollettino, anno 1909, No. 3; 1910, No. 3, 4; 1911, No. 1, 2.
— — Memorie, vol. 5, parte 2.
— Kais. Deutsches Archäologisches Institut:
— — Mitteilungen, Bd. 25, No. 4; Bd. 26, No. 1—4; Bd. 27, No. 1, 2.
— — Jahresbericht für 1910.
— K. K. Österreichisches Historisches Institut:
— — Publikationen, Bd. 2, 1912.
— British and American Archaeological Society:
— — Journal, vol. 4, No. 4.
— — Mills, The Solace of pilgrims, 1911.
— Società italiana per il Progresso delle Scienze:
— — Atti, Riunione 4, 1910.

Rom. R. Società Romana di storia patria:
— — Archivio, tom. 33, fasc. 3, 4; tom. 34, fasc. 1, 2.
— Specola Vaticana:
— — Specola Astronomica Vaticana, No. 1, 2.
— R. Ufficio centrale meteorologico italiano:
— — Annali, ser. II, vol. 20, parte 3, 1898; vol. 30. parte 1, 1908.
Rosenheim. Gymnasium:
— — Jahresberichte für 1910/11 mit Programm von Hoppichler.
Rossleben. Klosterschule:
— — Jahresbericht 1910/11.
Rostock. Naturforschende Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte und Abhandlungen, N. F., Bd. 1, 2, 1909—10.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11 in 4⁰ und 8⁰.
Rotterdam. Bataafsch genootschap der proefondervuidelijke Wijsbegeerte:
— — Nieuwe Verhandelingen, II. Reihe, VI. deel, stuk 3.
Rouen. Académie de sciences et lettres:
— — Précis analitique des travaux 1908/09.
Rovereto. R. Accademia di scienze degli Agiati:
— — Atti, ser. III, vol. 16, fasc. 3, 4; vol. 17, fasc. 1, 2.

Saarbrücken. Historischer Verein für die Saargegend:
— — Heft 5—11.
Saargemünd. Gymnasium mit Realabteilung:
— — 40. Jahresbericht, 1910/11.
— Saint Andrews University:
— — 500 Anniversary, 1911.
Saintes. Commission des arts et monuments historique:
— — Recueil, tom. 18, No. 11, 12.
Saint-Brieuc. Association Bretonne:
— — Bulletin archéologique et agricole, III. sér., tom. 29 (Clisson 1910).
St. Etienne. Société d'agriculture, sciences etc.:
— — Annales, tom. 30, livr. 2, 3.
Saint Louis. Academy of Science:
— — Transactions, vol. 18, No. 2—6; vol. 19, No. 1—10.
— Missouri Botanical Garden:
— — Report 21, 1910.
Salzburg. K. K. Staatsgymnasium:
— — Programm für das Jahr 1910/11.
— Gesellschaft für Salzburgische Landeskunde:
— — Mitteilungen 50, 1910; 51, 1911; Index zu 41—50.

Salzwedel. Altmärkischer Verein für vaterländische Geschichte:
— — Jahresbericht 37, 1910; 38, 1911.
St. Gallen. Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jahrbuch für das Jahr 1910.
San Fernando. Instituto y Observatorio de marina:
— — Anales, Sec. 2a, Observ. meteorologie 1909.
San Francisco. California Academy of Sciences:
— — Proceedings, ser. IV, vol. 1, pag. 7—288.
Santiago de Chile. Observatorio astronomico:
— — Publicaciones, No. 1.
Sao Paulo. Museo Paulista:
— — Revista, vol. 8, 1911.
— — Notas preliminares, vol. 1, fasc. 2.
— Sociedade scientifica:
— — Revista, vol. 5, Jan.—Aug.
Sarajevo. Bosnisch-Herzegowinische Landesregierung:
— — Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1909.
— Landesmuseum:
— — Glasnik 23, 1911, No. 1—3.
Schweinfurt. K. Realschule:
— — Jahresbericht 1910/11.
Schwerin. Verein für mecklenburgische Geschichte:
— — Jahrbücher und Jahresberichte, Jahrg. 76, 1910.
— — Mecklenburgisches Urkundenbuch, Bd. 23, 1396—99.
Semur en Auxois. Société des sciences historiques et naturelles:
— — Bulletin, tom. 36, années 1908/09.
Shanghai. Nord China Branch of the Asiatic Society:
— — Journal, vol. 42, 1911.
Siena. R. Accademia dei fisiocritici:
— — Atti, ser. V, vol. 2, No. 7, 8.
— Deputazione de la Storia patria:
— — Bulletino Senese di storia patria, anno XVIII, fasc. 2, 3.
Simla. Indian meteorological department:
— — India Weather Review 1909.
— — Monthly Weather Review, Titel und Register zu 1910, sept.—dec.; 1911, Jan.—Aug.
— — Report of the administration 1910/11.
— — Rainfall dater of India 21, 1909.
Sofia. Société archéologique Bulgare:
— — Bulletin 2, fasc. 1.
— Universität:
— — Annuario (Godišnik) 5, 1908/09, III et Partie officielle; 6, 1909/10. II, III et Partie officielle.

Sousse. Société archéologique:
— — Bulletin, No. 12, 13.

Spalato. K. K. Archäologisches Museum:
— — Bulletino di archaeologia e storia Dalmata 32, 1909, No. 1—12.

Speier. Historischer Verein der Pfalz:
— — Mitteilungen, Bd. 31, 1911.

Stade. Verein für Geschichte und Altertümer etc.:
— — Stadtarchiv, N. F., Heft 1, 1911.

Stavanger. Museum:
— — Aarshefte for 1910.

Stettin. Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Altertumskunde:
— — Baltische Studien, N. F., Bd. 14.
— — Monatsblätter 1910, No. 1—12.

Stockholm. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Les prix Nobel en 1908—10.
— — Handlingar, Bd. 45, No. 8—12; Bd. 46, No. 1—11.
— — Arkiv för Zoologi, Bd. VII, Heft 1.
— — Arkiv för Kemi, Bd. III, Heft 6; Bd. IV, No. 1, 2.
— — Arkiv för Botanik, Bd. X, No. 1—4.
— — Arkiv för Matematik, Bd. VI, Heft 2—4; Bd. VII, Heft 1, 2.
— — Meddelanden från Nobel-Institut, Bd. 2, No. 1.
— — Eugenia-Expedition, Heft 15, 16.
— — Festschrift zum Jubiläum 1910.
— — Arsbok for år 1910, Beilage 2, 3; 1911.
— — Meteorologiska Jakttagelser i Sverige, vol. 50, 2 mit Bihang 1; vol. 51, 52 mit Appendix.
— — Astronomiska Jakttagelser i Sverige, vol. 9, No. 3, 4.
— — Lefnadsteckningar.
— K. Vitterhets Historie och Antikvitets Akademie:
— — Fornvännen, Årgangen 5, 1910.
— — Antiqvarisk, Tidskrift 19, 1911.
— — Sophus Bugge, Runenstein v. Rök, 1910.
— K. Landtbruks-Akademien:
— — Handlingar och tidskrift, Bd. 49, 1910, No. 8; Bd. 50, 1911, No. 1—8.
— K. Bibliothek:
— — Akzessionskatalog 23—25, 1908—10.
— Entomologiska föreningen:
— — Tidskrift, Jahrg. 31, 1910, No. 1—4; Jahrg. 32, 1911, No. 1-4 und Register zu 11—30.
— Geologiska Förening:
— — Förhandlingar, Bd. 32, No. 7; Bd. 33, No. 1—6; Register zu 22—31.

Stockholm. Nationalekonomiska föreningen:
— — Förhandlingar 1910.
— Schwedische Gesellschaft für Anthropologie und Geographie:
— — Ymer, Jahrg. 30, Heft 4; Jahrg. 31, Heft 1, 2.
— Literatursälskapet:
— — Skrifter 17, No. 13; 21, No. 3; 1, 31 = Samlaren 31.
— Nordiska Museet:
— — Fataburen 1910, Heft 1—4.
— Reichsarchiv:
— — Meddelanden, N. F. I, No. 25—27.
— Sveriges geologiska Undersökning:
— — Årsbok 3, 1909.
— — Öfversiktskartor, No. 6, 7.
— — Spezialkartor, No. 218—228.
— — Afhandlingar och uppsatser, No. 4, 5, 7.

Stonyhurst. College Observatory:
— — Results of Meteorological and Magnetical Observations, 1909.

Strassburg. K. Hauptstation für Erdbebenforschung:
— — Seismometrische Aufzeichnungen 1910, No. 51, 52; 1911, No. 1 bis 16, 18—48.
— — Monatliche Übersicht 1910, Juni—Dezember; 1911, Januar.
— — Bulletin sismique de la station internat. de Reykjavik 1910, 4—12.
— Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Schriften 1—9, 11.
— Kais. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11 in 4⁰ und 8⁰.
— — Stiftungsfest am 30. April 1910.

Straubing. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Lederer II.
— Historischer Verein:
— — Jahresbericht 11, 1908; 12, 1909; 13, 1910.

Stuttgart. Württemberg. Kommission für Landesgeschichte:
— — Vierteljahreshefte für Landesgeschichte, N. F., Jahrg. 19, 1910, Heft 3, 4; Jahrg. 20, 1911, Heft 1.
— — Württemberger Geschichtsquellen, Bd. 11.
— K. Württembergisches Statistisches Landesamt:
— — Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde, Jahrg. 1909, Heft 2; Jahrg. 1910, Heft 1, 2.

Sydney. Australian Museum:
— — Records, vol. 9, No. 2.
— — Memoirs, No. 2, 3, part 1—5; No. 4, part 1—16.

Sydney. Linnean Society of New South Wales:
— — Proceedings, vol. 35, part 3, 4; vol. 36, part 1.
— R. Society of New South Wales:
— — Journal and Proceedings, vol. 43, part 3, 4; vol. 44, part 1—3; vol. 45, part 1.
— Geological Survey of New South Wales:
— — Memoirs, Geology, No. 6, 1908.
— — „ Paläontology, No. 4, 5, 1909/10.
— — Annual Report for 1910.
— — Mineral resources of the Western Coalfield, Maps and sections, No. 13.

Tacubaya. Observatorio astronomico nacional:
— — Annuario, año 31, 32, 1910/11.
Teddington. National Physical Laboratory:
— — Report for the year 1910.
Thorn. Copernikus-Verein für Wissenschaft und Kunst:
— — Mitteilungen, Heft 18.
Tiflis. Physikalisches Observatorium:
— — Beobachtungen für die Jahre 1899—1904.
Tokyo. Imp. Earthquake Investigation Committee:
— — Bulletin, vol. 4, No. 2; vol. 5, No. 1.
— Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens:
— — Mitteilungen, Bd. 13, Teil 1—3, Titel und Register.
— Geographical Society:
— — Journal, vol. 22, No. 259—270.
— Kriegsministerium:
— — Mori, Japan und seine Gesundheitspflege.
— — „ Sanitätsstatistik der japanischen Armee.
— — „ Statistik der Beri-Beri-Kommission.
— Mathematico-Physical Society:
— — Proceedings, 2d ser., vol. 5, No. 20, 21; vol. 6, No. 1—9.
— Imp. Geological Survey of Japan:
— — Memoirs, vol. 1, No. 1, 2.
— — Geol. Map of Korea 1910.
— — Geology of empire, 4 Karten, Text: Zone 6, Kol. V Matsuyama.
— Kais. Universität:
— — The Journal of the College of Science, vol. 27, No. 15—20; vol. 28, No. 1—7; vol. 30, No. 1; vol. 31, No. 1 und 5.
— — The Journal of the College of Agriculture, vol. 2, No. 4; vol. 3, No. 1.
— — Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät, Bd. 9, No. 2, 3.

Toronto. Canadian Institute:
— — Transactions, vol. 9, part 1.
— R. Astronomical Society of Canada:
— — Journal, vol. 4, No. 6; vol. 5, No. 1—5.
— University:
— — Studies, Review of Historical publications, vol. 15, 1910.
— — Biological Series, No. 9.
— — Papers from Chemical laboratories, No. 90—93.
— — Papers from Physical laboratories, No. 36.
— — Patholog. Series, No. 1—13.
Toulouse. Académie:
— — Mémoirs, X. sér., tom. 9.
— Université:
— — Bulletin populaire de la pisciculture, N. Sér., No. 10, 1909.
— — Annales du Midi, No. 86.
— — Bibliothèque méridionale, I. sér., tom. 12—14; II. sér., tom. 9, 10, 13.
— Société de geographie:
— — Bulletin, année 29, 1910, No. 1, 3, 4, Titel und Register.
Trient. Biblioteca e Museo comunale:
— — Archivio Trentino, anno 25, fasc. 4; anno 26, fasc. 1.
Triest. K. K. Maritimes Observatorium:
— — Rapporto annuale, vol. 24, 1911.
Tromsö. Museum:
— — Aarshefter 31, 32, 1908 und 1909.
— — Aarsberetning for 1909.
Trondhjem. K. Norske Videnskabens Selskab:
— — Skrifter 1909.
Troppau. Kaiser Franz Joseph-Museum für Kunst und Gewerbe:
— — Zeitschrift für Geschichte und Kulturgeschichte Österreichisch-Schlesiens, Jahrg. 5, Heft 3, 4; Jahrg. 6, Heft 1, 2.
Tübingen. Universität:
— — Rede von Bühler, 1911.
— — Doktorenverzeichnis der philosophischen Fakultät 1908.
Tunis. Institut de Carthage:
— — Revue Tunisienne, No. 81—90.
Turin. R. Accademia delle scienze:
— — Atti, vol. 46, No. 1—15.
— — Memorie, ser. II, tom. 61, 1911.
— — Osservazioni meteorol. nell' anno 1910.
— Accademia d'agricoltura:
— — Annali, vol. 53, 1910.
— Museo di zoologia ed Anatomia comparata:
— — Bolletino, vol. 25, 1910, No. 616—633.

Uccle. Observatoire:
— — Annales astronomiques, tom. 12, fasc. 2; tom. 13, fasc. 1.
— — Annales de la physique du globe, tom. 5, 1.
— — Annuaire astronomique 1911, 1912.
— — Annuaire météorologique 1911.
— La Revue Congolaise:
— — Revue, année 1, No. 4; année 2, No. 1, 2.

Upsala. Vetenskaps societeten:
— — Nova acta, ser. IV, vol. III, fasc. 2.
— Human. Vetenskaps Samfunder:
— — Skrifter, Bd. 11, 12.
— K. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11 in 4⁰ und 8⁰.
— — Arbeten, No. 9, 10.
— — Linné I, 5.
— — Eranos, Acta philol. Suecana, vol. 10, fasc. 4; vol. 11, fasc. 1, 2.
— Meteorologisches Observatorium der Universität:
— — Bulletin mensol., vol. 42, 1910.

Urbana. Illinois State Laboratory of Natural History:
— — Bulletin, vol. 9, art. 1—4.

Utrecht. Historisch Genootschap:
— — Bijdragen en Mededeelingen, deel 32.
— — Werken, ser. III, No. 27, 29.
— Provincial Utrechtsch Genootschap:
— — Aanteekeningen 1911.
— — Verslag 1911.
— Institut Royal Météorologique des Pays-Bas:
— — Mededeelingen en Verhandelingen, No. 11.
— — Overzicht, Jahrg. 8, 1911, No. 1—11.
— — Onweders 1908, deel 29.
— Physiologisches Laboratorium der Hoogeschool:
— — Onderzoekingen, Reeks V, No. 12.

Vaduz. Historischer Verein für das Fürstentum Lichtenstein:
— — Jahrbuch, Bd. 10, 1910.

Veglia. Altslavische Akademie:
— — Publikacije Staroslavenske akademije na krku; Starohrvatska glagolske knjcžnica kniga 1, 1911.

Vendôme. Société archéologique scientifiquc et littéraire:
— — Bulletin, tom. 49, 1910.

Venedig. Biblioteca di S. Marco:
— — Catalogo dei Codici Marciani Italiani, vol. II, classi 4 e 5, 1911.

Venedig. R. Istituto Veneto di scienze:
— — Atti, tom. 67, disp. 6—10, 1907/08; tom. 68, disp. 1—10, 1908/09; tom. 69, disp. 1—10, 1909/10; tom. 70, disp. 1—8, 1910/11.
— — Memorie, vol. 28, No. 2—6.
— Ateneo Veneto:
— — Ateneo Veneto, anno 31, vol. 1, fasc. 2, 3; vol. 2; anno 32, vol. 1, 2; anno 33, vol. 1, 2; anno 34, vol. 1; anno 35, vol. 2, fasc. 1.
— Comitato talassografico Italiano:
— — Bolletino trimestrale, No. 7—12.
Verona. Accademia di Scienze:
— — Atti e Memorie, ser. IV, vol. 11.
— — Osservazione meteorol. . . . dell' anno 1910.
— Museo civico:
— — Madonna Verona, fasc. 16—19.

Warschau. Prace matematijczno-fizyczne:
— — Prace, tom. 21, 1910.
— Towarzystwo Naukowe [Wissenschaftliche Gesellschaft]:
— — Sprawozdania [Sitzungsberichte], Jahrg. 3, Heft 8, 9; Jahrg. 4, Heft 1—7.
— — Prace, II. Kl. Anthropolog., Geschichte und Philosophie, No. 4—5; III. Kl. Mathematik und Naturwissenschaften, No. 3.
Washington. Academy of Sciences:
— — Journal, vol. 1, No. 1—10.
— American forestry association:
— — American forestry, vol. 17, No. 2.
— Bureau of American Ethnologie:
— — Bulletin, No. 30, part 2; No. 37, 40, 1; No. 43—45, 49—51.
— U. S. Department of Agriculture:
— — Yearbook 1909, 1910.
— Carnegie Institution:
— — Annual Report of the director of department of histor. research, 1909.
— — List of Publications, 1. May 1911.
— Bureau of Education:
— — Report of the commissioner 1909/10, vol. 1, 2.
— Smithsonian Institution:
— — Miscellaneous Collections, No. 1944, 1946, 1947, 1949, 1988, 1989, 2003—2012, 2014, 2015, 2053.
— — Publications, No. 2013.
— U. S. National Museum:
— — Contributions to the U.S. National Herbarium, vol. 13, part 6—11; vol. 14, part 1, 2; vol. 15.

Washington. U. S. National Museum:
— — Bulletin, vol. 73—76.
— — Report for the year 1909/10.
— — Proceedings, vol. 37—39.
— U. S. Naval Observatory:
— — Synopsis of the Report for the 1909/10.
— — Star list of American Ephemeris for 1911.
— — Publications, 2d ser., vol. 6, 7, 1911.
— Surgeon Generals Office U. S. Army:
— — Index catalogue, vol. 5—15.
— American Jewish Historical Society:
— — Publications, No. 19.
— U. S. Coast and Geodetic Survey Office:
— — Report of the Superintendent 1909/10.
— U. S. Geological Survey:
— — Annual Report 31, 1909/10.
— — Professional Paper, No. 72, 4⁰.
— — Water Supply Paper, No. 240, 253—260, 262, 264, 265, 270, 274.
Weihenstephan. K. Akademie für Landwirtschaft und Brauerei:
— — Bericht 1910/11.
Weimar. Großherzogliche Bibliothek:
— — Zuwachs in den Jahren 1908—10.
— Thüringischer Botanischer Verein:
— — Mitteilungen, N. F., Heft 28.
Wernigerode. Harzverein für Geschichte:
— — Zeitschrift, Jahrg. 43, Heft 4; Jahrg. 44, Heft 1—3.
Wien. Kais. Akademie der Wissenschaften:
— — Sitzungsberichte, a) der philos.-histor. Klasse, Bd. 164, Abh. 5, 6; Bd. 165, Abh. 2—6; Bd. 166, Abh. 1, 4, 6; Bd. 167, Abh. 1, 2, 4—7; Bd. 168, Abh. 1, 2, 4; Bd. 169, Abh. 1; b) der math.-naturwiss. Klasse, Abt. I, Bd. 119, Heft 6—10; Bd. 120, Heft 1—6; Abt. IIa, Bd. 119, Heft 7—10; Bd. 120, Heft 1—7; Abt. IIb. Bd. 119, Heft 7, 8; Bd. 120, Heft 1—6; Abt. III, Bd. 119, Heft 6—10; Bd. 120, Heft 1—3.
— — Denkschriften der philos.-histor. Klasse, Bd. 53, 3; Bd. 54, 2, 3; math.-naturwiss. Klasse, Bd. 85 und 86, Halbband 1.
— — Anzeiger (math.-naturwiss. Klasse) 1911, No. 1—27 nebst Titel und Inhalt.
— — Almanach, Jahrg. 60 und 61 und Register zu 1—60.
— — Eder-Valenta, Atlas typischer Spektren, 1911.
— — Südarabische Expedition, Bd. 6, 8 und 9.
— K. K. Gesellschaft der Ärzte:
— — Wiener Kliuische Wochenschrift 1911, No. 1—52, 4⁰.

Wien. Zoologisch-botanische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 60, No. 9, 10; Bd. 61, No. 1—8.
— — Abhandlungen, Bd. 6, No. 2, 3.
— Österreichische Kommission für internationale Erdmessung:
— — Verhandlungen 1910.
— K. K. Naturhistorisches Hofmuseum:
— — Annalen, Bd. 24, No. 3, 4; Bd. 25, No. 1, 2.
— Israelitisch-theologische Lehranstalt:
— — Jahresbericht 18.
— Mechitharisten-Kongregation:
— — Handes Amsoreay 1890—95.
— K. K. Ministerium für öffentliche Arbeiten:
— — Statistik des Bergbaues in Österreich für 1910.
— K. K. Geologische Reichsanstalt:
— — Abhandlungen, Bd. 16, Heft 3; Bd. 20, Heft 3-5; Bd. 21, Heft 2; Bd. 22, Heft 1.
— — Verhandlungen 1910, No. 13—18; 1911, No. 1—11.
— — Jahrbuch, Bd. 60, Heft 4; Bd. 61, Heft 1, 2.
— Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse:
— — Schriften, Bd. 51, 1910/11.
— K. K. Universität:
— — Schriften vom Jahre 1909/10.
— — Inauguration des Rektors 1911/12.
— — Verwaltungsbericht der K. K. Univ.-Bibliothek 4, 1909/10.
— — Übersicht der Behörden 1911/12.
— — Vorlesungen, S.-S. 1911, W.-S. 1910/11.
— Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik:
— — Klimatopographie von Österreich 4, 1909.
— — Bericht über die Erdbeben in Österreich, No. 5, 1910.
— — Jahrbücher 44, 1907; 45, 1908 und Anhang.
Wiesbaden. Verein für Nassauische Altertumskunde:
— — Annalen, Bd. 39, 1909.
— — Mitteilungen, Jahrg. 13, No. 1—4.
Wilhelmshafen. Kais. Observatorium:
— — Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen im Jahre 1910, N. F., Heft 1.
— — Tätigkeit des Instituts für Erdmagnetismus, 1910, Bl. 1, 2; 1911, Bl. 3.
Wladiwostok. Orientalisches Institut:
— — Izvěstja, tom. 31, No. 4; tom. 33, No. 2; tom. 34, No. 1; tom. 36, No. 1, 2; tom. 37, No. 1, 2.
— — Protokolli 1909—10.

Wolfenbüttel. Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig:
— — Jahrbuch, 9. Jahrg., 1910.
— — Braunschweigisches Magazin, Bd. 16, 1910, 4⁰.

Worms. Altertumsverein:
— — Vom Rhein, Jahrg. 10, 1911.

Würzburg. Physikalisch-medizinische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, N. F., Bd. 40, Heft 8; Bd. 41, Heft 1—7.
— — Sitzungberichte 1910, Heft 1—5; 1911, Heft 1—6.
— K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Schnupp.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Blümel II.
— K. Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1911, W.-S. 1911/12.
— — Personalstand 1911 und 1911/12.

Wunsiedel. Realschule:
— — Jahresbericht 1910/11.

Zürich. Schweizerische Meteorologische Zentralanstalt:
— — Annalen, 46. Jahrg., 1909, 4⁰.
— Antiquarische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 27, Heft 2, 4⁰.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Vierteljahresschrift, Jahrg. 55, Heft 3, 4.
— Schweizerische Geodätische Kommission:
— — Astronomisch-geodätische Arbeiten, Bd. 12, 1910.
— Schweizerische Geologische Kommission:
— — Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, N. F., Lief. 20, 23, 24 (Text und Atlas).
— — Erläuterungen, No. 9, 10.
— — Geologische Spezialkarten, No. 27a, b, 50, 54, 56a, b, 57, 60.
— Schweizerisches Landesmuseum:
— — Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde, N. F., Bd. 12, No. 3, 4; Bd. 13, No. 1 und Beilage.
— Bibliothek des Eidgenössischen Polytechnikums:
— — Dissertationen 1909/10, 1911 (10 Stück).
— Sternwarte:
— — Astronomische Mitteilungen, No. 101, 102.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1910/11 in 4⁰ und 8⁰.

Zweibrücken. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Pfleger II.

Geschenke von Privatpersonen, Geschäftsfirmen und Redaktionen.

Desid. André:
Des notations mathématiques, Paris 1911.

Giunta Antonino, Nicosia:
Storiografia Siciliana.

Henri Arctowski, New York:
Studies on climate, New York 1910.

Ed. Barbette, Lüttich:
Les sommes de $p^{\text{ièmes}}$ puissances distinctes égales à une $p^{\text{ième}}$ puissance, Liège 1910.
Le dernier theorème de Fermat, Liège 1910.

G. Bernardakis, Athen:
Lexicon hermenenticon, 2 voll., Athen 1910.

Karl Bezold, Heidelberg:
Zeitschrift für Assyriologie, Bd. 25, Heft 1—4.

W. Frhr. v. Bissing, München:
Die Mastaba des Gem-Ni-Kai, Bd. I, II, 1, Berlin 1905.

H. Böhlau Nachf., Weimar:
Zeitschrift der Savignystiftung, Bd. 32, 1911, germanistische, romanistische, kanonistische Abteilung.

Lewis Boss, Albany:
List of 1059 standard stars for 1910, Albany 1909.

H. Bourgeois, Brüssel:
Esquisse d'une grammaire du Romani Finlandais, 1911.

Renward Brandstetter, Zürich:
Monographien zur indonesischen Sprachforschung, No. 7, 8, Luzern 1911.

F. Bruckmann, München:
Denkmäler der griechischen und römischen Skulptur von Furtwängler-Urlichs, 3. Aufl., München 1911.

Ant. Cabreira, Lissabon:
Sur les propriétés des nombres en diagonale, Lissabon 1910.

M. Conrad, Aschaffenburg:
Nachruf auf Erlenmeyer, Berlin 1911.

José Isaac del Corral, Habana:
Nuevos metodos para resolver ecuaciones numéricas, Madrid 1912.

Fr. Cumont, Brüssel:
Studia Pontica III, 1910.

Nuno Duarte, Rio de Janeiro:
Codico mnemo-telegraphico 1911 n. Addenda, Rio de Janeiro 1911.

Hermann Fischer, Tübingen:
Schwäbisches Wörterbuch, Lief. 33—36.

R. Forrer, Straßburg:
Terrasigillatatöpfereien, Stuttgart 1910.

E. N. Hand, Spokane (Washington):
The atom in chemistry, 1911.

Sp. C. Haret, Bukarest:
Mécanique sociale, 1910.

L. Hargrave, Sydney:
Lope de Vega, 1911.

Hayashi, Sendai (Japan):
The Tohoku Mathematical Journal, vol. 1, No. 1, 1911.

August Heisenberg, München:
Byzantinische Zeitschrift, Bd. 20, 1—4.

George Hempel, Stanford:
Early etruscan inscriptions, California 1911.

C. C. Hosseus, Reichenhall:
Der Reisbau in Siam, S.-A. 1911.

Th. Houtsma und A. Schade, Utrecht:
Enzyklopädie des Islam, Lief. 8—11.

J. B. Keune, Metz:
Die römische Ortschaft.

Ernst Klippel, Kairo:
Études sur le folklore bedouin de l'Égypte, Le Caire 1911.

Paul Lacombe, Paris:
Bibliographie des travaux de M. L. Delisle, Suppl. 1902—10.

Spyridon Lampros, Athen:
Νέος Ἑλληνομνήμων, vol. 7, 4; 8, 1.

Ernst Leyst, Moskau:
Beobachtungen des Mathemat. Observatoriums 1908 und 1909.
Die Variationen des Erdmagnetismus, Moskau 1910.
Erdmagnetische Ablenkungsbeobachtungen 1910.

F. Limmer, Braunschweig:
Ausbleichverfahren, Halle 1911.

Jos. Loukaschewitsch, Petersburg:
Sur le mécanisme de l'écorce terrestre, St. Petersburg 1911.

E. Merck, Darmstadt:
Jahresberichte 24, 1910.
Index, 3. Aufl., 1910.

C. S. Minot, Boston:
The Elizabeth Thompson Science Fund 1886—1911, Boston 1911.

Athanas Mponturas, Athen:
Προλεγόμενα εἰς τὸ νεοελληνικὸν λεξικόν, Athen 1911.

Frdr. Münzer, Basel:
Cacus, Der Rinderdieb, Programm der Rektoratsfeier, Basel 1911.

Duc d'Orléans, Brüssel:
Résultats de la campagne arctique de 1907, Brüssel 1910/11.

P. Palladino, Roma:
Les composés chimiques dans l'espace, Pavia 1911.

Fortunato Pasquale, Anoia:
Del fulcro germinale, 1911.

Edw. C. Pickering, Cambridge (Mass.):
Associate members of American Societies, 1910.

S. Riefler, München:
1. und 2. Nachtrag zu: Präzisionspendeluhren, München 1910.

H. Rudolph, Pfaffendorf a. Rh.:
Die Stellung der Physik und Naturphilosophie zur Weltätherfrage, Berlin 1911.

Emil Schwörer, Kolmar i. E.:
Les phénomènes thermiques de l'atmosphère, Paris 1910.

Siemens-Schuckert, Berlin:
Nachrichten, Heft 19, 20 und Jahrg. 1909 und 1910.

Erneste Solvay, Brüssel:
Gravito-matérialytique, Brüssel 1911.

F. G. Teixeira, Porto:
Obras sobre mathematica, vol. 5, 1909.

B. G. Teubner, Leipzig:
Encyclopédie des sciences mathématiques, tom. I, 2, fasc. 3; tom. I, 4, fasc. 4; tom. III, 1, fasc. 1; tom. III, 3, fasc. 1.
Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. V, 2, Heft 3; Bd. I, 2, Heft 2; Bd. II, 2, Heft 6.
Thesaurus linguae latinae, vol. 3, fasc. 8; vol. 5, fasc. 3.
Prym-Rost, Theorie der Prymschen Funktionen, 1911.

Vieweg und Sohn, Braunschweig:
Verlagskatalog 1786—1911, Braunschweig 1911.

August Weiler, Karlsruhe:
Fragmente, No. 5, 1911.

Ladislaus Weinek, Prag:
Reise zur Beobachtung des Venusdurchgangs, 1911.

Walter Winans:
Prehistoric red deer, London 1911.





Über die Struktur der γ-Strahlen.

Von **A. Sommerfeld.**

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Januar 1911.

§ 1. Einleitung, die Schweidlerschen Schwankungen.

Kürzlich hat Egon von Schweidler[1]) vorgeschlagen, die von ihm entdeckte bedeutsame Methode der Schwankungsmessungen zu verwenden, um Aufschluß über die Natur der γ-Strahlen des Radiums zu erhalten. Die eigentliche Frage würde lauten: Corpuskularstrahlung (vom Charakter der α- oder β-Strahlen) oder Wellenstrahlung (vom Charakter der Röntgenstrahlen)? Wenn auch viele Tatsachen für die letztere Auffassung sprechen, so findet doch auch die erstere Annahme ihre Vertreter (Bragg). Nun ist klar und bereits in der ursprünglichen Publikation von Schweidler hervorgehoben, daß die Schwankungsmessungen nicht direkt die Frage: Corpuskular- oder Wellenstrahlung entscheiden, sondern bei Benutzung von Blenden verschiedenen Öffnungswinkels vielmehr nur einen Beitrag zu der Frage liefern können: Einseitig konzentrierte oder allseitig sich ausbreitende Strahlung? Offenbar gehört die Corpuskularstrahlung zu der ersteren Gattung; auch eine Strahlung von der hypothetischen Struktur der Lichtquanten würde man, trotz der großen Unbestimmtheit der ganzen Vorstellung, jedenfalls der ersteren Gattung zurechnen müssen. Gehört nun im Gegensatz dazu eine Strahlung vom Röntgenstrahlcharakter zur zweiten Gattung? Von Schweidler ist geneigt, dies der Hauptsache nach zu bejahen, indem er die Verhältnisse bei der Emission gewöhnlicher Röntgenstrahlen direkt auf die γ-Strahlen überträgt. Für den polarisierten An-

[1]) Physikal. Zeitschr. 11, 225, 1910.

teil der gewöhnlichen Röntgenstrahlen ergibt sich auf Grund der üblichen Vorstellungen (quasistationäre geradlinige Bremsung des Kathodenstrahl-Elektrons) folgendes:[1]) In der Richtung des ankommenden Kathodenstrahls und in der entgegengesetzten Richtung wird überhaupt keine Energie emittiert; bei kleiner Kathodenstrahlgeschwindigkeit liegt das Maximum der Emission merklich senkrecht gegen den Kathodenstrahl, eilt aber im Sinne des Kathodenstrahls vor bei größeren Geschwindigkeiten; legt man um die Bremsstelle des Kathodenstrahls eine Kugel und teilt diese durch eine Ebene senkrecht zum Kathodenstrahl in zwei Halbkugeln, so geht durch die Halbkugel, die die Verlängerung des Kathodenstrahls enthält, im ganzen mehr Energie, wie durch die Halbkugel, welche den ankommenden Kathodenstrahl umschließt; das Verhältnis der beiden Gesamtintensitäten beträgt z. B. 1,9 bei $\beta = \frac{1}{3}$ (β = Kathodenstrahlgeschwindigkeit : Lichtgeschwindigkeit) und wächst beträchtlich bei noch größeren Werten von β. Diese theoretischen Ergebnisse waren mit den Beobachtungen von Baßler etc. im Einklang. Von Schweidler benützt nun meine Werte für $\beta = \frac{1}{3}$, um daraus den Einfluß der Unsymmetrie der Emission auf die Schwankungserscheinungen abzuschätzen und kommt zu dem Ergebnis, daß dieser Einfluß klein sei.

Die Schwankungen der γ-Strahlen sind inzwischen von Edgar Meier[2]) experimentell studiert worden. Da er weiteres Material verspricht, soll hier auf die Deutung seiner Versuche nicht eingegangen werden. Meier bezeichnet, um jede spezielle Hypothese zu vermeiden und nur das Vorhandensein einer Vorzugsrichtung in der Emission resp. deren Abwesenheit zum Ausdruck zu bringen, eine einseitig konzentrierte Strahlung als anisotrop, eine allseitig sich ausbreitende als isotrop. In der zitierten Arbeit zieht er aus seinen Schwankungsmessungen den vorläufigen Schluß, daß die γ-Strahlen ausgesprochen anisotrop sind. Zugleich betont er, daß mit diesem Befund nicht nur die corpuskulare und Lichtquanten-Vorstellung sondern

[1]) A. Sommerfeld, Physikal. Zeitschr. 10, 969, 1909.

[2]) Sitzungsber. der Berliner Akademie 32, 647, 1910.

auch die Vorstellung vom Röntgencharakter der γ-Strahlen verträglich sei, falls man bei letzterer, nicht wie es von Schweidler tut, an Röntgenstrahlen von mittlerer Härte ($\beta < \frac{1}{3}$) denkt, sondern entsprechend den wirklichen Verhältnissen bei der Emission der γ-Strahlen viel durchdringendere Röntgenstrahlen zum Vergleich heranzieht.

Im folgenden möchte ich die Richtigkeit der letzten Bemerkung quantitativ erhärten. Dabei wird sich ein recht seltsames Bild von der Struktur eines γ-Strahls ergeben, ein Bild, das die äußerste Konsequenz der von mir vertretenen Auffassung von der Struktur der Röntgenstrahlen bildet. Wie üblich, fassen wir den γ-Strahl als den die Aussendung des β-Strahls begleitenden Röntgenimpuls auf. Dieser berechnet sich ganz ebenso wie der umgekehrte Vorgang, die Bremsung eines Kathodenstrahls, der zu den gewöhnlichen Röntgenimpulsen Anlaß gibt. Selbstverständlich muß die Energie des γ-Strahls um die Richtung des zugehörigen β-Strahls rings symmetrisch angeordnet sein und es muß in der Richtung des β-Strahls selbst die Intensität des γ-Strahls Null sein. Rechnen wir nun mit einer Anfangsgeschwindigkeit des β-Strahls von nahezu Lichtgeschwindigkeit ($\beta = \frac{9}{10}$ oder $\frac{99}{100}$), so finden wir die maximale Intensität des γ-Strahls bereits in einer Richtung, die nur um wenige Grad (15^0 resp. 5^0) von derjenigen des β-Strahls abweicht, oder räumlich gesprochen, auf einem Kegel, der die Richtung des β-Strahls mit enger Öffnung umgibt. Von diesem Vorzugskegel der γ-Strahlemission nimmt die Emissionsstärke sowohl nach innen (zum β-Strahl hin) wie nach außen schnell ab, so daß fast die ganze Intensität auf einen diesen Vorzugskegel umschließenden, mehr oder minder engen Hohlkegel beschränkt ist. Überdies ist die γ-Strahlenergie zwischen zwei Kugelflächen eingeschlossen, die sich beide mit Lichtgeschwindigkeit erweitern. Die äußere derselben geht von dem Momente und dem Ort der beginnenden Beschleunigung des β-Teilchens aus, die innere läuft von dem Punkte und zu der Zeit aus, wo die Beschleunigung des β-Teilchens beendet ist. Die beiden Kugeln sind nicht genau

konzentrisch, ihr Abstand, die „Impulsbreite der γ-Strahlung“, variiert daher in den verschiedenen Richtungen, woraus man auf eine Verschiedenheit der Härte nach den verschiedenen Richtungen zu schließen hat. Die γ-Strahlenergie findet sich hiernach lokalisiert auf den zwischen diesen Kugelflächen und den beiden Mänteln jenes Hohlkegels enthaltenen Raum, also auf ein ringförmiges Gebiet um die β-Strahlrichtung. Während sich der äußere und innere Durchmesser des Ringes proportional mit der Zeit erweitern, bleibt die Ringdicke in der Strahlrichtung zeitlich konstant. Auf der Symmetrieachse des Ringes befindet sich das zugehörige β-Teilchen mit seiner elektromagnetischen Atmosphäre. Dieses schreitet geradlinig mit geringerer als Lichtgeschwindigkeit fort und verliert überdies allmählich durch äußere Störungen an Geschwindigkeit. Der umgebende Ring von γ-Strahlenergie dagegen eilt mit Lichtgeschwindigkeit radial voran und sondert sich daher allmählich mehr und mehr von dem Felde des mit ihm zugleich erzeugten β-Strahls. Für die Struktur der eigentlichen β-Strahlung ist offenbar die Anfangsgeschwindigkeit des β-Teilchens maßgebend, nicht die durch Störungen herabgeminderte und zerstreute Endgeschwindigkeit, die durch die Ablenkungsbeobachtungen ermittelt wird. Bei diesen Störungen werden γ-Impulse geringerer Härte entstehen; die eigentliche γ-Strahlung des Aussendens aber konserviert in ihrer Struktur die anfänglichen und für jede Gruppe von β-Strahlen verschiedenen Höchstgeschwindigkeiten.

Eine γ-Strahlung der hier beschriebenen Struktur hat, im groben betrachtet, durchaus den Charakter eines Projektils und unterscheidet sich in ihrer Energielokalisation nicht mehr merklich von einer Corpuskularstrahlung oder von dem hypothetischen Lichtquant. Es ist sehr merkwürdig, daß man vom Boden der Maxwellschen, also der reinen Undulationstheorie aus unter Umständen zu Konsequenzen geführt wird, die der Newtonschen Emissionstheorie sich nähern, und die äußerlich betrachtet viel mehr Ahnlichkeit haben mit den Newtonschen Lichtprojektilen als mit der Huyghensschen Kugelwelle. Und

doch sind es dieselben theoretischen Grundlagen der Feldfortpflanzung, die im einen Fall zu der allseitigen Kugelwelle, im anderen Fall zu der einseitigen Energieemission im γ-Strahl führen; beide Fälle unterscheiden sich nur durch die Art der Anregung, das eine Mal die verhältnismäßig langsamen, ungeregelten und durchschnittlich nach allen Richtungen gleichen Schwingungen eines Elektronenhaufens in der Quelle der Kugelwelle, das andere Mal die einseitige Beschleunigung eines individuellen Elektrons bis hart an die kritische Grenze der Lichtgeschwindigkeit heran. Da die Radiumquelle im Laufe der Zeit β-Strahlen nach allen Richtungen aussendet, wird natürlich auch die γ-Strahlenergie durchschnittlich nach allen Richtungen in gleicher Stärke gelangen. Die Schwankungsmessungen sollen dazu dienen, darüber hinaus die Energieverteilung in den Einzelvorgängen zu bestimmen.

Es soll schon hier betont werden (Näheres in § 6), daß die außerordentlich hohen Anfangsgeschwindigkeiten, mit denen wir hier rechnen werden, ihrem Zahlenwerte nach ziemlich hypothetisch sind, wenn auch vieles für die hier angenommene Größenordnung spricht. Die auf die Schwankungserscheinungen sich beziehenden Ergebnisse dieser Note würden also erst dann volle Realität erhalten, wenn bei Radium (Ra C) das ursprüngliche Auftreten von β-Strahlen äußerster Durchdringungsfähigkeit und ausreichender Intensität nachgewiesen würde. Der Wunsch, die Deutung der Schwankungsmessungen von dieser Seite aus theoretisch vorzubereiten, veranlaßte mich in erster Linie, meine Ergebnisse schon jetzt mitzuteilen. Daneben bestimmte mich das Interesse an dem theoretischen Bilde, zu dem unsere Auffassung führt, sowie die Meinung, daß gewisse spezielle Ergebnisse über das Verhältnis der γ-Strahl- zur β-Strahlenergie (§ 4) und über die Härte der γ-Strahlen (§ 5) für die experimentelle radioaktive Forschung fruchtbar werden könnten. Von großer Tragweite dürfte, wenn er sich in seinen experimentellen Folgerungen bestätigen sollte, der in § 4 vermutete Zusammenhang zwischen dem Planckschen Wirkungsquantum und der Theorie der Röntgenstrahlen werden.

§ 2. Berechnung der Energieverteilung im γ-Strahl.

Wir nehmen an, daß das β-Teilchen, Ladung e, im Felde des Radiummoleküls von der Geschwindigkeit 0 geradlinig und gleichförmig[1]) auf eine Geschwindigkeit $v = \beta c$ beschleunigt werde, die wenig unter c liegt, derart, daß

$$\gamma = 1 - \beta << 1 \tag{1}$$

ist. Die während der Beschleunigungsperiode zunehmende Geschwindigkeit sei $v' = \beta' c$, $\dot{v}$ sei die konstante Beschleunigung und t' der zu v' gehörige Zeitpunkt. Dann wird im Zeitpunkte t' pro Zeiteinheit unter dem Winkel φ gegen die Bewegungsrichtung eine Energiemenge emittiert, die wir im Abstande r von der Emissionsstelle durch den auf die Flächeneinheit bezogenen Poyntingschen Energiefluß $\mathfrak{S}'$ messen:

$$\mathfrak{S}' = \frac{e^2 \dot{v}^2}{16 \pi^2 c^3 r^2} \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - \beta' \cos \varphi)^6}. \tag{2}$$

Diese Gleichung, auf der alles Folgende beruht, ist zuerst von Abraham[2]) bewiesen. Wir werden ihre Ableitung in § 7 durch die Methoden der Relativitätstheorie erheblich vereinfachen. Die uns wesentlich interessierende Abhängigkeit von dem Azimut φ machen wir uns folgendermaßen klar: Der Zähler $\sin^2 \varphi$ entspricht dem Umstande, daß die Ausstrahlung eine transversale ist, daß also in der Beschleunigungsrichtung ($\varphi = 0$) die Emission Null ist; das Maximum des Zählers liegt senkrecht zur Beschleunigungsrichtung. Der Nenner $(1 - \beta' \cos \varphi)^6$ liefert die Unsymmetrie wegen der vorhandenen Geschwindigkeit v', die während des Zeitintervalles dt' um $\dot{v}\,dt'$ erhöht

[1]) In diesem Paragraph setze ich Gleichförmigkeit der Beschleunigung vom Standpunkte eines etwa auf dem Radiummolekül ruhenden Beobachters voraus. Im nächsten Paragraph werde ich die Änderungen angeben, die vorzunehmen sind, wenn wir die Gleichförmigkeit im Sinne der Relativitätstheorie durch einen mit dem β-Teilchen mitbewegten Beobachter beurteilen lassen.

[2]) Theorie der Elektrizität II, Gleichungen (74), (75), (76 a); ein oben hinzugefügter Faktor 4π liegt an der Wahl des Maßsystems für e.

wird. Betrachten wir diesen Teil des Beschleunigungsvorganges gesondert, so haben wir uns für einen Zeitpunkt $t > t'$ um die Lage des Elektrons O' zur Zeit t' eine Kugel vom Radius $c(t - t')$ und um seine Lage O'' zur Zeit $t' + dt'$ eine solche vom Radius $c(t - t' - dt')$ zu schlagen. Außerhalb der ersteren herrscht das Feld der ursprünglichen Geschwindigkeit v', inner-

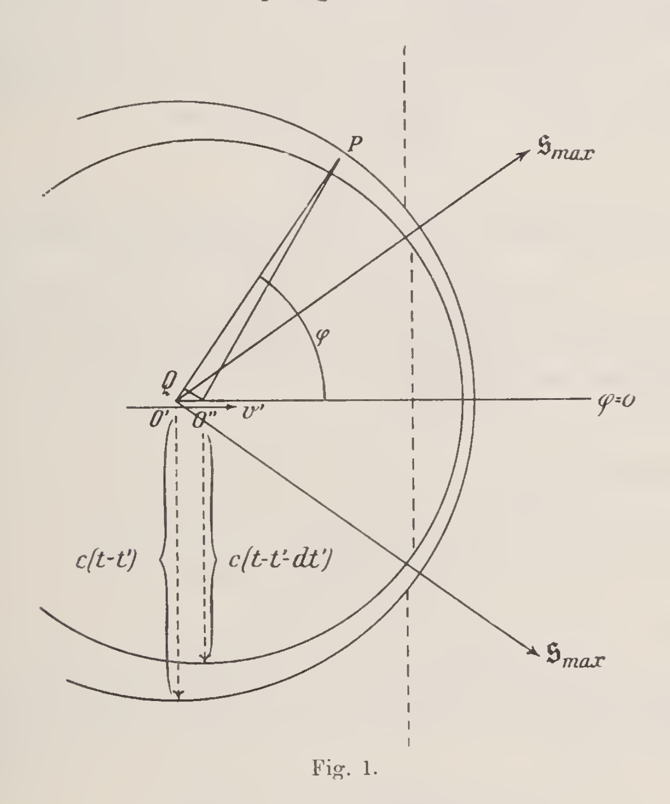


Fig. 1.

halb der letzteren dasjenige der erhöhten Geschwindigkeit $v' + \dot{v}\,dt'$. Beide Felder laufen mit der zugehörigen Geschwindigkeit fort und sind um so mehr um eine gewisse Mittelebene herum konzentriert, je näher die Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit kommt. Die genannte Mittelebene des Feldes geht durch diejenige Lage des Elektrons hindurch, die dasselbe

bei ungestörter Bewegung zur Zeit t einnehmen würde. Die Figur ist für $\beta' = \frac{3}{4}$ gezeichnet. An der Stelle größter Konzentration der Felder ist auch die Stärke des Röntgenimpulses am größten. Man sieht daher, daß bei $\beta' = \frac{3}{4}$ das Maximum schon recht unsymmetrisch liegt. Diese Unsymmetrie wird in unsrer Formel (2) durch den Nenner bedingt, dessen kleinster Wert bei $\varphi = 0$ liegt.

Der Energiefluß während der ganzen Beschleunigungszeit wird durch Integration nach der Zeit, aber nicht der Abgangszeit t', sondern der Ankunftszeit t, gewonnen:

$$\mathfrak{S} = \int \mathfrak{S}' dt.$$

Zwischen dt und dt' besteht die bekannte Beziehung:

$$dt = (1 - \beta' \cos\varphi)\, dt'. \tag{3}$$

Es ist nämlich (vgl. Figur 1) der Unterschied der Lichtwege $O'P$ und $O''P$ nach einem beliebigen Aufpunkte P der Wellenzone einerseits gleich

$$c(t - t') - c(t + dt - t' - dt') = c(dt' - dt),$$

andrerseits gleich

$$OQ = \cos\varphi\, O'O'' = \cos\varphi\, \beta' c\, dt'.$$

woraus (3) durch Vergleichung folgt. Mithin wird

$$\mathfrak{S} = \frac{e^2 \dot{v}^2}{16\pi^2 c^3 r^2} \int \frac{\sin^2\varphi}{(1 - \beta' \cos\varphi)^5}\, dt', \tag{3a}$$

das Integral über die Abgangszeit erstreckt, oder, da $c\,d\beta' = \dot{v}\,dt'$, auch

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{e^2 \dot{v} \sin^2\varphi}{16\pi^2 c^2 r^2} \int_0^\beta \frac{d\beta'}{(1 - \beta' \cos\varphi)^5} \\ &= \frac{e^2 \dot{v}}{64\pi^2 c^2 r^2} \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} \left(\frac{1}{(1 - \beta\cos\varphi)^4} - 1 \right). \end{aligned} \tag{3b}$$

Eben diese Gleichung habe ich früher (l. c.) der Untersuchung des polarisierten Anteils der Röntgenstrahlung zu

Grunde gelegt. Wie dort werden wir von dem konstanten Faktor absehen und einfacher schreiben können:

$$\mathfrak{S} = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{(1 - \beta \cos \varphi)^4} - 1 \right). \tag{4}$$

Für kleine Werte von φ, wenn zugleich die in (1) eingeführte Größe $\gamma = 1 - \beta$ klein ist, ergibt sich die Näherungsformel:

$$\mathfrak{S} = \frac{\varphi^2}{\left(\gamma + \frac{\varphi^2}{2}\right)^4},$$

bei der z. B. $\gamma \frac{\varphi^2}{2}$ gegen $\gamma + \frac{\varphi^2}{2}$ und -1 gegen $\left(\gamma + \frac{\varphi^2}{2}\right)^{-4}$ vernachlässigt werden durfte. Schreibt man noch

$$S = \tfrac{1}{2} \mathfrak{S} \gamma^3, \qquad \alpha = \frac{\varphi^2}{2\gamma}, \tag{5}$$

so wird einfach:

$$S = \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^4}. \tag{6}$$

Das Maximum von S liegt bei $\alpha = \frac{1}{3}$ und beträgt

$$S_{\max} = \frac{27}{256} = 0{,}105.$$

In Figur 2 sind die Werte von S, die mit $\mathfrak{S} = 2\gamma^{-3} S$ bei festem γ proportional sind, zur Abscisse $\varphi = \sqrt{2\alpha\gamma}$ aufgetragen (vgl. die ausgezogenen Kurven der Figur 2). Dem Maximum $\alpha = \frac{1}{3}$ entspricht z. B. für

$$\gamma = \tfrac{1}{10} \quad \varphi = 0{,}26 \;\; = 15^0$$
$$\gamma = \tfrac{1}{100} \quad \varphi = 0{,}082 = \;\; 5^0.$$

Um die Näherungsformel (6) mit der ursprünglichen (4) zu vergleichen, sind in Figur 2 ferner die dieser letzteren entsprechenden Ordinaten $S = \frac{1}{2}\gamma^3 \mathfrak{S}$ punktiert eingetragen. Dieselben weichen nur bei der Kurve für $\gamma = \frac{1}{10}$ bei größeren φ von den Ordinaten der ausgezogenen Kurve ab.

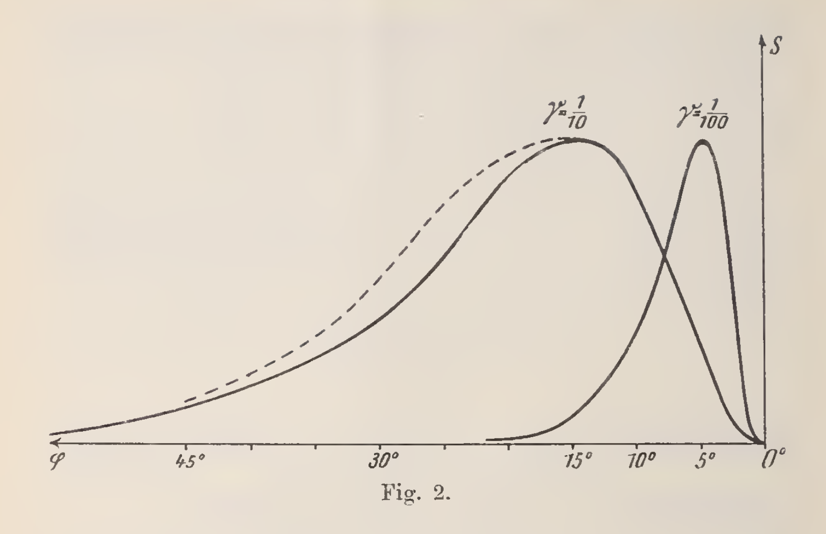


Fig. 2.

In Figur 3 ist die Emissionsverteilung im Polardiagramm dargestellt, indem zu jedem Winkel φ das zugehörige $\mathfrak{S}$ als Radiusvektor eingezeichnet wurde. $\varphi = 0$ ist die Richtung des ausgesandten β-Strahls. An diese legt sich das Polardiagramm des γ-Strahls von beiden Seiten blattförmig heran, und zwar um so enger, je größer die Geschwindigkeit des β-Strahls ist. Der Maßstab ist willkürlich und für $\beta = \frac{9}{10}$ und $\beta = \frac{99}{100}$ in der Figur nur deshalb verschieden gewählt, um die beiden Kurven voneinander zu sondern. Nehmen wir in beiden Fällen gleiche Beschleunigung an, so würden sich die maximalen Intensitäten wie die negativen dritten Potenzen von β, also in unserem Falle wie $1 : 1000$ verhalten. Unter dieser Annahme würde also dem schnelleren β-Strahl nicht nur ein enger begrenzter sondern auch ein viel intensiverer γ-Strahl entsprechen. Die Figur vermeidet diese Annahme und will nur die Struktur, nicht die Stärke der beiden γ-Strahlen im richtigen gegenseitigen Verhältnis darstellen.

Während wir bisher die in jeder Richtung emittierte spezifische Energie $\mathfrak{S}$ dargestellt haben, wollen wir jetzt noch die Gesamtenergie

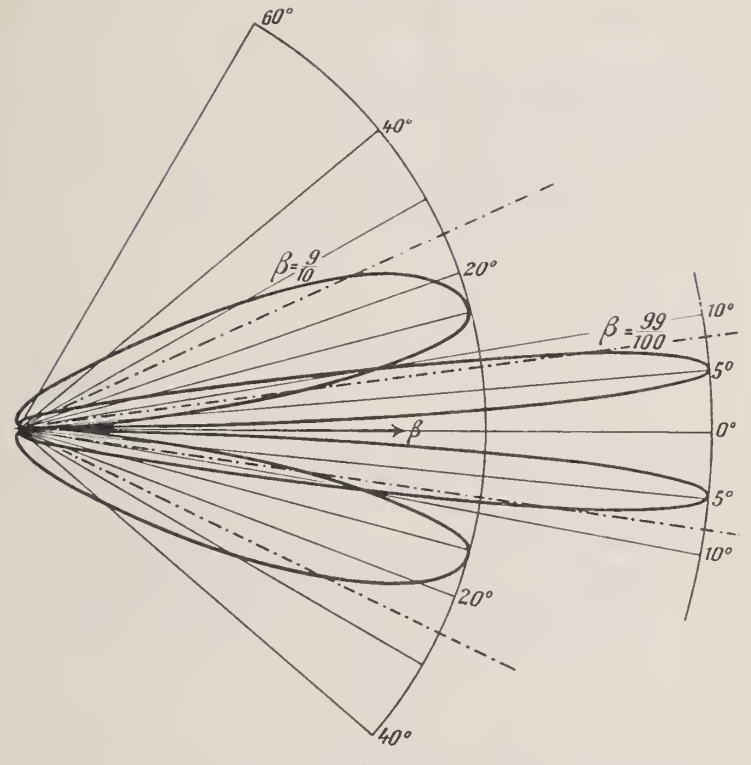


Fig. 3.

$$E_\varphi = \int_\varphi^\pi \mathfrak{S} \sin \varphi \, d\varphi \tag{7}$$

bestimmen, welche in den Kegel von der Öffnung $\pi - \varphi$ gestrahlt wird. E wächst in dem Maße, wie φ von π aus abnimmt, und nähert sich für $\varphi = 0$ der Gesamtemission E_0. Wenn $\mathfrak{S}$ wie im Falle $\gamma = \frac{1}{100}$ nur für kleine φ nicht verschwindend klein ist, können wir $\sin \varphi$ gleich φ und $\mathfrak{S}$ nach Näherung (5) gleich $2\gamma^{-3} S$ setzen. Es wird dann

$$E_\varphi = 2\gamma^{-3} \int_\varphi^\pi S \varphi \, d\varphi = 2\gamma^{-2} \int \frac{a \, d a}{(1 + a)^4},$$

letzteres Integral wäre zwischen den Grenzen $\alpha = \frac{\varphi^2}{2\gamma}$ und $\alpha = \frac{\pi^2}{2\gamma}$ zu nehmen; man kann aber, da γ klein ist, die letztere Grenze auch durch ∞ ersetzen. Es ergibt sich dann:

$$E_\varphi = \frac{1}{3\gamma^2} \frac{1+3\alpha}{(1+\alpha)^3} = \frac{1}{3} \frac{\gamma + \frac{3}{2}\varphi^2}{(\gamma + \frac{1}{2}\varphi^2)^3}. \tag{8}$$

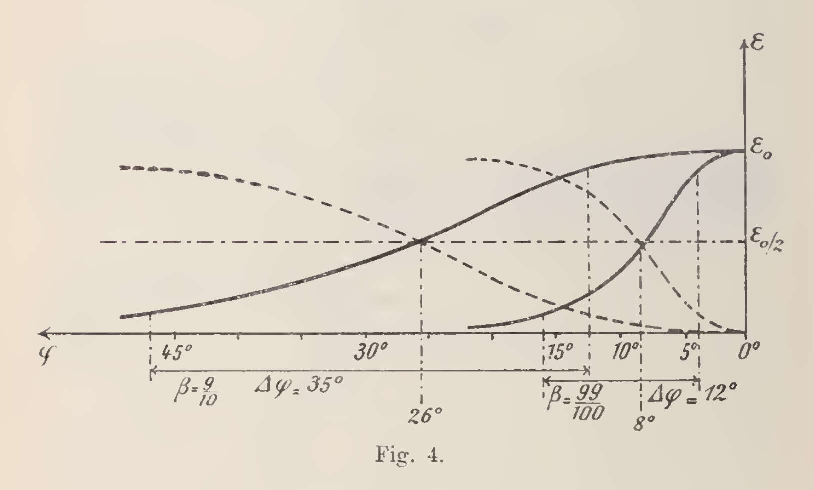


Fig. 4.

Der Verlauf von E ist in den beiden ausgezogenen Kurven der Figur 4 für $\gamma = \frac{1}{10}$ (flachere Kurve) und $\gamma = \frac{1}{100}$ (steilere Kurve) zur Abszisse $\varphi = \sqrt{2\alpha\gamma}$ eingetragen. Die genauere Berechnung von (7) auf Grund der Gleichung (4) für $\mathfrak{S}$, die sich durch Einführung der Integrationsvariabeln $1 - \beta\cos\varphi$ an Stelle von φ leicht bewerkstelligen läßt, liefert fast dieselben Kurven, was daherrührt, daß bei der vorangehenden Näherungsrechnung $\sin\varphi$ durch den zu großen Wert φ und $\mathfrak{S}$ durch einen zu kleinen Näherungswert (die in Figur 2 ausgezogene Kurve im Gegensatz zu der genaueren punktierten Kurve) ersetzt war.

Aus den Kurven für E ersieht man, daß, im Falle $\beta = \frac{99}{100}$, die Hälfte der Energie in einen die Richtung $\varphi = 0$ umgebenden Kegel von der Öffnung 8^0 gestrahlt wird, während die

andere Hälfte sich auf das Äußere desselben, d. h. einen Kegel von der Öffnung 172° verteilt. Im Falle $\beta = \frac{9}{10}$ ist der erstere Kegel um 26° geöffnet. Die beiden Winkel 8° und 26° bestimmen sich in Figur 4, wenn man die (strichpunktierte) Parallele zur Abzissenachse im Abstand der Hälfte des maximalen Wertes E_0 zieht. Diese beiden Halbwertskegel der Energie sind auch in Figur 3 strichpunktiert angedeutet. Daß sie weiter geöffnet sind wie die Kegel maximaler Emission, liegt offenbar daran, daß vermöge des Faktors $\sin\varphi$ den größeren φ bei der Berechnung von E ein größeres Gewicht zukommt. Die strichpunktierten Kegel würden den durch Umdrehung der Emissionskurve entstehenden Rotationskörper in zwei gleiche Teile teilen.

Man sieht hieraus, daß für sehr große Geschwindigkeiten (sehr kleine γ) die Energieemission tatsächlich fast corpuskular einseitig erfolgt, daß aber für etwas kleinere Geschwindigkeiten der Halbwertskegel der Energie sich erweitert, um für kleine Geschwindigkeiten die Öffnung von 90° anzunehmen.

Schließlich wollen wir noch, anknüpfend an die Schilderung des vorigen Paragraphen, denjenigen Hohlkegel bestimmen, in den der Hauptteil der Energie emittiert wird. Wir konstruieren zu dem Zwecke in Figur 4 die an der Geraden $E = \frac{1}{2} E_0$ gespiegelten Energiekurven (punktiert). Die Ordinate jeder dieser Kurven an der Stelle φ gibt diejenige Energiemenge, die in den Kegel zwischen 0 und φ emittiert wird, geradeso, wie die Ordinate der ursprünglichen (ausgezogenen) Kurve an der Stelle φ diejenige Energie anzeigt, die in den Kegel zwischen π und φ ausstrahlt. Wir markieren bei den beiderlei Energiekurven etwa den Wert φ, für den $E = \frac{1}{10} E_0$. Die beiden für gleiches γ so erhaltenen φ-Werte geben die innere und äußere Begrenzung des Hohlkegels, in den $\frac{4}{5}$ der Gesamtenergie, nämlich $E_0 - \frac{1}{10} E_0 - \frac{1}{10} E_0$ emittiert wird. Dieser Hohlkegel hat nach Figur 4 für $\beta = \frac{99}{100}$ eine Öffnung $\varDelta\varphi$ von 12°, für $\beta = \frac{9}{10}$ eine solche von 35°. Dieselbe Öffnung kommt dem ringförmigen Störungsgebiet zu, von dem im vorigen Paragraphen die Rede war.

§ 3. Korrektion dieser Berechnung bei konstanter Eigenbeschleunigung.

Der Vorgang der Aussendung des β-Teilchens ist uns natürlich völlig unbekannt. Die nächstliegende Annahme wird die sein, daß die Aussendung durch ein räumlich konstantes Spannungsgefälle innerhalb der Ausdehnung der molekularen Wirkungssphäre) bewirkt wird. Dieses würde eine konstante Beschleunigung des β-Teilchens nur dann hervorbringen, wenn seine Masse konstant, d. h. von der jeweiligen Geschwindigkeit unabhängig wäre. Dies ist sie bekanntlich weder nach der Relativitätstheorie noch nach der Absoluttheorie, so daß die Annahme eines konstanten $\dot{v}$, die wir im vorigen Paragraph machten, willkürlich erscheint. Vielmehr hätten wir mit einer Abnahme von $\dot{v}$ bei wachsendem β zu rechnen, die der Zunahme der longitudinalen Masse mit β entspricht und die nach der Absoluttheorie recht kompliziert ausfallen würde.

Statt dessen stellen wir uns lieber auf den Standpunkt der Relativitätstheorie, wo die Vorstellungen und Formeln sich vereinfachen. Die longitudinale Masse ist hier $m_0(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}}$, wo m_0 die konstante Ruhmasse. Bei konstantem Kraftfelde wird also $\dot{v}(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}}$ gleich einer Konstanten $\dot{v}_0$ oder

$$\dot{v} = \dot{v}_0(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}. \tag{9}$$

Die Beschleunigung nimmt also unter diesen Annahmen bei der Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit stark ab.

Wir kommen zu derselben Abhängigkeit der Beschleunigung von β und deuten zugleich $\dot{v}_0$ als die von einem mitbewegten Beobachter wahrgenommene Beschleunigung, die „Eigenbeschleunigung“, wenn wir, im wesentlichen kinematisch verfahrend, uns auf das Additionstheorem der Geschwindigkeiten stützen. Ist v_1 die augenblickliche Geschwindigkeit des Elektrons, die ein ruhender Beobachter wahrnimmt, δv der Geschwindigkeitszuwachs, den ein mit v_1 bewegter Beobachter konstatiert, so wird die resultierende Geschwindigkeit vom Standpunkte des ruhenden Beobachters:

$$v_2 = \frac{v_1 + \delta v}{1 + \frac{v_1 \delta v}{c^2}},$$

also der Geschwindigkeitszuwachs, von dem gleichen Standpunkte aus beurteilt:

$$(9\,\mathrm{a}) \qquad v_2 - v_1 = \frac{v_1 + \delta v}{1 + \frac{v_1 \delta v}{c^2}} - v_1 = \delta v \frac{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}{1 + \frac{v_1 \delta v}{c^2}}.$$

Bei der Division mit dt (Zeitelement im ruhenden System) entsteht links

$$(9\,\mathrm{b}) \qquad \frac{v_2 - v_1}{dt} = \dot{v}.$$

Das Zeitelement im bewegten System (Eigenzeit) ist $d\tau = dt(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$ und es wird

$$\frac{\delta v}{d\tau} = \dot{v}_0,$$

die von dem mitbewegten Beobachter gemessene Eigenbeschleunigung. Auf der rechten Seite von (9 a) entsteht daher durch Division mit dt, wenn man den Zähler durch $1 - \beta^2$, den Nenner in der Grenze $\delta v = 0$ durch 1 ersetzt:

$$(9\,\mathrm{c}) \qquad \frac{\delta v}{dt}(1 - \beta^2) = \frac{\delta v}{d\tau}(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}} = \dot{v}_0 (1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Durch Gleichsetzen von (9 b) und (9 c) bekommt man also wieder Gleichung (9).

Wir haben jetzt die Rechnungen des vorigen Paragraphen auf Grund dieser Annahme über $\dot{v}$ zu revidieren. Die Gleichungen (2) und (3) bleiben ungeändert, da in ihnen nichts über das Änderungsgesetz der Beschleunigung vorausgesetzt ist. In Gleichung (3 a) darf $\dot{v}^2$ nicht mehr vor das Integral gezogen werden, Gleichung (3 b) wird wegen $c\,d\beta' = \dot{v}\,dt$

$$(10) \qquad \mathfrak{S} = \frac{e^2 \sin^2 \varphi}{16 \pi^2 c^2 r^2} \int\limits_0^\beta \frac{\dot{v}\, d\beta'}{(1 - \beta' \cos \varphi)^5}.$$

Setzen wir hier für $\dot{v}$ seinen Wert aus Gleichung (9) ein, wobei β durch β' zu ersetzen ist, da wie früher β die Endgeschwindigkeit bedeuten soll, nämlich $\dot{v} = \dot{v}_0 (1 - \beta'^2)^{\frac{3}{2}}$, und unterdrücken wir den für die Integration konstanten Faktor $\frac{e^2 \dot{v}_0}{16 \pi^2 c^2 r^2}$, so entsteht:

$$\mathfrak{S} = \sin^2 \varphi \int\limits_0^\beta \frac{(1 - \beta'^2)^{\frac{3}{2}} \, d\beta'}{(1 - \beta' \cos \varphi)^5}. \tag{11}$$

Eine genaue Ausführung dieser Integration wäre möglich, aber sehr umständlich. Wir beschränken uns daher auf dieselbe Näherung wie in den Gleichungen (4), (5) des vorigen Paragraphen:

$$\gamma = 1 - \beta << 1, \quad \varphi << 1. \tag{12}$$

Ferner setzen wir:

$$\gamma' = 1 - \beta',$$

so daß

$$1 - \beta'^2 = 2 \gamma' \left(1 - \frac{\gamma'}{2}\right). \tag{12a}$$

Nun liefern unter den Voraussetzungen (12) diejenigen Werte von γ' den Hauptbetrag unseres Integrals, für die der Nenner $1 - \beta' \cos \varphi$ klein, also β' nahezu 1 oder γ' klein wird. Für solche Werte von γ' kann man aber vereinfachen:

$$(1 - \beta'^2)^{\frac{3}{2}} = (2 \gamma')^{\frac{3}{2}}, \quad 1 - \beta' \cos \varphi = \gamma' + \frac{\varphi^2}{2}. \tag{12b}$$

Zugleich ergibt sich wegen (12):

$$\mathfrak{S} = - \varphi^2 \int\limits_1^\gamma \frac{(2 \gamma')^{\frac{3}{2}} \, d\gamma'}{\left(\gamma' + \frac{\varphi^2}{2}\right)^5}.$$

Wir setzen wie in (5)

$$a = \frac{\varphi^2}{2 \gamma}$$

und führen als neue Integrationsvariable ein:

$$\alpha' = \frac{\varphi^2}{2\gamma'}, \qquad d\gamma' = -\frac{\varphi^2}{2\alpha'^2}\,d\alpha'. \tag{13}$$

In dieser werden die Grenzen des Integrals bez.:

$$\alpha' = \frac{\varphi^2}{2\gamma} = \alpha, \qquad \alpha' = \frac{\varphi^2}{2} = 0, \tag{13a}$$

letzteres wegen der Voraussetzung (12). Also

$$\mathfrak{S} = \frac{2^4}{\varphi^3}\int_0^\alpha \frac{\alpha'^{\frac{3}{2}}\,d\alpha'}{(1+\alpha')^5}$$

oder, wenn man endlich die Substitution

$$\alpha' = \mathrm{tg}^2\chi, \qquad \alpha = \mathrm{tg}^2 x \tag{13b}$$

macht:

$$\mathfrak{S} = \frac{2^5}{\varphi^3}\int_0^x \sin^4\chi\cos^4\chi\,d\chi$$

$$= \frac{1}{\varphi^3}\left\{-\frac{1}{4}\cos 2x\sin^3 2x - \frac{3}{16}\sin 4x + \frac{3}{4}x\right\}.$$

Nun ist wegen $\alpha = \mathrm{tg}^2 x$ (Gleichung 13b)

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\alpha}, \qquad \cos 2x = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \qquad \sin 2x = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$$

$$\sin 4x = \frac{4\sqrt{\alpha}(1-\alpha)}{(1+\alpha)^2}, \qquad x = \mathrm{artg}\sqrt{\alpha}$$

und wegen $\alpha = \dfrac{\varphi^2}{2\gamma}$ (Gleichung 13a)

$$\frac{1}{\varphi^3} = \frac{(2\gamma)^{-\frac{3}{2}}}{\alpha^{\frac{3}{2}}},$$

also:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^{-\frac{3}{2}}\left\{\frac{\alpha-1}{(1+\alpha)^4} + \frac{3}{8}\,\frac{\alpha-1}{\alpha\,(1+\alpha)^2} + \frac{3}{8}\,\frac{\mathrm{artg}\sqrt{\alpha}}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\right\}. \tag{14}$$

Diese etwas komplizierte Formel tritt an die Stelle der Gleichungen (5), (6) des vorigen Paragraph, welche analog geschrieben lauten:

$$(14\,a) \qquad \mathfrak{S} = 2\gamma^{-3}\frac{\alpha}{(1+\alpha)^4}.$$

Der Verlauf von (14) ist ähnlich demjenigen von (14 a). Das Maximum von (14) liegt, wie man aus einer graphischen Darstellung entnimmt, bei $\alpha = 0{,}42$, dasjenige von (14 a) fanden wir früher bei $\alpha = 0{,}33$. Die Einseitigkeit der Ausstrahlungskurve erscheint dementsprechend jetzt etwas abgeschwächt.

In der Tat zeigt sich folgendes: Wenn wir nach Gleichung (14) $\mathfrak{S}$ als Funktion von α berechnen und nach Gleichung (13a) zu jedem α das zugehörige $\varphi = \sqrt{2\gamma\alpha}$ bestimmen, so ergibt sich für $\gamma = \frac{1}{10}$ eine Emissionsverteilung $\mathfrak{S}$ als Funktion von φ, welche, in Figur 2 übertragen, sich zufällig fast genau (bis auf unwesentliche Abweichungen bei größeren φ) mit der dort punktierten Kurve deckt, also von der dort ausgezogenen Näherungskurve (14 a) nur unwesentlich abweicht. An der so erhaltenen punktierten Kurve, welche der Näherung (14 a) entspricht, hätten wir noch eine Korrektion anzubringen, um die genaue Gleichung (11) darzustellen, eine Korrektion, die einerseits dem Umstande Rechnung trägt, daß für größere φ nicht mehr $\sin\varphi$ durch φ ersetzt werden darf und andrerseits dem Umstande, daß $1 - \beta'^2$ nach (12 a) gleich $2\gamma'\left(1 - \frac{\gamma'}{2}\right)$ ist, während wir bisher dafür nach (12 b) den Näherungswert $2\gamma'$ benutzt haben. Diese Korrektion würde aber unsere Kurve nur unwesentlich beeinflussen, so daß wir auf ihre Berechnung verzichten können. Verfahren wir ebenso im Falle $\gamma = \frac{1}{100}$, so wird $\mathfrak{S}$ als Funktion von φ (bis auf unwesentliche Abweichungen bei größeren φ) direkt durch die entsprechende ausgezogene Kurve der Figur 2 dargestellt; von einer weiteren Korrektion derselben können wir in diesem Falle ebenso wie im vorigen Paragraphen absehen.

Ebenso wie die Kurven der Emissionsverteilung in Figur 2

können auch ihre Polardiagramme in Figur 3 und die Kurven für die Verteilung der Gesamtenergie in Figur 4 auf unseren jetzigen Fall ohne wesentliche Korrektion übertragen werden, da sie direkte Folgen aus den Kurven der Figur 2 sind. Es bleiben also auch unsere früheren Zahlenangaben über den Grad der Energiekonzentration, den Halbwertskegel der Energie etc. im wesentlichen erhalten.

Dagegen muß die Formel für die ausgestrahlte Gesamtenergie auf Grund der Annahme konstanter Eigenbeschleunigung neu berechnet werden. Es handelt sich dabei um den Maximalwert E_0 der in Gleichung (7) definierten Größe E_φ, den wir für die Entfernung r von der Emissionsstelle folgendermaßen aus $\mathfrak{S}$ zu bestimmen haben:

$$E_0 = 2\pi r^2 \int_0^\pi \mathfrak{S} \sin\varphi \, d\varphi .$$

Tragen wir hier für $\mathfrak{S}$ den Wert (11) ein und fügen den in dieser Gleichung unterdrückten Faktor $\frac{e^2 \dot{v}_0}{16\pi^2 c^2 r^2}$ hinzu, so ergibt sich:

$$E_0 = \frac{e^2 \dot{v}_0}{8\pi c^2} \int_0^\beta (1 - \beta'^2)^{\frac{3}{2}} \, d\beta' \int_0^\pi \frac{\sin^3\varphi \, d\varphi}{(1 - \beta' \cos\varphi)^5} .$$

Das zweite dieser Integrale geht durch die Substitution $u = 1 - \beta' \cos\varphi$ über in

$$\frac{1}{\beta'} \int_{1-\beta'}^{1+\beta'} \left(1 - \frac{(1-u)^2}{\beta'^2}\right) \frac{du}{u^5}$$

$$= \frac{1}{\beta'} \left\{ \frac{\beta'^2 - 1}{\beta'^2} \int \frac{du}{u^5} + \frac{2}{\beta'^2} \int \frac{du}{u^4} - \frac{1}{\beta'^2} \int \frac{du}{u^3} \right\}$$

$$= \frac{1}{\beta'^3} \left\{ \frac{\beta'^2 - 1}{4} \left(\frac{1}{(1-\beta')^4} - \frac{1}{(1+\beta')^4} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{(1-\beta')^3} - \frac{1}{(1+\beta')^3} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-\beta')^2} - \frac{1}{(1+\beta')^2} \right) \right\} = \frac{4}{3} \frac{1}{(1-\beta'^2)^3} .$$

Somit folgt:

$$(15) \qquad E_0 = \frac{e^2 \dot{v}_0}{6 \pi c^2} \int\limits_0^\beta \frac{d\beta'}{(1-\beta'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^2 \dot{v}_0}{6 \pi c^2} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Als Näherungswert kann man benutzen für den Fall, daß $\beta = 1 - \gamma$ nahezu gleich 1 ist:

$$(15\,a) \qquad E_0 = \frac{e^2 \dot{v}_0}{6 \pi c^2} (2\gamma)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dagegen ergibt sich aus Gleichung (8) des vorigen Paragraphen bei dem dort vorausgesetzten abweichenden Beschleunigungsvorgang für $\varphi = 0$:

$$E_0 = \tfrac{1}{3} \gamma^{-2}$$

oder, wenn wir die dort unterdrückten konstanten Faktoren hinzufügen, nämlich einerseits den Faktor aus Gleichung (3 b) $\frac{e^2 \dot{v}}{64 \pi^2 c^2 r^2}$, andrerseits von der Integration über die Kugel vom Radius r herrührend den Faktor $2 \pi r^2$:

$$(15\,b) \qquad E_0 = \frac{e^2 \dot{v}}{24 \pi c^2} (2\gamma)^{-2}.$$

Beide Formeln (15 a) und (15 b) werden vermöge Gleichung (9) (angenähert $\dot{v} = \dot{v}_0 (2\gamma)^{\frac{3}{2}}$) identisch bis auf einen Zahlenfaktor.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß für den umgekehrten Vorgang, die Bremsung eines β-Teilchens bei der Erzeugung der Röntgenstrahlung, der Gegensatz zwischen konstanter Beschleunigung und konstanter Eigenbeschleunigung noch nicht in Frage kommt, weil die hierbei vorkommenden Höchstgeschwindigkeiten noch verhältnismäßig weit von der Lichtgeschwindigkeit abliegen. Deshalb durfte ich bei der obengenannten Diskussion über die Unsymmetrie der Röntgenstrahlen die Beschleunigung schlechtweg als konstant ansehen und mit den Formeln des vorigen Paragraphen rechnen.

§ 4. Über die verhältnismässige Energie der β- und γ-Strahlen.

Die Energie eines β-Strahls E_β ist für unsere Zwecke als die lebendige Kraft eines Punktes von der Ruhmasse m_0 zu berechnen, also nach der Relativitätstheorie durch die Formel:

$$E_\beta = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right). \tag{16}$$

Es ist vielleicht nicht überflüssig darauf hinzuweisen, daß man auch von dem Ausdruck der elektromagnetischen Energie auf folgendem Wege zu Gleichung (16) gelangt. Die elektromagnetische Energie eines mit β bewegten Heaviside-Ellipsoides beträgt bei Oberflächenlandung:[1])

$$E = \frac{3}{4}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1+\frac{\beta^2}{3}\right). \tag{16a}$$

Außerdem ist aber noch die potentielle Energie E_p einer über die Oberfläche des Elektrons gleichmäßig verteilten und sich nach dem Innern gleichmäßig fortsetzenden Normalspannung p zu berücksichtigen, welche die Ladungselemente gegen die elektrischen Abstoßungen zusammenhält. Für den mit dem Elektron bewegten Beobachter ist[2]) nach Poincaré:

$$p = \frac{1}{4}\frac{m_0 c^2}{V_0},$$

wo V_0 das von demselben Beobachter gesehene oder Ruhvolumen des Elektrons ist. Derselbe Wert von p gibt auch nach einem Satze von Planck ($p' = p$) die Spannung an für einen ruhenden, d. h. die Bewegung des Elektrons nicht mitmachenden Beobachter. Die potentielle Energie dieser Spannung ist:

---

[1]) Vgl. Abraham, Theorie der Elektrizität II, Gleichung (124 g) und (117 b); durch Einführung von m_0 statt e fällt der Unterschied zwischen dem bei Abraham und dem hier benutzten Maßsystem der elektrischen Einheiten fort. Die spezielle Annahme über die Kugel-Ellipsoidform des Elektrons ist offenbar für die folgende Energievergleichung unwesentlich.

[2]) Vgl. H. A. Lorentz, Theory of electrons, § 181.

$$(16\,b) \qquad E_p = p\,V = \frac{1}{4}\, m_0\, c^2\, \frac{V}{V_0} = \frac{1}{4}\, m_0\, c^2 \sqrt{1-\beta^2},$$

da wegen der Lorentz-Kontraktion

$$\frac{V}{V_0} = \sqrt{1-\beta^2}$$

ist.

Die Gesamtenergie des Elektrons setzt sich aus der Feldenergie (16 a) und der Spannungsenergie (16 b) zusammen und ist

$$(16\,c) \quad \left\{ \begin{aligned} E + E_p &= \frac{m_0\, c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{3}{4} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{1}{4}(1-\beta^2)\right) \\ &= \frac{m_0\, c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \right.$$

Ist das Elektron zur Ruhe gebracht, so setzt sich seine Gesamtenergie in derselben Weise zusammen aus der Energie seines elektrostatischen Feldes E_{stat} und der Spannungsenergie im Ruhezustande $E_{p\,\text{stat}}$ und es ist nach (16 c) für $\beta = 0$:

$$E_{\text{stat}} + E_{p\,\text{stat}} = m_0\, c^2,$$

entsprechend dem Einsteinschen Satz von der Trägheit der Energie. Die auf Wärme- oder Ionisationswirkungen verfügbare Energie des β-Strahls ist daher:

$$E_\beta = E + E_p - E_{\text{stat}} - E_{p\,\text{stat}} = m_0\, c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung (16) für seine lebendige Kraft. Übrigens verschwindet für β nahezu gleich 1 der Unterschied in der Definition von E_β und E, indem $E_p = 0$, E_{stat} und $E_{p\,\text{stat}}$ endlich, $E_\beta = E = \infty$ werden. Für β nahezu gleich 0 ist E_β in bekannter Weise mit $\frac{m_0\, v^2}{2}$ identisch.

Für die Energie eines γ-Strahls andrerseits fanden wir oben in Gleichung (15) (es handelt sich um die nach allen möglichen Azimuten ausgestrahlte Gesamtenergie E_0, im folgenden durch E_γ bezeichnet):

$$E_\gamma = \frac{e^2 \dot{v}_0}{6\pi c^2} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Mithin:

$$\frac{E_\beta}{E_\gamma} = \frac{6\pi c^4}{\dot{v}_0 e \left(\frac{e}{m_0}\right)} \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}. \tag{17}$$

Hier sind alle Größen bekannt bis auf $\dot{v}_0$. Um diese mit einer ebenfalls bekannten Größenordnung zu vergleichen, ersetzen wir die Beschleunigung $\dot{v}_0$ durch den Beschleunigungsweg l, der ein Bruchteil der molekularen Wirkungssphäre sein muß. Vom Standpunkte des § 2 ($\dot{v}$ konstant während des Aussendungsvorganges) wäre nach den gewöhnlichen Fallformeln:

$$l = \frac{v^2}{2\dot{v}}, \qquad \dot{v} = \frac{(\beta c)^2}{2l}, \qquad \tau = \frac{v}{\dot{v}} = \frac{2l}{\beta c}, \tag{18}$$

wo l der ganze Beschleunigungsweg, τ die ganze Beschleunigungszeit ist.

Wir haben zuzusehen, was an die Stelle dieser Fallformeln vom Standpunkt des § 3 ($\dot{v}_0$ konstant während des Aussendungsvorganges) tritt.[1]) Den Zusammenhang zwischen l und v_0 liefert uns hier wie bei den gewöhnlichen Fallformeln der Satz der lebendigen Kraft. Die auf das Elektron bei seiner Beschleunigung wirkende Kraft ist (Gleichung (9)):

$$m_{\text{long}} \dot{v} = m_0 \dot{v}_0,$$

sie ist nach der Annahme vom Anfang des § 3 auf dem ganzen Beschleunigungswege konstant; daher ihre Arbeit:

$$m_0 \dot{v}_0 l,$$

und nach dem Satze der lebendigen Kraft:

$$m_0 \dot{v}_0 l = m_0 c^2 \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \dot{v}_0 = \frac{c^2}{l} \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{19}$$

[1]) Es handelt sich dabei um die Formeln der sogenannten Hyperbelbewegung.

Den Zusammenhang zwischen τ (Beschleunigungszeit) und $\dot{v}_0$ andrerseits gibt am einfachsten der Impulssatz.

Nach diesem ist das Zeitintegral der wirkenden (konstanten) Kraft $m_0 \dot{v}_0 \tau$ gleich der erzeugten Bewegungsgröße

$$m_0 \frac{\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

also mit Rücksicht auf (19)

$$(19\text{a}) \qquad m_0 \dot{v}_0 \tau = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \tau = \frac{l}{c} \frac{\beta}{1-\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Aus (17) und (19) folgt:

$$(20) \qquad \frac{E_\beta}{E_\gamma} = \frac{6\pi c^2 l}{e\left(\frac{e}{m_0}\right)} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}.$$

Da nach unserer Auffassung der Beschleunigungsweg l ein Bruchteil der molekularen Wirkungssphäre sein muß, ist durch diese Formel das Verhältnis $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$ auf eine bekannte Größenordnung zurückgeführt und in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der β-Strahlen gesetzt. Unter der (vorläufigen) Annahme, daß l von dieser Geschwindigkeit unabhängig sei, sagt Gleichung (20) aus, daß die Energie der γ-Strahlung einen um so größeren Bruchteil von der Energie der zugehörigen β-Strahlung ausmachen wird, je schneller die betreffende β-Strahlung ist.

So hypothetisch die bisherigen Betrachtungen schon sind, wollen wir doch versuchsweise durch Einführung einer neuen Hypothese sie einen Schritt weiterführen, um das Verhältnis $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$ durch lauter bekannte Größen auszudrücken und als reine Funktion der Geschwindigkeit anzugeben. Wir übertragen nämlich die Fundamentalhypothese der Planckschen Strahlungstheorie auf die radioaktiven Emissionen und nehmen an, daß

bei jeder solchen Emission gerade ein Wirkungsquantum h abgegeben wird. Die „Wirkung" einer Emission (Zeitintegral der Energie) setzen wir gleich Beschleunigungszeit τ mal emittierter Gesamtenergie[1]) $E + E_p$, Gleichung (16c); also

$$(21)\qquad \tau \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = h, \quad \tau = \frac{h}{m_0 c^2}\sqrt{1-\beta^2}$$

oder wegen (19a)

$$(21\text{a})\qquad l = \frac{h}{m_0 c}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}(1-\sqrt{1-\beta^2}).$$

Hiernach würde τ mit zunehmender Geschwindigkeit β abnehmen wie $\sqrt{1-\beta^2}$, l bei kleinem β zunächst zunehmen wie β, bei großem β ebenfalls abnehmen wie $\sqrt{1-\beta^2}$. Tragen wir diesen Wert von l in (20) ein, so wird:

$$(22)\qquad \frac{E_\beta}{E_\gamma} = \frac{6\pi c h}{e^2}\frac{1-\beta^2}{\beta^2}(1-\sqrt{1-\beta^2}).$$

Wir wollen diese Formeln qualitativ und quantitativ prüfen. Vorab sei auf die große Unsicherheit dieser Prüfung hingewiesen. Sie beruht einmal darin, daß die β-Strahlen der meisten Präparate nicht homogen sind und bestenfalls in einige homogene Gruppen aufgelöst werden können, sodann darin, daß die Energie der β- und γ-Strahlen durch das Ionisationsvermögen, also gewissermaßen in willkürlichen und nicht recht vergleichbaren Einheiten, gemessen wird. Die folgenden Zahlen

---

[1]) Oder soll man hierfür, wie es später für den Fall der Röntgenstrahlen motiviert wird, nur die kinetische Energie E_β setzen? (22) würde dann durch (22a) zu ersetzen sein. Übrigens ist der Unterschied für große β nicht wesentlich, da wie oben bemerkt für $\beta = 1$ Gesamtenergie und kinetische identisch werden und daher auch (22) in (22a) asymptotisch übergeht.

Ferner: Soll man die „Wirkung" statt durch das Produkt aus der ganzen Beschleunigungszeit in die Gesamtemission lieber messen durch das Integral der Wirkungselemente, d. h. der Produkte aus Zeitelement mal Augenblickswert der emittierten Energie? Dann würde sich in der Tabelle von p. 29 ein etwas kleinerer Wert von h ergeben, nämlich bei RaE, UrX, RaC bez. $\frac{7}{8}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{5}$ der dort angegebenen Zahl.

mögen daher nicht eigentlich als eine Bestätigung unserer theoretischen Formeln angesehen werden, sondern vielmehr als eine Aufforderung an die radioaktive Forschung, das Verhältnis zwischen β- und γ-Strahlenergie genauer nachzuprüfen.

Wir werden uns auf die folgenden Daten stützen, die selbst keineswegs gesichert[1]) sind:

	Ra E	Ur X	Ra C
β	0,78	0,92	0,95
$\frac{E'_\beta}{E'_\gamma}$	6000	5000 . . . 1000	100
$\frac{E_\beta}{E_\gamma}$	120	44 . . . 9	2

Hier bedeutet $\frac{E'_\beta}{E'_\gamma}$ das experimentell gefundene Verhältnis der Ionisationswirkung der β- und γ-Strahlen in derselben Ionisationszelle. Ist ihre in Betracht kommende Ausdehnung a klein gegen die Reichweite der β- und γ-Strahlen, so hält sie von der auffallenden Energie E_β bzw. E_γ den Bruchteil zurück:

$$E'_\beta = \nu_\beta\, a\, E_\beta, \qquad E'_\gamma = \nu_\gamma\, a\, E_\gamma,$$

wo ν_β und ν_γ die Absorptionskoeffizienten der Gasfüllung sind. Diese Bruchteile E'_β und E'_γ sind proportional den Anzahlen der gebildeten Ionen und den Ionisationsströmen; aus ihrem Verhältnis folgt nach den vorangehenden Gleichungen das gesuchte Verhältnis:

$$\frac{E_\beta}{E_\gamma} = \frac{\nu_\gamma}{\nu_\beta}\frac{E'_\beta}{E'_\gamma}.$$

Die in Frage kommenden Absorptionskoeffizienten ν_β und ν_γ sind im folgenden Paragraphen tabellarisch zusammengestellt; da beide annähernd der Dichte des absorbierenden Mittels pro-

[1]) Vgl. eine soeben erschienene Arbeit von Russel und Soddy, Phil. Mag. 21, 130, 1911.

portional sind, wird ihr Verhältnis von dem Material der Gasfüllung unabhängig. Für Ra E ist z. B. $\nu_\beta : \nu_\gamma = 15 : 0{,}3$ und $\frac{E'_\beta}{E'_\gamma} = 6000$, also:

$$\frac{E_\beta}{E_\gamma} = 6000 \frac{0{,}3}{15} = 120.$$

Im einzelnen ist folgendes zu bemerken:

1. Der Wert von β für Ra E folgt aus Ablenkungsversuchen von H. W. Schmidt.[1]) Diese ergaben RH (Krümmungsradius der Bahn × Magnetfeld) = 2200 Gauß cm. Da

$$RH = \frac{v\,m}{e}$$

(e ist hier in gewöhnlichen elektromagnetischen Einheiten gemessen) und nach der Relativtheorie

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

so hat man also:

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{RH}{c}\,\frac{e}{m_0} = \frac{2200}{3.10^{10}}\,1{,}7.10^7 = 1{,}25,$$

woraus der angebene Wert $\beta = 0{,}78$ folgt. In derselben Arbeit findet Schmidt die Intensität der γ-Strahlung von Ra E zu 0,16 pro Mille der β-Strahlintensität, was dem angegebenen Werte $E'_\beta : E'_\gamma = 6000$ entspricht.

2. Für die harte β-Strahlung von Ur X findet derselbe Autor[2]) $v = 2{,}76.10^{10}$, entsprechend dem angegebenen Werte $\beta = 0{,}92$, und für $\frac{E'_\beta}{E'_\gamma}$ bei Ur X den Wert 1000.[3]) Der Wert

[1]) Physikal. Zeitschr. 8, 361, 1907.

[2]) Physikal. Zeitschr. 10, 6, 1909. Nach Ablenkungsversuchen von v. Baeyer und Hahn bestehen die β-Strahlen von Ra E und von Ur X (im Gegensatz zu den sehr inhomogenen Strahlen von Ra C) aus wenigen in sich ziemlich homogenen Gruppen, vgl. Physik. Zeitschr. 11, 488, 1910.

[3]) Ann. Phys. 23, 671, 1907, vgl. Anm. p. 681.

5000 ergibt sich aus Versuchen von Soddy und Russell,[1]) nach denen die γ-Strahlenergie von UrX zu derjenigen eines Radiumpräparates von gleicher β-Strahlintensität sich verhält wie 1 : 50. Nehmen wir also das Verhältnis $\frac{E'_\beta}{E'_\gamma}$ für Ra (d. i. im wesentlichen RaC) nach Rutherford gleich 100 an, so folgt für dasselbe Verhältnis bei UrX der angegebene Wert 5000.

3. Der Wert $\beta = 0{,}95$ für die β-Strahlen des Radiums ergibt sich aus Ablenkungsversuchen von W. Wilson,[2]) bei denen der Höchstwert von RH (vgl. unter 1) 5280 betrug; wegen der starken Inhomogenität der β-Strahlen des Ra ergaben sich daneben natürlich auch viel kleinere Werte von RH (bis 1950 Gauß cm). Aus $RH = 5280$ folgt nach der unter 1. angeführten Rechnung $\beta = 0{,}95$. Wir kommen im § 6 auf die Schätzung der Höchstgeschwindigkeit oder Ursprungsgeschwindigkeit der β-Strahlen des Ra zurück.

Unsere Tabelle zeigt, daß das von uns vermutete Gesetz qualitativ jedenfalls zutrifft, daß nämlich die verhältnismäßige γ-Strahlintensität um so kleiner, also das Verhältnis $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$ um so größer ist, je geringer die Geschwindigkeit der β-Strahlen.

Mehr erfahren wir durch eine quantitative Prüfung der Formeln (20) und (22). Hierbei wird es einmal darauf ankommen, aus (20) den Beschleunigungsweg l auszurechnen und mit den Moleküldimensionen zu vergleichen, andrerseits aus (22) die Größe h zu bestimmen und mit dem Planckschen h zu vergleichen.

Da unser e in elektrostatischen rationellen (Heavisideschen) Einheiten gemessen ist, haben wir, wenn e_{stat} und e_{magn} die in gewöhnlichen elektrostatischen oder elektromagnetischen Einheiten gemessene Elektrizitätsmenge bedeuten:

$$e^2 = 4\pi e_{\mathrm{stat}}^2 = 4\pi c\, e_{\mathrm{stat}} \cdot e_{\mathrm{magn}}.$$

---

[1]) Phil. Mag. 18, 620, 1909.

[2]) Proc. Roy. Soc. (A) 84, 141. 1910.

Nun ist:

$$e_{\text{stat}} = 4{,}7.10^{-10}, \qquad \frac{e_{\text{magn}}}{m_0} = 1{,}7.10^{7}.$$

Daher wird der Faktor in Gleichung (20):

$$\frac{6\pi c^2}{e\left(\frac{e}{m_0}\right)} = \frac{3}{2}\,\frac{c}{e_{\text{stat}}\left(\frac{e_{\text{magn}}}{m_0}\right)} = \frac{3}{2}\,\frac{3.10^{10}}{4{,}7.10^{-10}\cdot 1{,}7.10^{7}} = \frac{10^{13}}{1{,}8}$$

und Gleichung (2) ergibt:

$$l = 1{,}8.10^{-13}\,\frac{E_\beta}{E_\gamma}\,\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Andrerseits wird der Faktor in Gleichung (22):

$$\frac{6\pi c}{e^2} = \frac{3}{2}\,\frac{c}{e^2_{\text{stat}}} = \frac{10^{30}}{4{,}9}.$$

also nach einer kleinen Umformung:

$$h = 4{,}9.10^{-30}\,\frac{E_\beta}{E_\gamma}\cdot\frac{1+\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2}.$$

Aus diesen Formeln und den Daten der vorigen ist die folgende Tabelle berechnet:

	Ra E	Ur X	Ra C
$l =$	3.10^{-11}	$2.10^{-11}\ldots 4.10^{-12}$	10^{-12}
$h =$	$2{,}4.10^{-27}$	$1{,}9.10^{-27}\ldots 3{,}9.10^{-28}$	$1{,}4.10^{-28}$
$\frac{E_\beta}{E_\gamma} =$	330	150	100

Die erste Zeile zeigt, daß der Beschleunigungsweg l ein sehr kleiner Bruchteil der Moleküldimensionen (10^{-8}) ist. Ein Widerspruch gegen die der Gleichung (20) zu Grunde liegenden Anschauungen ist darin nicht zu erblicken. Ein solcher würde sich nur ergeben, wenn $l > 10^{-8}$ gefunden würde.

Die zweite Zeile zeigt, zumal in ihren ersten Ziffern, einen Wert von h, der durchaus von der Größenordnung des

Planckschen $h = 6{,}55.10^{-27}$ ist. Besonders groß ist der Unterschied in unserem Werte von h für Ra C; hier sind aber auch die benutzten Daten besonders unsicher wegen der starken Inhomogenität der betreffenden β-Strahlen und der vermutlichen Ungenauigkeit des Grenzwertes $\beta = 0{,}95$. Offenbar reicht das Beobachtungsmaterial nicht aus, um für oder gegen die Frage zu entscheiden, ob die radioaktiven Emissionen mit der Planckschen Theorie des Wirkungsquantums zusammenhängen. Daß ein solcher Zusammenhang der Größenordnung nach bestehen kann, schien mir jedenfalls sehr bemerkenswert.

Die dritte Zeile gibt diejenigen Werte des Energieverhältnisses, die sich aus Gleichung (22) mit $h = 6{,}55.10^{-27}$ ergeben.

Diese berechneten Werte fallen nicht so schnell mit wachsendem β ab, wie die aus den Beobachtungen geschlossenen der vorigen Tabelle. Sie zeigen dieselbe Übereinstimmung der Größenordnung nach resp. dieselben Abweichungen wie die vorige Zeile, nur von einer anderen Seite gesehen.

Wir können aber unsere Formeln (20) und (22) im Gebiete der Röntgenstrahlung einer wesentlich schärferen Prüfung unterwerfen dank einer Untersuchung von W. Wien,[1]) in der die Energie der Röntgenstrahlen E_r im Verhältnis zur Energie der auffallenden Kathodenstrahlen E_k und zwar auf thermischem Wege, also in absolutem Maße, bestimmt wurde. Wien findet

$$\frac{E_r}{E_k} = 2 \cdot 1{,}35.10^{-3}.$$

Hier meint E_r die gesamte Energie der Röntgenstrahlen, die von der Antikathode ausgeht resp. in sie hineingeht, wobei der letztere nicht mitgemessene Bestandteil durch den Faktor 2 berücksichtigt werden soll. Indessen haben wir zum Vergleich mit unseren Formeln wahrscheinlich nur den polarisierten Anteil $E_{r\,\mathrm{pol}}$ einzusetzen, der nach unserer Anschauung allein

[1]) Wüllner, Festschrift, Aachen 1905 und Annalen der Physik 18, 991, 1905.

seinen Ursprung in dem Bremsvorgange hat. Nach den Messungen von Baßler[1]) beträgt derselbe bei verschiedenen Röhren zwischen $^1/_{10}$ und $^1/_{20}$ der ganzen Energie (Platinantikathode). Wir setzen also etwa:

$$\frac{E_{r\,\mathrm{pol}}}{E_k} = 1{,}35 . 10^{-4}.$$

Die Geschwindigkeit seiner Kathodenstrahlen bestimmt Wien durch Spannungsmessungen zu $\beta = 0.46$; nach der Relativitätstheorie berechnet liefern sie statt dessen $\beta = 0{,}43$. Wir haben also für

$$\beta = 0{,}43 \cdots \frac{E_k}{E_{r\,\mathrm{pol}}} = \frac{10^4}{1{,}35} = \text{ca. } 7000.$$

Dieses Verhältnis ist dem Verhältnis $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$ zu vergleichen Denken wir es uns in die Tabelle von p. 26 mit dem zugehörigen Werte von β eingetragen, so setzt es die Tabelle nach der Richtung kleinerer Geschwindigkeiten fort und gibt ein weiteres Anwachsen von $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$ bei abnehmendem β.

---

[1]) Dissertation, München 1908. Annalen der Physik 28, 808, 1909. Wenn Baßler bei Röhre II unter 90° Azimut $x = 5\,\%$ findet, so bedeutet dies, unter a die gesamte Emission in dieser Richtung, unter b die unpolarisierte Emission verstanden:

$$x = \frac{a-b}{a+b}, \quad \text{also} \quad \frac{a-b}{a} = \frac{2x}{1+x} = \frac{10}{105}.$$

Das Azimut von 90° liegt der Richtung maximaler Emission der polarisierten Strahlung nahe. Die durchschnittliche Stärke der polarisierten Emission beträgt etwa die Hälfte der maximalen, also ist ungefähr

$$\frac{E_{r\,\mathrm{pol}}}{E_r} = \frac{1}{2}\,\frac{a-b}{a} = \frac{x}{1+x} = \frac{5}{105}.$$

Für die sehr harten Wienschen Strahlen dürfte der von Baßler gefundene kleinste Wert $x = 5\,\%$ zutreffen. Ich habe daher im Text mit $\frac{E_{r\,\mathrm{pol}}}{E_r} = \frac{1}{20}$ gerechnet.

Aus Gleichung (20) läßt sich jetzt der „Bremsweg“ l berechnen. Mit dem oben benutzten Zahlenwert von

$$\frac{6\pi c^2}{e\left(\frac{e}{m_0}\right)}$$

ergibt sich:

$$l = 1{,}8.10^{-13} \frac{E_k}{E_{r\,\mathrm{pol}}} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 6.10^{-10},$$

also wieder ein Wert, der ein kleiner Bruchteil der Moleküldimensionen ist und der sich an die Tabelle der l-Werte von p. 29 links angliedert.

Wir betrachten andrerseits die „Bremsdauer“ τ und die während derselben von dem bremsenden Molekül absorbierte Energie. Während wir oben als emittierte Energie die Gesamtenergie des β-Strahls $E + E_p$ ansetzen mußten, scheint es bei dem Bremsvorgange naturgemäßer, hiervon, wie es auch Wien tut, die elektrostatische Energie und dann auch die dem Elektron verbleibende Spannungsenergie im Ruhezustande E_{0p} abzuziehen, d. h. (vgl. den Anfang dieses Paragraphen) die absorbierte Energie der Bremsung direkt der kinetischen Energie des Kathodenteilchens gleichzusetzen. Bei dieser Berechnungsweise setzen wir also voraus, daß das bremsende Molekül nur die Geschwindigkeit vernichtet, aber nicht das Elektron und seine Feldenergie in seinen Verband aufnimmt. Die aufgenommene kinetische Energie wird, wie dies in unseren Formeln enthalten ist, nur zum kleinsten Teil als polarisierte Röntgenstrahlung wieder abgegeben; der größte Teil setzt sich in Wärmeenergie um oder erregt, wie wir annehmen müssen, die (weichere) unpolarisierte Fluoreszenzstrahlung des Moleküls.

Von diesem Standpunkte aus ist die „Wirkung“ des Bremsvorganges

$$\tau E_{\mathrm{kin}} = \tau \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right). \tag{21 b}$$

An die Stelle von (21) und (21a) tritt also

(21 c) $$\tau = \frac{h}{m_0 c^2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\sqrt{1-\beta^2}}, \quad l = \frac{h}{m_0 c} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}.$$

Aus (20) ergibt sich daher an Stelle von (22):

(22 a) $$\frac{E_k}{E_{r\,\mathrm{pol}}} = \frac{6\pi c h}{e^2} \frac{1-\beta^2}{\beta^2}.$$

Hieraus folgt mit dem oben berechneten Werte $\frac{6\pi c}{e^2} = \frac{10^{30}}{4{,}9}$, dem Planckschen $h = 6{,}55 . 10^{-27}$ und mit $\beta = 0{,}43$:

$$\frac{E_k}{E_{r\,\mathrm{pol}}} = 6000.$$

Die Übereinstimmung mit dem Wienschen Beobachtungswerte 7000, der allerdings selbst erst durch die Baßlerschen Messungen auf seinen polarisierten Anteil korrigiert war, ist überraschend.[1]) Dementsprechend ergibt sich auch mit diesem Wienschen Werte eine sehr gute Annäherung an das Plancksche h, wenn wir umgekehrt h aus (22 a) berechnen, nämlich:

$$h = 8 . 10^{-27}.$$

Rechnen wir statt mit (22 a) mit der früheren Formel (22), indem wir als absorbierte die ganze Energie des ankommenden Elektrons in Anschlag bringen, so ergibt sich analog in runden Zahlen:

$$\frac{E_k}{E_{r\,\mathrm{pol}}} = 600, \quad h = 8 . 10^{-26}.$$

[1]) Ich möchte auch darauf hinweisen, daß E. Carter (Dissertation Würzburg, Ann. Phys. 21, 955, 1906) das Verhältnis $\frac{E_r}{E_k}$ proportional der Spannung, also proportional β^2 findet. Dies würde im wesentlichen die in (22 a) angegebene Abhängigkeit von der Geschwindigkeit sein, wenn man annehmen dürfte, daß E_{pol} ein von der Spannung unabhängiger Bruchteil der Gesamtenergie E_r der Röntgenstrahlen ist. Die Messungen von Carter sowie diejenigen von Angerer (Dissertation München, Ann. Phys. 21, 112, 1906) bestätigen durchaus die im Text benutzte Wiensche Beobachtungszahl für $\frac{E_r}{E_h}$.

Bestimmen wir andrerseits (vgl. die Anm. zu p. 25) die „Wirkung“ des Bremsvorganges aus dem Zeitintegral der kinetischen Energie statt wie in (21 b) aus dem Produkt der Bremszeit τ in die gesamte kinetische Energie, so ergibt sich aus dem Planckschen h bez. aus dem Wienschen Energieverhältnis

$$\frac{E_k}{E_{r\,\mathrm{pol}}} = 17000 \text{ bez. } h = 3.\ 10^{-27}.$$

Die in diesem und dem folgenden Paragraphen benutzten radioaktiven Daten verdanke ich Herrn H. W. Schmidt, dessen sachkundiger Rat mich auch bei der Verwendung dieser Daten wesentlich unterstützt hat.

§ 5. Über die Härte der γ-Strahlen und die Impulsbreite der Röntgenstrahlen.

Als theoretisches Maß für die Härte der γ-Strahlen werden wir ihre Impulsbreite anzusehen haben. Sie ergibt sich leicht aus Figur 1 und zwar, wie ich schon früher für Röntgenstrahlen ausgeführt habe, für die verschiedenen Azimute φ von verschiedener Größe. Sehen wir nämlich in Figur 1 O' als den Anfangspunt, O'' als den Endpunkt des Beschleunigungsweges an, so haben wir um O' eine Kugel von dem willkürlichen Radius cT (T = der seit dem Beginn der Beschleunigung verflossenen Zeit), um O'' eine Kugel vom Radius $c(T - \tau)$ zu beschreiben (τ = der ganzen Beschleunigungsdauer). Diese beiden Kugeln haben aber die Exzentrizität l und geben daher in verschiedenen Azimuten eine verschiedene Dicke der Störungszone oder eine verschiedene Impulsbreite. Der Mittelwert der Impulsbreite beträgt nach dem Gesagten

$$\lambda_m = c\tau \tag{23}$$

und entspricht dem Azimut $\varphi = \frac{\pi}{2}$; ihr Minimalwert gehört ersichtlich zum Azimut $\varphi = 0$ und beträgt $\lambda_{\min} = c\tau - l$, ihr Maximalwert tritt für $\varphi = \pi$ auf und beträgt $\lambda_{\max} = c\tau + l$,

wo $l = O' O''$ der ganze Beschleunigungsweg ist. Für ein beliebiges φ gilt offenbar

(23a) $$\lambda = c\tau - l\cos\varphi,$$

wo $l\cos\varphi$ die Strecke $O'Q$ der Figur 1 bedeutet. Die Wahl des Buchstabens λ soll an die Analogie dieser Größe zur Wellenlänge des periodischen Lichts erinnern.

Wir berechnen das Verhältnis $\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}$ einmal unter der Annahme konstanter Beschleunigung $\dot{v}$, wie ich sie früher für den Fall der Röntgenstrahlen machen durfte. Dann ist nach Gleichung (18) $c\tau = \frac{2l}{\beta}$, also:

$$\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} = \frac{1 - \frac{1}{2}\beta}{1 + \frac{1}{2}\beta}.$$

Sodann unter der Annahme der konstanten Eigenbeschleunigung $\dot{v}_0$. Alsdann ist nach (19a)

$$c\tau = \frac{l\beta}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}},$$

also:

$$\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} = \frac{\beta - 1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta + 1 - \sqrt{1 - \beta^2}} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

Der Unterschied beider Formeln tritt natürlich wieder erst in der Nähe von $\beta = 1$ zutage. Für $\beta = \frac{1}{2}$ liefert z. B. die erste den Wert $\frac{3}{5} = 0{,}60$, die zweite den wenig davon verschiedenen Wert $\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}58$; dagegen folgt für $\beta = \frac{9}{10}$ aus der ersten $\frac{11}{29} = 0{,}38$, aus der zweiten dagegen $\sqrt{\frac{1}{19}} = 0{,}23$. Die Unsymmetrie in der Verteilung der Härte auf die verschiedenen Azimute wird also bei sehr schnellen Strahlen gesteigert, wenn wir dabei, wie es sein muß, die (nach der Relativitätstheorie berechnete) Veränderlichkeit der Masse berücksichtigen.

Für den Mittelwert der Impulsbreite ergibt sich aus (23) und (18) (konstante Beschleunigung) der Wert

(24) $$\lambda_m = \frac{2l}{\beta},$$

der sich nach (23) und (19a) (konstante Eigenbeschleunigung) berichtigt zu:

$$\lambda_m = l \frac{\beta}{1 - \sqrt{1-\beta^2}} = l \frac{1 + \sqrt{1-\beta^2}}{\beta}. \tag{24 a}$$

Auch dieser Wert wäre für γ-Strahlen noch weiter zu berichtigen. Zu dem Azimut $\varphi = \frac{\pi}{2}$, auf das sich dieser Wert λ_m bezieht (vgl. (23) und (23a)), gehört ja nach unseren Figuren bei harten γ-Strahlen nur eine sehr geringfügige Energie; vielmehr wird das Maximum der Energie nach den Näherungsformeln (5) und (6) unter einem Winkel $\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}\gamma}$ ausgestrahlt, zu dem bei kleinem γ ein Wert von

$$\cos\varphi = 1 - \tfrac{1}{3}\gamma = 1 - \tfrac{1}{3}(1-\beta)$$

gehört. Für diesen Winkel wird die zugehörige Impulsbreite nach (23a) und (19a):

$$\lambda = l\left(\frac{1+\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} - 1 + \tfrac{1}{3}(1-\beta)\right)$$

oder

$$\lambda = l\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\left(1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\left(1+\frac{\beta}{3}\right)\right). \tag{24 b}$$

Der genaue Wert wäre, wenn $\varphi = \varphi_m$ den Winkel maximaler Emission bedeutet, nach Gleichung 23a:

$$\lambda = l\left(\frac{1+\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} - \cos\varphi_m\right). \tag{24 c}$$

Allen diesen Formeln für die mittlere oder maßgebende Impulsbreite ist gemeinsam eine gesetzmäßige Abnahme der Impulsbreite mit zunehmender Geschwindigkeit. Die Impulsbreite ist ∞ für $\beta = 0$ und fällt für $\beta = 1$ bis zu $2l$ nach (24), bis zu l nach (24a), bis zu 0 nach (24b) und (24c) herab. Der Abnahme der Impulsbreite entspricht nach allgemeiner Anschauung eine Zunahme der Härte. Diese wächst also, unter der vorläufigen Voraussetzung eines im wesentlichen gleich

bleibenden Wertes von l, sowohl bei Röntgen- wie bei γ-Strahlen mit wachsender Geschwindigkeit der erzeugenden Kathoden- oder β-Strahlen.

Als Beispiel diene die folgende Tabelle; in dieser bedeutet ν_β bez. ν_γ den Asorptionskoeffizienten der betreffenden β- oder γ-Strahlen für die Längeneinheit in cm^{-1}, D die Dichte des absorbierenden Materials $\left(\frac{\nu}{D}\right.$ ist mit einiger Annäherung vom Material unabhängig$\left.\right)$; die Zahlen für RaE sind der im vorigen Paragraphen zitierten Arbeit von Schmidt (Physikal. Zeitschr. 8), diejenigen für UrX und RaC der ebenda zitierten Arbeit von Soddy und Russell resp. von W. Wilson (vgl. Tabelle 2, p. 147) entnommen; λ ist für Röntgenstrahlen nach (24a), für die verschiedenen γ-Strahlen nach (24b) berechnet.

	Röntgenstr.	RaE	UrX	RaC
$\beta =$	0,2 bis 0,5	0,78	0,92	0,95
$\frac{\nu_\beta}{D} =$	—	15	5	1,8
$\frac{\nu_\gamma}{D} =$	4 bis 3	0,3	0,047	0,040
$\lambda =$	$10\,l$ bis $4\,l$	$1,2\,l$	$0,55\,l$	$0,40\,l$

Durch die Formeln dieses Paragraphen wird also λ mit dem Bremsweg bez. Beschleunigungsweg l in Beziehung gesetzt und erweist sich von derselben Größenordnung wie l. Diese Beziehung ist im wesentlichen geometrischer Natur. Der absolute Wert von λ und seine Abhängigkeit von β bleibt unbekannt, solange wir nicht l kennen.

Nun haben wir aber im vorigen Paragraphen, Gleichung (20), l mit $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$ bez. bei Röntgenstrahlen mit $\frac{E_k}{E_{r\,\mathrm{pol}}}$ in Zusammenhang gebracht. Wir können also auch λ durch diese Energieverhältnisse ausdrücken und dadurch auf Beobachtungsdaten reduzieren. Für harte γ-Strahlen ergibt sich so

nach Gleichung (24 b) und (20) als Impulsbreite für die Richtung maximaler Emission:

$$\lambda = \frac{e\left(\frac{e}{m_0}\right)}{6\,\pi\,c^2}\,\frac{E_\beta}{E_\gamma}\left(1 + \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\left(1+\frac{\beta}{3}\right)\right); \tag{25}$$

ähnlich für Röntgenstrahlen nach Gleichung (24 a) und (20) als Impulsbreite für die Richtung $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (oben mit λ_m bezeichnet):

$$\lambda = \frac{e\left(\frac{e}{m_0}\right)}{6\,\pi\,c^2}\,\frac{E_k}{E_{r\,\mathrm{pol}}}\,\frac{1+\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{25 a}$$

Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$\frac{e^2}{6\,\pi\,c^2\,m_0} = 1{,}8.10^{-13}$$

und nach Wien-Baßler

$$\frac{E_k}{E_{r\,\mathrm{pol}}} = \frac{10^4}{1{,}35}, \quad \beta = 0{,}43,$$

also für die recht harten Wienschen Röntgenstrahlen:

$$\lambda = 3.10^{-9}. \tag{26}$$

Für die γ-Strahlen ergibt sich analog nach Gleichung (25) und der Tabelle von p. 26:

	RaE	UrX	RaC
$\lambda =$	3.10^{-11}	$1.10^{-11} \ldots 2.10^{-12}$	5.10^{-13}

Die Abnahme der Impulsbreite mit wachsender Geschwindigkeit gilt also für die ganze Reihe von den Röntgenstrahlen bis zu den γ-Strahlen des Radiums; ihr entspricht qualitativ die Zunahme der durch den Absorptionskoeffizienten bestimmten Härte in der Tabelle von p. 37.

Nehmen wir die Hypothese des vorigen Paragraphen hinzu,

nach der das Energieverhältnis $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$ bez. $\frac{E_k}{E_{r\,\mathrm{pol}}}$ mit dem Planckschen h zusammenhängt, so ergibt sich eine Formel, die λ ohne Zuhilfenahme von Energiebeobachtungen lediglich aus der Geschwindigkeit bestimmt. Man erhält so aus (25) und (22) für γ-Strahlen:

$$(27)\qquad \lambda = \frac{h}{m_0 c}\,\frac{1-\beta^2}{\beta^2}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\left(1+\frac{\beta}{3}\right)\right)$$

und aus (25a) und (22a) für Röntgenstrahlen einfacher:

$$(27\,\mathrm{a})\qquad \lambda = \frac{h}{m_0 c}\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}\left(1+\sqrt{1-\beta^2}\right) = \frac{h}{m_0 c}\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt mit

$$h = 6{,}55.10^{-27}, \qquad \beta = 0{,}43$$

und

$$\frac{1}{m_0 c} = \frac{e_{\mathrm{magn}}}{m_0}\,\frac{1}{e_{\mathrm{stat}}} = \frac{1{,}7.10^{7}}{4{,}7.10^{-10}}$$

der mit dem obigen Werte (26) nahe übereinstimmende Wert

$$(26\,\mathrm{a})\qquad \lambda = 2.10^{-9}.$$

Diese nahe Übereinstimmung entspricht natürlich dem Umstande, daß wir im vorigen Paragraphen das von Wien beobachtete und auf Polarisation korrigierte Energieverhältnis $\frac{E_k}{E_{r\,\mathrm{pol}}}$ sehr nahe aus dem Planckschen Werte von h berechnen konnten.

Der zu (27a) führende Weg über (22a) und (25a) war ersichtlich recht indirekt. Der Einfachheit des Resultates entspricht besser die folgende direkte Ableitung. Die Impulsbreite für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist nach (23a)

$$\lambda = c\,\tau;$$

die Hypothese des Wirkungsquantums, angewandt auf den Absorptionsvorgang der Bremsung, liefert:

(28) $$\tau E_{\text{kin}} = h,$$

also in Übereinstimmung mit (27a):

(28 a) $$\lambda = \frac{ch}{E_{\text{kin}}} = \frac{h}{m_0 c} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Der etwas komplizierte Ausdruck, den wir in (27) fanden, rührt nur daher, daß wir als emittierte Energie der radioaktiven Prozesse nicht die kinetische, sondern die gesamte Energie $E + E_p$ nahmen und daß wir die Impulsbreite nicht für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, sondern für $\varphi = \varphi_{\max}$ bestimmten.

Der Wert (26) für λ ist etwa 25 mal so groß wie der von Wien in der früher zitierten Arbeit berechnete Wert $\lambda = 1{,}15 . 10^{-10}$. Der Grund der Abweichung liegt weniger in der Verschiedenheit der Formeln (Wien rechnete damals nach der Absoluttheorie und mit konstanter Verzögerung $\dot{v}$, bei ihm j genannt, wir nach der Relativtheorie mit konstanter Eigenbeschleunigung $\dot{v}_0$) als vielmehr in unserer Reduktion auf den polarisierten Anteil der Röntgenstrahlung, durch welche wir einen Faktor 20 einführten. Offenbar stellt diese unsere Berechnung von λ nur eine Modifikation des ursprünglichen Wienschen Gedankens dar.

Aber auch die Berechnung von λ aus dem Planckschen h ist an sich nicht neu. Sie wurde von Wien[1]) auf die sekundären Kathodenstrahlen, von Stark[2]) auf die primären angewandt. Bei beiden wird die mit (28) analoge Gleichung benutzt:

$$E_{\text{kin}} = h\nu, \quad \nu = \frac{c}{\lambda}.$$

Daß dabei unter Anlehnung an die Optik ν als Schwingungszahl, λ als Wellenlänge bezeichnet und daß E_{kin} nach der gewöhnlichen Formel durch $\frac{mv^2}{2}$ ausgedrückt wird, ist natürlich kein bemerkenswerter Unterschied.

[1]) Göttinger Nachr. 1907.

[2]) Physikal. Zeitschr. 8, 881, 1907.

Um so wesentlicher scheint mir der folgende Unterschied in der Auffassung zu sein. Bei Wien besteht kein Zusammenhang zwischen seiner elektromagnetischen Berechnung von λ vom Jahre 1905 und seiner strahlungstheoretischen vom Jahre 1907. Beide geben recht verschiedene Werte und scheinen sich auszuschließen. Stark ist sogar geneigt, die gewöhnliche elektromagnetische Theorie bei den Elementarprozessen überhaupt und den Röntgenstrahlen insbesondere zu Gunsten der Strahlungstheorie aufzugeben und durch eine Quantentheorie zu ersetzen. Dagegen haben wir hier gesehen, daß beide Gesichtspunkte miteinander wohl verträglich sind. Wir haben die Emission der Röntgenstrahlen, ihrer Verteilung und Stärke nach, unter einfachsten Annahmen, aus der rein elektromagnetischen Theorie berechnet. Dabei blieb eine Konstante unbestimmt, die wir als Eigenverzögerung $\dot{v}_0$ oder als Bremsweg l oder als Bremsdauer τ wählen konnten und über die uns die Theorie des elektromagnetischen Feldes nichts lehren kann. Diese Konstante ist eine Eigenschaft des bremsenden Moleküls; es lag daher nicht fern, sie aus der universellen Eigenschaft aller emittierenden oder absorbierenden Moleküle zu entnehmen, die in dem Planckschen Wirkungsquantum zum Ausdruck kommt. Erst durch dieses Eingreifen der Strahlungstheorie wird die elektromagnetische Theorie der Röntgenstrahlen völlig bestimmt. Beide Theorien schließen sich nicht aus, sondern ergänzen sich.

Das Eingreifen der Strahlungstheorie ist gewissermaßen ein äußerliches. Über den elektromagnetischen Mechanismus des h erfahren wir aus unserer Anwendung desselben auf die Röntgenstrahlung nichts. Sowenig wie die Existenz des Wirkungsquantums den elektromagnetischen Ausbreitungsvorgang stört (sie beeinflußt ihn nur durch Bestimmung eines sonst unbestimmten Parameters), sowenig kann die elektromagnetische Theorie die Existenz des Wirkungsquantums hindern oder erklären. So gut wie in der Optik alle Ergebnisse der Wellentheorie festzuhalten sind, z. B. die Folgerungen aus dem Huyghensschen Prinzip, die Anschauungen über Interferenz-

fähigkeit und Polarisation, so gut wie diese Ergebnisse durch die Plancksche Entdeckung nicht beeinträchtigt, sondern nur in Bezug auf die Entstehung und Vernichtung der optischen Wirkungen ergänzt werden, ebensogut können alle Folgerungen aus der Impulstheorie der Röntgenstrahlen mit dem Wirkungsquantum vereinigt werden, die Struktur und Polarisation der Röntgenstrahlen, von der ich in der genannten früheren Note gehandelt habe, die Ungleichförmigkeit der Härte unter verschiedenen Azimuten, von der im Anfang dieses Paragraphen die Rede war, die Beugung der Röntgenstrahlen, auf die ich demnächst zurückzukommen hoffe.

Aus unserem Zusammenhang zwischen der Stärke und Härte der polarisierten Röntgenstrahlung mit dem Wirkungsquantum ergeben sich eine Reihe von Konsequenzen, die der experimentellen Prüfung wert sind. Die Stärke der polarisierten Strahlung müßte vom Material der Antikathode unabhängig sein nach Gleichung (22a), ebenso ihre Impulsbreite nach Gleichung (27a), die ihrem absoluten Wert nach aus Beugungsbildern[1]) zu entnehmen wäre, die sich aber qualitativ wohl auch in den Absorptionsmessungen zeigen müßte. Es müßte also der polarisierte Anteil bei einer Kohlenantikathode gleich groß sein wie der polarisierte Anteil bei einer Platinantikathode bezogen auf den gleichen Wert der Kathodenstrahlenergie. Der Unterschied beider würde nur in einer verschiedenen Größe des unpolarisierten (Fluoreszenzanteils) liegen. Der polarisierte Anteil müßte in ganz bestimmter Weise, nach Gleichung (22a), von der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen, also der Spannung abhängen, nämlich im wesentlichen der

[1]) Aus Beugungsbildern des polarisierten Anteils (!), die sich schwerlich werden realisieren lassen. Ich habe früher aus den Haga-Windschen Beugungsbildern auf $\lambda = 1{,}3\,10^{-8}$ geschlossen. Dieses λ würde einer geringeren Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen, nämlich, nach Gleichung (27a) berechnet, dem Werte $\beta = 0{,}19$ entsprechen, also etwa der Hälfte des recht hohen Wien'schen Wertes $\beta = 0{,}43$. Jedoch bedarf meine damalige Folgerung der Nachprüfung an den neueren Aufnahmen von Walter und Pohl und ist auch der Methode nach zu verschärfen.

Spannung proportional sein (vgl. die Anm. auf p. 33). Auch bei dem unpolarisierten Fluoreszenzanteil dürfte das Plancksche Wirkungsquantum eine Rolle spielen, wie ich schon früher bemerkte.[1]) An die Stelle unserer Gleichung (27)

$$\tau E_{\text{kin}} = h$$

würde dabei zu treten haben

$$\tau' E' = h,$$

wobei τ' eine Eigenschwingungsdauer des Moleküls wäre und E' die Energie des unpolarisierten Anteils der Röntgenstrahlung von der Frequenz $\frac{1}{\tau'}$. Da E' kleiner sein müßte als die nach der Ausstrahlung des polarisierten Anteils verbleibende Energie $E_{\text{kin}} - E_{r\,\text{pol}}$, so würde sich notwendig ergeben $\tau' > \tau$, d. h. die unpolarisierte Strahlung (resp. ihre verschiedenen Bestandteile) ist weicher wie die polarisierte, was dem Befunde von Baßler entspricht. Bei dem Fluoreszenzanteil würde man also τ' als gegeben durch die Moleküleigenschaften ansehen und E' aus der Planckschen Gleichung berechnen, während wir bei dem polarisierten Anteil E als durch die auffallende kinetische Energie gegeben ansahen und τ durch die Plancksche Gleichung bestimmten. In solcher Weise könnte man mit den verschiedenen Eigenschwingungsdauern τ' verfahren und zu jeder die zugehörige Energie E' bestimmen, von den kürzesten beginnend bis zu den sichtbaren und ultraroten. Der Rest der Energie würde für die Wärmebewegung des Moleküls verbleiben. Indessen sind solche weitergehenden Folgerungen zur Zeit wohl verfrüht.

---

[1]) l. c. Physikal. Zeitschr. 10, 970, 1909. Ich möchte bei dieser Gelegenheit die dortige Bemerkung: „Mit dem ersten „Bremsanteil" der Strahlung scheint mir das Wirkungsquantum nichts zu tun zu haben" zurücknehmen. Ich stand damals unter dem wohl allgemein verbreiteten Eindruck, daß das Wirkungsquantum nur für Vorgänge bestimmter Frequenz ν in Frage kommen könne. Daß unsere Bremsdauer τ an die Stelle des Planckschen $\frac{1}{\nu}$ treten könne, habe ich erst jetzt gesehen.

§ 6. Diskussion der Voraussetzungen.

Für die Anwendung unserer Überlegungen auf die Schwankungserscheinungen muß die Hauptfrage sein: Sendet Ra, genauer gesagt RaC, β-Strahlen von so großer Geschwindigkeit aus, wie wir sie in Fig. 3 des § 2 voraussetzten?

1. Direkte Messung der Höchstgeschwindigkeiten.

Kaufmann[1]) gibt eine Sichtbarkeitsgrenze seiner photographischen Kurven an, aus der sich nach der Relativitätstheorie ein Wert $\gamma = 1 - \beta < \frac{2}{100}$ berechnet. Ähnlich findet Paschen[2]) bei seinen Ablenkungsversuchen einen kontinuierlichen Übergang der β-Strahlgeschwindigkeiten bis zur Grenze der Lichtgeschwindigkeit. Eine neuere Arbeit von W. Wilson, aus der sich $\beta = 0{,}95$ ergeben würde, wurde bereits in § 4 zitiert.

Nun kann man sich schwerlich Umstände vorstellen, durch welche die Geschwindigkeit des β-Teilchens auf seinem Wege erhöht würde, während andrerseits Geschwindigkeitsverluste namentlich innerhalb des spezifisch schweren Radiumkorns, sehr plausibel sind. Aus dem Auftreten der genannten hohen Grenzgeschwindigkeiten wird man also auf das Vorhandensein von gleich hohen Anfangsgeschwindigkeiten und zwar in größerer Häufigkeit, als sie außerhalb des Radiums beobachtet werden, schließen dürfen.

2. Indirekte Bestimmung aus der verhältnismässigen Energie der γ-Strahlen und ihrer Härte.

Die Tabelle von p. 26 für $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$ und die Hypothese des Wirkungsquantums legen den Versuch nahe, den Ursprungswert der Geschwindigkeit der Radium-β-Strahlen aus der zugehörigen γ-Strahlenergie zu berechnen, unter Zugrundelegung

[1]) Ann. Phys. 19, 487, 1906. Vgl. insbesondere in Anhang IV p. 551 den Grenzwert $z = 0{,}06$.

[2]) Ann. Phys. 14, 389, 1904.

der Gleichung (22) und des Planckschen Wertes $h = 6{,}55.10^{-27}$. Setzt man $\delta = \sqrt{1-\beta^2}$, so wird:

$$\frac{1-\beta^2}{\beta^2}(1-\sqrt{1-\beta^2}) = \frac{\delta^2}{1+\delta} = 1{,}6.10^{-3}, \qquad \delta = 4.10^{-2},$$
$$\beta = 1 - 8.10^{-4}.$$

Die verhältnismäßig große Energie der γ-Strahlen des Radiums würde also nach unserer theoretischen Formel auf einen viel größeren Wert für die bei der Emission der β-Strahlen maßgebende Geschwindigkeit der β-Strahlen schließen lassen, als er direkt beobachtet wurde; damit würde sich eine noch viel größere Unsymmetrie und Einseitigkeit der γ-Strahlemission ergeben, als sie Figur 2 selbst für $\beta = 0{,}99$ zeigt. Natürlich ist unser Schluß sehr unsicher, da er außer auf der Hypothese des Wirkungsquantums ganz auf der Größe 2 für $\frac{E_\beta}{E_\gamma}$ beruht.

Auch die Härte der γ-Strahlen des Radiums (vgl. p. 37) gestattet einen ungefähren Schluß auf die Ursprungsgeschwindigkeit der für ihre Aussendung maßgebenden β-Strahlen. Da die Härte der γ-Strahlen von Ra größer als diejenige von UrX ist, wird man auch schließen dürfen, daß das maßgebende β größer als 0,92 sei. Es bleibe aber nicht unerwähnt, daß die p. 26 zitierte Untersuchung von Russell und Soddy die Berechtigung solcher Schlüsse beanstandet.

Neben dieser physikalischen Voraussetzung über die hohen β-Strahlgeschwindigkeiten beim Ra haben wir noch die mathematischen Voraussetzungen zu prüfen, die wir zur Vereinfachung der Rechnung gemacht haben. Sie betreffen den quasistationären Charakter, die Geradlinigkeit und Gleichmäßigkeit des Beschleunigungsvorganges.

a) Quasistationäre Bewegung.

In den Ausgangsformeln 2) und 4) war von der Ausdehnung des Elektrons oder vom „Elektronenradius“ nicht die Rede; auch werden diese Formeln in § 7 nach den Methoden der Relativitätstheorie unter der ausdrücklichen Voraussetzung

eines punktförmigen Elektrons abgeleitet. In der älteren Theorie würde hierdurch für die zuzulassende Beschleunigung eine Grenze[1]) gesetzt werden. Unterhalb dieser Grenze kann man die Bewegung als quasistationär behandeln, d. h. sowohl die Bestimmung des Feldes als auch die Dynamik des Elektrons, letztere durch Einführung einer nur vom augenblicklichen Bewegungszustande abhängigen Masse, vereinfachen; oberhalb dieser Grenze würde sowohl für das Feld wie für die Bewegungsgesetze die Vorgeschichte in Betracht kommen. Diese Grenze würde in unserem Falle etwa bei $\beta = \frac{99}{100}$ liegen, wenn man die hierzu führende Beschleunigung durch das Gesetz des Wirkungsquantums gegeben denkt.

In der Relativitätstheorie dagegen muß man sich einstweilen prinzipiell auf quasistationäre Bewegungen beschränken, ohne deren Grenze angeben oder sie gar überschreiten zu können. Schon die Feldberechnung wird illusorisch bei wirklich beschleunigten Bewegungen, d. h. bei solchen, deren Geschwindigkeitsänderungen nicht mehr klein sind gegen c in derjenigen Zeit, die das Licht braucht, um das Elektron zu überstreichen. Hier würde die Gestalt des Elektrons in Frage kommen; und, wenn man auch über die Ruhgestalt des Elektrons eine spezielle Annahme machen wollte, die man gern vermeiden möchte, so würde doch die Gestalt bei beschleunigter Bewegung derzeit unbekannt sein; denn die einfache Übertragung der Lorentz-Kontraktion auf das Elektron ist wieder nur für quasistationäre Bewegungen widerspruchslos möglich, wie die Untersuchung des relativ-starren Körpers ergeben hat.

Unsere Rechnungen sind daher für die schnellen Geschwindigkeiten der Radioaktivität (nicht für den Fall der Röntgenstrahlen) mit einer gewissen theoretischen Unsicherheit behaftet, die sich zur Zeit nicht heben läßt. Man kann bemerken, daß sich später vielleicht gerade auf diesem Gebiet etwaige über den quasistationären Zustand hinausgehende Ansätze prüfen ließen.

---

[1]) Vgl. Abraham, Theorie der Elektrizität II, § 11. Gleichung (63b).

b) Geradlinigkeit und Gleichmäßigkeit des Beschleunigungsvorganges.

Eine Zickzackbewegung des Elektrons, wie sie bei der Absorption desselben in der Antikathode vielfach in Betracht gezogen wird, die wir aber auch für diesen Fall im folgenden zurückzuweisen haben werden, scheint für den Elementarprozeß der Emission eines β-Teilchens aus dem Radiummolekül keinen rechten Sinn zu haben. Vielmehr wird man hier den Vorgang des Austritts durch eine kontinuierliche Bahn beschreiben können, die durch ihre Tangente im Momente des Austretens, also durch eine Gerade, ersetzt werden kann.

Dagegen scheint die Annahme eines Anwachsens der Geschwindigkeit von 0 bis zu ihrem Endwerte recht willkürlich. Man wird eher geneigt sein, dem Elektron im Innern des instabilen Radiumatoms eine ursprüngliche intraatomistische Geschwindigkeit zuzuschreiben und den Beschleunigungsvorgang nur als Erhöhung dieser Anfangsgeschwindigkeit auf die Größe der Austrittsgeschwindigkeit anzusehen. Wir haben zu betonen, daß bei dieser Auffassung an der Struktur und Symmetrie des γ-Strahls sehr wenig geändert wird, wenn die Austrittsgeschwindigkeit nahe an der Lichtgeschwindigkeit liegt. In der Tat rührt die Unsymmetrie nur von denjenigen Teilen des Beschleunigungsvorganges her (vgl. den Anfang von § 2), in denen die Geschwindigkeit mit c vergleichbar ist; auch ist die Ausstrahlungsenergie dieser Teile so überwiegend, daß eine Abänderung oder Fortlassung der Teile mit kleiner Geschwindigkeit für das Resultat belanglos ist. Dies kommt auch in unserer obigen Rechnung zum Ausdruck. In Gleichung (4) rührte der Term -1 von dem Anfangszustande $\beta=0$ her; dieser Term konnte aber in der Näherung (6) gegen den Beitrag des Endzustandes vollständig vernachlässigt werden. Es würde sich nichts daran ändern, wenn man statt $\beta = 0$ als Anfangsgeschwindigkeit etwa $\beta_0 = \frac{1}{2}$ ansehen wollte. Der fragliche Term würde dann statt -1 lauten:

$$-\frac{1}{(1-\beta_0 \cos \varphi)^4}$$

und konsequenterweise ebenso zu vernachlässigen sein, wenn die Endgeschwindigkeit nahezu c ist. Ähnlich bei der Berechnung der gesamten Ausstrahlung E_γ. Bei der Anfangsgeschwindigkeit β_0 wäre Gleichung (15) zu korrigieren in

$$E_\gamma = \frac{e^2 \dot{v}_0}{6\pi c^2}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}\right).$$

Gleichung (19) in

$$\dot{v}_0 = \frac{c^2}{l}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}\right).$$

Nehmen wir $\beta_0 = \frac{1}{2}$ und $\beta = \frac{9}{10}$, so würde das Zusatzglied eine verhältnismäßige Änderung von $\frac{1}{4}$ bez. $\frac{1}{2}$ des ganzen Wertes bewirken; nehmen wir β_0 nicht so hoch oder β höher, so wird die Änderung noch kleiner. Gegenüber der Unsicherheit der von uns benutzten experimentellen Daten kommt daher die durch den Anfangszustand bedingte Willkür kaum in Frage.

Was endlich die Annahme einer gleichmäßigen Beschleunigung betrifft, so wurde im § 3 gezeigt, daß die Energieverteilung auf die einzelnen Azimute in den beiden Fällen (konstantes $\dot{v}$ und konstantes $\dot{v}_0$) wesentlich übereinstimmt. Wir dürfen daraus wohl weitergehend schließen, daß die besonderen Annahmen über die Art des Beschleunigungsvorganges überhaupt für die Struktur des γ-Strahls, soweit sie für die Schwankungsmessungen in Frage kommt, ziemlich belanglos ist. Größer ist der Einfluß des Beschleunigungsverlaufes auf die Größe der ausgestrahlten Gesamtenergie. In dieser Hinsicht haben wir uns damit begnügt, die nächstliegende Annahme konstanter Eigenbeschleunigung zahlenmäßig zu verfolgen.

Für unsere Theorie der Röntgenstrahlen ist die Annahme wesentlich, daß die ganze Energie des Kathodenteilchens in einem Zuge vernichtet wird, also nicht durch eine Folge von Absorptionsprozessen, wie sie sich bei einem Zickzackwege ergeben würde. Die entsprechende Annahme bei der Emission

der γ-Strahlen lag in der Natur der Sache und entsprach dem einmaligen Austritt des Elektrons aus dem Radiummolekül. Aber auch im Falle der Röntgenstrahlen läßt sie sich als notwendig nachweisen, allerdings nur dann, wenn wir uns auf den Standpunkt der Theorie des Wirkungsquantums stellen. Da dieser Punkt wesentlich ist, gehen wir auf ihn noch näher ein. Wir können dabei für die Zwecke der folgenden Abschätzung β^2 als klein voraussetzen und mit den gewöhnlichen Formeln für die lebendige Kraft, den Impuls etc. rechnen.

Wird die gesamte Energie $E_k = \frac{m}{2} v^2$ des Kathodenstrahls in einem Zuge abgebremst, so folgt die Bremsdauer τ aus

$$E_k \tau = h,$$

die Beschleunigung aus

$$\dot{v} \tau = v.$$

Für die ausgestrahlte Energie können wir nach (15) angenähert schreiben:

$$E_r = \frac{e^2 \dot{v} v}{6 \pi c},$$

also:

$$\frac{E_r}{E_k} = \frac{e^2 \dot{v} \tau v}{6 \pi c h} = \frac{e^2 v^2}{6 \pi c h}.$$

Wir setzen andrerseits voraus, daß die Energie E_k in n gleichen Teilen E' abgebremst werde, wobei

$$E' = \frac{1}{n} E_k.$$

Die zugehörigen Bremsdauern τ' werden dann ebenfalls untereinander gleich und jede n mal so groß wie die frühere. Denn es gilt

$$E' \tau' = h, \qquad \text{also } \tau' = n \tau.$$

Ist v_1 die Geschwindigkeit nach der ersten, v_2 nach der zweiten Teilbremsung, so gilt

$$\frac{m}{2}(v^2 - v_1^2) = \frac{1}{n}\frac{m}{2}v^2, \quad \frac{v_1}{v} = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

$$\frac{m}{2}(v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{n}\frac{m}{2}v^2, \quad \frac{v_2}{v} = \sqrt{1 - \frac{2}{n}}$$

$$— — — — — — , \quad — — — —$$

$$\frac{m}{2}(v_{n-1}^2 - v_n^2) = \frac{1}{n}\frac{m}{2}v^2, \quad \frac{v_n}{v} = \sqrt{1 - \frac{n}{n}} = 0.$$

Die zugehörigen Beschleunigungen sind:

$$\dot{v}_1 \tau' = v - v_1$$

$$\dot{v}_2 \tau' = v_1 - v_2$$

$$— — — —$$

$$\dot{v}_n \tau' = v_{n-1}$$

Ihnen entsprechen die ausgestrahlten Energiemengen:

$$E_{r\,1} = \frac{e^2 \dot{v}_1 (v - v_1)}{6\pi c} = \frac{e^2 (v - v_1)^2}{6\pi c \tau'}$$

$$E_{r\,2} = \frac{e^2 \dot{v}_2 (v_1 - v_2)}{6\pi c} = \frac{e^2 (v_1 - v_2)^2}{6\pi c \tau'}$$

$$— — — — — — — — — —$$

$$E_{r\,n} = \frac{e^2 \dot{v}_n v_{n-1}}{6\pi c} = \frac{e^2 v_{n-1}^2}{6\pi c \tau'}.$$

Die gesamte Ausstrahlung wird also:

$$E_r = \frac{e^2}{6\pi c \tau'}\left\{(v - v_1)^2 + (v_1 - v_2)^2 + \cdots v_{n-1}^2\right\}.$$

Division mit E' gibt wegen $E'\tau' = h$ und $E' = \frac{1}{n} E_k$:

$$\frac{E_r}{E_k} = \frac{e^2 v^2}{6\pi c h} N, \quad N = \frac{1}{n}\left\{\left(1 - \frac{v_1}{v}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{v} - \frac{v_2}{v}\right)^2 + \cdots \frac{v_{n-1}{}^2}{v^2}\right\}.$$

Gegenüber der Bremsung in einem Zuge tritt also jetzt der Faktor N in der Formel für die verhältnismäßige Energie

der Röntgenstrahlen hinzu. Mit den angeführten Werten von $\frac{v_1}{v}, \frac{v_2}{v_1}, \ldots$ ergibt sich durch direkte Ausrechnung für

$n =$	2	3	4
$N =$	0,29	0,14	0,08
$N - \frac{1}{n^2} =$	0,04	0,03	0,02

Die letzte Zeile zeigt, daß N wie n^{-2} abnimmt,[1]) mithin für große n sehr klein wird. Da wir in § 4 die beobachtete (resp. die aus den Beobachtungen geschlossene) polarisierte Energie der Röntgenstrahlen in vorzüglicher Übereinstimmung fanden mit der aus dem Wirkungsquantum unter der Annahme einer Absorption in einem Zuge berechneten Energie, ergibt sich die unter der Annahme von n Teilbremsungen berechnete Energie zu klein. Jene Übereinstimmung kann also vom Standpunkte des Wirkungsquantums aus als Beleg dafür angesehen werden, daß die Erzeugung der Röntgenstrahlen ein intramolekularer Prozeß ist und in einem Zuge erfolgt.

Gibt man diesen Schluß zu, so verliert auch im Falle der Röntgenstrahlen die Annahme eines geradlinigen Bremsweges und der gleichmäßigen Beschleunigung den Anschein der Willkür.

§ 7. Berechnung der Ausstrahlung nach den Methoden der Relativitätstheorie.

Die große Vereinfachung, welche die Relativitätstheorie nicht nur für die physikalische Auffassung sondern auch für die mathematische Durchrechnung der elektromagnetischen Probleme gebracht hat, zeigt sich recht deutlich, wenn wir an die Ableitung der Ausstrahlungsformel (2) gehen. Ich knüpfe dabei an eine Arbeit[2]) an, in der ich die Minkowski-

[1]) Genauer wie $n^{-2}(1 + \frac{1}{4} \log n)$.

[2]) Annalen der Physik 33, 649, 1910.

schen Methoden durch reichlichere Verwendung vierdimensional-geometrischer Vorstellungen zu erläutern suchte. Dort ergab sich für den Sechservektor f des Feldes, dessen drei räumliche Komponenten gleich der magnetischen Feldstärke und dessen drei raumzeitliche Komponenten gleich $-i$ mal der elektrischen Feldstärke sind, in Gleichung (30) der folgende Ausdruck:

$$2\pi^2 f = \int \frac{[\mathfrak{R} P]}{R^4} d\Sigma. \tag{29}$$

$\mathfrak{R}$ ist der Vierervektor von dem Aufpunkte $x_0 y_0 z_0 l_0$ nach dem Integrationspunkte $xyzl$, beide als „Weltpunkte" aufgefaßt: $\mathfrak{R} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0,\ l - l_0)$; die vierte Koordinate l bedeutet den „imaginären Lichtweg" $l = ict$ bez. $l_0 = ict_0$. P ist der Vierervektor der im Integrationspunkte befindlichen Ladung ϱ und Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$:

$$P = \left(\varrho \frac{\mathfrak{v}_x}{c},\ \varrho \frac{\mathfrak{v}_y}{c},\ \varrho \frac{\mathfrak{v}_z}{c},\ i\varrho\right).$$

$[\mathfrak{R} P]$ meint den aus den Vierervektoren $\mathfrak{R}$ und P gebildeten Sechservektor, das Parallelogramm aus $\mathfrak{R}$ und P nach Größe, Lage und Sinn, dessen xy-Komponente z. B. ist:

$$[\mathfrak{R} P]_{xy} = \mathfrak{R}_x P_y - \mathfrak{R}_y P_x.$$

R ist die Länge des Vektors $\mathfrak{R}$:

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (l - l_0)^2$$

und $d\Sigma$ das vierdimensionale Raumelement

$$d\Sigma = dx\,dy\,dz\,dl.$$

Das betrachtete elektrische System kann beliebig gestaltet und bewegt sein. Wird es insbesondere als punktförmig angesehen, so läßt sich nach den Gleichungen (29 b) und (29 c) der zitierten Arbeit der raumartige Teil der Integration ausführen und man erhält aus der vorstehenden Gleichung (29):

$$2\pi^2 f = ie \int \frac{[\mathfrak{R} \mathfrak{B}]}{R^4} d\tau. \tag{30}$$

Hier ist

$$\mathfrak{B} = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{dl}{d\tau}\right)$$

der auf den Betrag ic normierte vierdimensionale Geschwindigkeitsvektor der punktförmig konzentrierten Ladung e, $d\tau$ das Element der „Eigenzeit", welches gleich ist dem mit ic dividierten Weltlinienelement ds:

$$d\tau = \frac{1}{ic}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + dl^2}. \tag{31}$$

Die Integration ist in der komplexen τ-Ebene auf einem im Uhrzeigersinne verlaufenden Umgang um denjenigen Punkt zu erstrecken, in dem R^2 verschwindet; der betreffende τ-Wert, der als $\tau = 0$ gewählt werden kann, charakterisiert den zum Aufpunkte gehörigen auf der Weltlinie der Ladung gelegenen „Lichtpunkt". Das Integral kann nach dem Cauchyschen Satz berechnet werden und liefert $-2\pi i$ mal dem Residuum von $\frac{[\mathfrak{R}\mathfrak{B}]}{R^4}$ im Punkte $\tau = 0$, also, wenn letzteres durch $\{\ \}$ angedeutet wird:

$$\pi f = e\left\{\frac{[\mathfrak{R}\mathfrak{B}]}{R^4}\right\}. \tag{32}$$

In der Umgebung des Punktes $\tau = 0$ gilt die Entwicklung:

$$[\mathfrak{R}\mathfrak{B}] = [\mathfrak{R}\mathfrak{B}]_0 + \tau([\dot{\mathfrak{R}}\mathfrak{B}]_0 + [\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{B}}]_0) + \cdots,$$

$\dot{\mathfrak{B}}$ ist der nach τ genommene Beschleunigungsvektor

$$\dot{\mathfrak{B}} = \left(\frac{d^2x}{d\tau^2}, \frac{d^2y}{d\tau^2}, \frac{d^2z}{d\tau^2}, \frac{d^2l}{d\tau^2}\right);$$

in gleicher Bedeutung ist $\dot{\mathfrak{R}} = \mathfrak{B}$ und daher $[\dot{\mathfrak{R}}\mathfrak{B}] = 0$, also einfacher:

$$[\mathfrak{R}\mathfrak{B}] = [\mathfrak{R}\mathfrak{B}]_0 + \tau[\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{B}}]_0.$$

Bei der Entwicklung von R^2 ist zu beachten, daß R_0^2 nach Definition des Lichtpunktes gleich Null ist; ferner ist

$$\frac{d R^2}{d\tau} = 2(x - x_0)\frac{dx}{d\tau} + 2(y - y_0)\frac{dy}{d\tau} + 2(z - z_0)\frac{dz}{d\tau}$$

$$+ 2(l - l_0)\frac{dl}{d\tau} = 2(\mathfrak{R}\mathfrak{B}),$$

$$\frac{d^2 R^2}{d\tau^2} = 2(\dot{\mathfrak{R}}\mathfrak{B}) + 2(\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{B}}).$$

$(\mathfrak{R}\mathfrak{B})$ ist das skalare Produkt aus $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B}$ und daher $(\dot{\mathfrak{R}}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}\mathfrak{B})$ das Quadrat des Betrages von $\mathfrak{B}$, welches nach obigem zu $-c^2$ normiert war. Also:

$$R^2 = 2\tau(\mathfrak{R}\mathfrak{B})_0 + \tau^2(-c^2 + (\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{B}})_0) + \cdots$$

$$\frac{1}{R^4} = \frac{1}{4\tau^2(\mathfrak{R}\mathfrak{B})_0^2}\left(1 + \tau\,\frac{c^2 - (\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{B}})_0}{(\mathfrak{R}\mathfrak{B})_0}\right).$$

Um das Residuum zu bestimmen, haben wir also in dem Ausdruck

$$\frac{[\mathfrak{R}\mathfrak{B}]_0 + \tau[\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{B}}]_0}{4\tau^2(\mathfrak{R}\mathfrak{B})_0^2}\left(1 + \tau\,\frac{c^2 - (\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{B}})_0}{(\mathfrak{R}\mathfrak{B})_0}\right)$$

den Faktor von $\frac{1}{\tau}$ aufzusuchen. Dieser ist:

$$\frac{1}{4}(c^2 - (\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{B}})_0)\frac{[\mathfrak{R}\mathfrak{B}]_0}{(\mathfrak{R}\mathfrak{B})_0^3} + \frac{1}{4}\frac{[\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{B}}]_0}{(\mathfrak{R}\mathfrak{B})_0^2},$$

oder bei Weglassung des nunmehr überflüssigen Index 0 als Wert des gesuchten Residuums:

$$\frac{c^2}{4}\frac{[\mathfrak{R}\mathfrak{B}]}{(\mathfrak{R}\mathfrak{B})^3} + \frac{1}{4}\frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{B})[\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{B}}] - (\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{B}})[\mathfrak{R}\mathfrak{B}]}{(\mathfrak{R}\mathfrak{B})^3}.$$

Nach (32) ergibt sich nunmehr:

$$(33)\quad \frac{4\pi}{e}(\mathfrak{R}\mathfrak{B})^3 f = c^2[\mathfrak{R}\mathfrak{B}] + (\mathfrak{R}\mathfrak{B})[\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{B}}] - (\mathfrak{R}\dot{\mathfrak{B}})[\mathfrak{R}\mathfrak{B}].$$

Die beiden letzten Terme der rechten Seite lassen sich in einen zusammenziehen. Für beliebige Vierervektoren $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ gilt nämlich:

$$(\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]) = \mathfrak{C}(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}), \tag{34}$$

geradeso wie bei gewöhnlichen dreidimensionalen Vektoren, nur daß man dort die links gemeinte Produktbildung aus einem Vektor erster Art $\mathfrak{B}$ und einem Vektor zweiter Art $[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ als Vektorprodukt zu schreiben und in eckige Klammern zu setzen gewohnt ist, während die formale Bildungsweise genau derjenigen des skalaren Produktes entspricht. Gleichung (34) läßt sich entweder analytisch durch Ausrechnung der Komponenten oder geometrisch[1]) beweisen. Aus (34) folgt weiter durch vektorielle Multiplikation mit einem beliebigen Vierervektor $\mathfrak{A}$:

$$(35)\quad \begin{cases} [\mathfrak{A}\mathfrak{N}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}](\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - [\mathfrak{A}\mathfrak{D}](\mathfrak{B}\mathfrak{C}), \\ \qquad \text{mit der Abkürzung} \\ \mathfrak{N} = (\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]). \end{cases}$$

Identifiziert man jetzt in der allgemeinen Formel (35) die Vektoren

$$\mathfrak{A} \quad \mathfrak{B} \quad \mathfrak{C} \quad \mathfrak{D}$$

bez. mit

$$\mathfrak{R} \quad \mathfrak{R} \quad \mathfrak{V} \quad \dot{\mathfrak{V}},$$

so hat man:

---

[1]) Die linke Seite von (34) bedeutet geometrisch das Parallelopiped aus $\mathfrak{B}$ und der *Ergänzung* $[\mathfrak{C}^* \mathfrak{D}^*]$ des Parallelogrammes $[\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$, vgl. meine Arbeit „Zur Relativitätstheorie I", Ann. d. Phys. 32, 749, 1910, § 3 B. Das Parallelopiped ist als dreidimensionales Raumstück ein Vektor dritter Art, welcher durch seine Ergänzung, einen Vektor erster Art $\mathfrak{N}$, ersetzt werden kann, welcher senkrecht auf dem das Parallelopiped enthaltenden Raum errichtet ist. $\mathfrak{N}$ steht hiernach senkrecht auf $\mathfrak{C}^*$ und $\mathfrak{D}^*$ und liegt deshalb in der Ebene von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$. Daher hat man, wenn α, β unbekannte Faktoren bedeuten: $\mathfrak{N} = \alpha\mathfrak{C} + \beta\mathfrak{D}$.

$\mathfrak{N}$ steht aber auch senkrecht auf $\mathfrak{B}$. Deshalb muß weiter $(\mathfrak{B}\mathfrak{N}) = 0$ sein, d. h.

$$\alpha(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) + \beta(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) = 0; \qquad \alpha = \gamma(\mathfrak{B}\mathfrak{D}); \qquad \beta = -\gamma(\mathfrak{B}\mathfrak{C}).$$

Der noch unbekannte Faktor γ ist eine reine von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ unabhängige Zahl und bestimmt sich bei spezieller Wahl dieser Vektoren leicht zu 1. Mithin folgt die Gleichung (34) des Textes:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{C}(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}).$$

$$(36)\qquad \begin{gathered}[\mathfrak{R}\,\mathfrak{N}] = [\mathfrak{R}\,\mathfrak{V}]\,(\mathfrak{R}\,\dot{\mathfrak{V}}) - [\mathfrak{R}\,\dot{\mathfrak{V}}]\,(\mathfrak{R}\,\mathfrak{V}).\\ \mathfrak{N} = (\mathfrak{R}\,[\mathfrak{V}\,\dot{\mathfrak{V}}]).\end{gathered}$$

Statt (33) kann man also einfacher schreiben:

$$(37)\qquad 4\pi f = \frac{e}{(\mathfrak{R}\,\mathfrak{V})^3}\,[\mathfrak{R},\ c^2\,\mathfrak{V} - \mathfrak{N}].$$

Dies ist die invariante, typische Darstellung des Feldes durch Weltvektoren. Sie ist von der Wahl des Bezugssystems vollständig unabhängig und gilt ebensowohl für stationäre wie für quasistationäre Bewegungen, für longitudinale wie für transversale Beschleunigungen. Insbesondere wird für stationäre Bewegungen $\dot{\mathfrak{V}}$ und daher $\mathfrak{N}$ gleich Null, also:

$$(37\,a)\qquad 4\pi f = \frac{e\,c^2\,[\mathfrak{R}\,\mathfrak{V}]}{(\mathfrak{R}\,\mathfrak{V})^3}.$$

Diese Formel enthält in konzisester Form alles, was über die Verteilung der elektrischen und magnetischen Kraftlinien um ein gleichförmig bewegtes Elektron bekannt ist. Bei nicht stationärer Bewegung kommt zu diesem Ausdruck. dem „Geschwindigkeitsanteil“ des Feldes, ein „Beschleunigungsanteil“ hinzu, der seinerseits gegeben ist durch:

$$(37\,b)\qquad 4\pi f = -\frac{e\,[\mathfrak{R}\,\mathfrak{N}]}{(\mathfrak{R}\,\mathfrak{V})^3},\quad \mathfrak{N} = (\mathfrak{R}\,[\mathfrak{V}\,\dot{\mathfrak{V}}]).$$

In größerer Entfernung vom Elektron ist, wie man leicht nachrechnet, der Geschwindigkeitsanteil gegen den Beschleunigungsanteil zu vernachlässigen, so daß wir uns im folgenden nur mit letzterem zu befassen haben.

Zur Ausrechnung der rechten Seite von (37 b) haben wir uns der Bedeutung von $\mathfrak{V}$ und $\dot{\mathfrak{V}}$ zu erinnern. Es war:

$$\mathfrak{V} = \left(\frac{d\,x}{d\,\tau},\ \frac{d\,y}{d\,\tau},\ \frac{d\,z}{d\,\tau},\ \frac{d\,l}{d\,\tau}\right),$$

$$\dot{\mathfrak{V}} = \left(\frac{d^2\,x}{d\,\tau^2},\ \frac{d^2\,y}{d\,\tau^2},\ \frac{d^2\,z}{d\,\tau^2},\ \frac{d^2\,l}{d\,\tau^2}\right)$$

Wir nehmen die dreidimensionale Geschwindigkeit v und Beschleunigung $\dot{v}$ als gleichgerichtet an (longitudinale Beschleunigung) und zwar nach der x-Achse. Dann ist:

$$\mathfrak{B} = (v, 0, 0, ic)\frac{dt}{d\tau} = (v, 0, 0, ic)\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

da nach Definition (31)

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

ist. Hieraus entsteht durch Differentiation nach t zunächst:

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}, 0, 0, ic\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{\dot{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta^2\dot{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}, 0, 0, \frac{i\beta\dot{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= (1, 0, 0, i\beta)\frac{\dot{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und daher

$$\dot{\mathfrak{B}} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = (1, 0, 0, i\beta)\frac{\dot{v}}{(1-\beta^2)^2}. \tag{38}$$

Der obige Wert von $\mathfrak{B}$ kann geschrieben werden:

$$\mathfrak{B} = (\beta, 0, 0, i)\frac{c}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{38a}$$

Hieraus berechnet man den Sechservektor $[\mathfrak{B}\dot{\mathfrak{B}}]$, indem man die zweireihigen Unterdeterminanten bildet, die nach Reihenfolge und Vorzeichen durch die folgenden Kombinationen der vier Indices x, y, z, l zu bilden sind:

$$yz,\ zx,\ xy,\ xl,\ yl,\ zl; \tag{39}$$

zum Beispiel:

$$[\mathfrak{B}\dot{\mathfrak{B}}]_{xy} = \begin{vmatrix}\beta & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\frac{\dot{v}c}{(1-\beta^2)^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

Man erhält:

$$[\mathfrak{V}\dot{\mathfrak{V}}] = (0,\ 0,\ 0,\ -i(1-\beta^2),\ 0,\ 0)\frac{c\dot{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= (0,\ 0,\ 0,\ -i,\ 0,\ 0)\frac{c\dot{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Irgend eine Komponente $j = x\,y\,z\,l$ des Vierervektors $\mathfrak{N} = (\mathfrak{R}[\mathfrak{V}\dot{\mathfrak{V}}])$ rechnet sich jetzt nach dem Schema:

$$\mathfrak{N}_j = \mathfrak{R}_x[\mathfrak{V}\dot{\mathfrak{V}}]_{jx} + \mathfrak{R}_y[\mathfrak{V}\dot{\mathfrak{V}}]_{jy} + \mathfrak{R}_z[\mathfrak{V}\dot{\mathfrak{V}}]_{jz} + \mathfrak{R}_l[\mathfrak{V}\dot{\mathfrak{V}}]_{jl}.$$

Man erhält also mit Rücksicht auf $[\mathfrak{V}\dot{\mathfrak{V}}]_{lx} = -[\mathfrak{V}\dot{\mathfrak{V}}]_{xl}$

$$\mathfrak{N} = (-i\mathfrak{R}_l,\ 0,\ 0,\ i\mathfrak{R}_x)\frac{c\dot{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{40}$$

Bezeichnet man wie früher mit r den dreidimensionalen Abstand vom Orte des strahlenden Elektrons nach dem Aufpunkte, mit φ den Winkel zwischen der x-Achse und r, so hat man

$$\mathfrak{R}_x = x - x_0 = -r\cos\varphi$$

und wegen $R^2 = 0$ (Definition des Lichtpunktes):

$$\mathfrak{R}_l = -ir.$$

Denkt man den Aufpunkt in der xy-Ebene des dreidimensionalen Koordinatensystems gelegen, so gilt hiernach für den Vektor $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R} = -(\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0,\ i)\,r. \tag{41}$$

Statt (40) kann man also auch schreiben:

$$\mathfrak{N} = -(1,\ 0,\ 0,\ i\cos\varphi)\frac{c\dot{v}r}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{40a}$$

Bilden wir nun das Produkt $[\mathfrak{R}\mathfrak{N}]$ aus (41) und (40a), so ergibt sich für die in der Reihenfolge (39) genommenen Komponenten:

$$[\mathfrak{R}\mathfrak{N}] = (0,\ 0,\ -\sin\varphi,\ -i(1-\cos^2\varphi),\ i\sin\varphi\cos\varphi,\ 0)\frac{c\dot{v}r^2}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Bilden wir andrerseits das Produkt $(\mathfrak{R}\mathfrak{V})$ aus (41) und (38 a), so kommt

$$(\mathfrak{R}\mathfrak{V}) = (1 - \beta \cos \varphi) \frac{r c}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Somit wird schließlich nach (37 b):

$$f = \frac{e \dot{v}}{4 \pi c^2 r} \frac{1}{(1 - \beta \cos \varphi)^3} (0,\, 0,\, \sin \varphi,\, i \sin^2 \varphi,\, - i \sin \varphi \cos \varphi,\, 0).$$

Vergleichen wir hiermit den Aufbau des Feldvektors f aus magnetischer und elektrischer Feldstärke:

$$f = (\mathfrak{H}_x,\, \mathfrak{H}_y,\, \mathfrak{H}_z,\, - i \mathfrak{E}_x,\, - i \mathfrak{E}_y,\, - i \mathfrak{E}_z),$$

so folgt:

$$\mathfrak{H}_z = \frac{e \dot{v}}{4 \pi c^2 r} \frac{\sin \varphi}{(1 - \beta \cos \varphi)^3}, \quad \mathfrak{E}_z = 0,$$

$$\mathfrak{E}_x = \frac{- e \dot{v}}{4 \pi c^2 r} \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \varphi)^3}, \quad \mathfrak{H}_x = 0,$$

$$\mathfrak{E}_y = \frac{e \dot{v}}{4 \pi c^2 r} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{(1 - \beta \cos \varphi)^3}, \quad \mathfrak{H}_y = 0.$$

Für die resultierenden Feldstärken $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ ergibt sich also einfach:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H} = \mathfrak{E} = \dfrac{e \dot{v}}{4 \pi c^2 r} \dfrac{\sin \varphi}{(1 - \beta \cos \varphi)^3} \\ \text{sowie die bekannte Regel} \\ \mathfrak{H} \perp \mathfrak{E} \text{ oder } (\mathfrak{H}\mathfrak{E}) = 0. \end{array} \right.$$

Die beiden letzten Aussagen haben eine besonders einfache vierdimensionale Bedeutung; sie besagen, daß die beiden Invarianten des Sechservektors $(f f)$ und $(f f^*)$ verschwinden, indem die erstere den Wert $\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2$, die letztere den Wert $2 (\mathfrak{H} \mathfrak{E})$ hat. In großer Entfernung von der Strahlungsquelle hat also das emittierte Feld die Struktur eines speziellen Sechservektors (einfaches Flächenstück, $(f f^*) = 0$) von verschwindendem Flächeninhalt ($(f f) = 0$).

Der auf die Zeiteinheit bezogene Energiefluß $\mathfrak{S}'$ durch eine senkrecht gegen r gestellte Flächeneinheit berechnet sich jetzt vermöge (41) einfach zu

$$\mathfrak{S}' = c\,[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}] = \frac{e^2\,\dot{v}^2}{16\,\pi^2\,c^3\,r^2}\,\frac{\sin^2\varphi}{(1-\beta\cos\varphi)^6},$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (2).

Zur Theorie der Heineschen Reihe.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 4. Februar 1911.

In meiner Abhandlung[1]) „Über Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter gewisser limitär-periodischer Kettenbrüche" habe ich gelegentlich darauf hingewiesen, daß die Heinesche Reihe eine in der ganzen Ebene eindeutige Funktion definiert, welche im Endlichen bis auf einfache Pole aus der Reihe der Zahlen $q^{-\nu}$ ($|q| < 1$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) regulär ist.[2]) Es war mir damals entgangen, daß man dieses Resultat, wie einer meiner Schüler, Herr Edwin R. Smith, bemerkt hat, ganz unmittelbar aus der Differenzengleichung entnehmen kann, welche Heine für jene Reihe abgeleitet hat. Dieselbe lautet in der ursprünglich von Heine gegebenen Darstellung[3]):

$$(1) \quad (q^{\gamma-1} - q^{\alpha+\beta-n}x) \cdot \Delta^2 \varphi_n - (1 - q^{\gamma-1} - q^n(q^\alpha + q^\beta - 2q^{\alpha+\beta})x) \cdot \Delta \varphi_n - q^n(1-q^\alpha)(1-q^\beta) \cdot \varphi_n = 0,$$

wo:

$$\varphi_n = (\alpha, \beta, \gamma, q, q^n x)$$

$$\Delta \varphi_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n, \qquad \Delta^2 \varphi_n = \Delta \varphi_{n+1} - \Delta \varphi_n.$$

Wählt man speziell $n = 0$, so nimmt durch Substitution von:

$$\Delta \varphi = \varphi(qx) - \varphi(x)$$

$$\Delta^2 \varphi = \varphi(q^2 x) - 2\varphi(qx) + \varphi(x)$$

[1]) Diese Berichte, Jahrgang 1910, 6. Abhandlung.

[2]) A. a. O. p. 31.

[3]) Journ. f. Math. 34 (1847), p. 316.

die obige Differenzengleichung die einfachere Form an:

(2) $(q^{\gamma-1}-q^{\alpha+\beta}x)\cdot\varphi(q^2x)-(1+q^{\gamma-1}-(q^\alpha+q^\beta)x)\cdot\varphi(qx)+(1-x)\cdot\varphi(x)=0$,

aus welcher dann in der Tat die oben bezeichneten Eigenschaften der durch das Funktionselement $\varphi(x)$ definierten analytischen Funktion ohne weiteres hervorgehen.

Auch diese Formel (2) findet sich schon bei Heine, jedoch nicht in der oben zitierten Abhandlung, sondern in der zweiten Auflage (1878) seines Handbuches der Kugelfunktionen. Sie erscheint aber dort[1]) ganz unterschiedlos in einer langen Serie anders gearterter und minder wichtiger Formeln gleichsam versteckt, überdies in einer Bezeichnungsweise, durch welche ihre eigentliche Tragweite gänzlich verwischt wird, nämlich:

(3) $q(1-x)\cdot\varphi(\xi)=\{c+q-(a+b)qx\}\cdot\varphi(\xi+1)-(c-abqx)\cdot\varphi(\xi+2)$

(wo: $a=q^\alpha$, $b=q^\beta$, $c=q^\gamma$, $x=q^\xi$ und $\varphi(\xi)$ soviel wie in der früheren Bezeichnung $\varphi(q^\xi)$ bedeutet). Ob Heine die in Frage kommenden, für die genauere Erkenntnis der vorliegenden Funktion grundlegenden Schlüsse aus der obigen Formel gezogen hat, mag dahingestellt bleiben: jedenfalls muß es auffällig erscheinen, daß er weder über diese Möglichkeit, noch über deren Resultat auch nur die leiseste Andeutung macht.

Da die betreffende Fundamentalformel bei Heine durch eine verhältnismäßig künstliche und weitläufige Rechnung gewonnen wird, so erscheint es vielleicht nicht ganz überflüssig, zu zeigen, daß sie in der denkbar einfachsten und logisch natürlichsten[2]) Weise durch passende Umformung des Produktes $(1-x)\cdot\varphi(x)$ sich ergibt. Dabei mag statt der Reihe $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$ zunächst wieder die etwas allgemeinere:

$$\Phi(x)=\Phi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,q,x)=\sum_0^\infty{}_\nu f_\nu\cdot x^\nu$$

[1]) A. a. O. Bd. 1, p. 104, letzte Zeile.

[2]) Insofern ja aus der Natur der Reihe $\varphi(x)$ unmittelbar erkannt werden kann, daß die betreffende analytische Funktion auf dem Einheitskreise keine andere Singularität, als den einfachen Pol $x=1$ besitzt, sodaß man also für die weitere Untersuchung von $\varphi(x)$ unmittelbar auf diejenige von $(1-x)\cdot\varphi(x)$ geführt wird. Vgl. meine oben zitierte Abhandlung p. 29.

wo:

$$f_0 = 1$$

$$f_{\nu+1} = \frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})} \cdot f_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

zu Grunde gelegt werden. Man hat sodann[1]:

$$(1-x) \cdot \Phi(x) = 1 + \sum_0^\infty{}^\nu (f_{\nu+1} - f_\nu) \cdot x^{\nu+1}$$

und:

$$f_{\nu+1} - f_\nu = \frac{(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu}) - (1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})} \cdot f_\nu$$

$$= \frac{Q_\nu}{(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu})} \cdot f_\nu\, q^\nu,$$

wo:

$$Q_\nu = q^\gamma + q^\delta - q^{\gamma+\delta+\nu} - (q^\alpha + q^\beta - q^{\alpha+\beta+\nu}).$$

Nun ist identisch

$$0 = (q^\gamma+q^\delta-q^{\gamma+\delta+\nu})(q^\alpha+q^\beta-q^{\alpha+\beta+\nu}) - (q^\alpha+q^\beta-q^{\alpha+\beta+\nu})(q^\gamma+q^\delta-q^{\gamma+\delta+\nu})$$

$$= (q^\gamma+q^\delta-q^{\gamma+\delta+\nu})(q^{\alpha+\nu}+q^{\beta+\nu}-q^{\alpha+\beta+2\nu})$$

$$-(q^\alpha+q^\beta-q^{\alpha+\beta+\nu})(q^{\gamma+\nu}+q^{\delta+\nu}-q^{\gamma+\delta+2\nu}).$$

Subtrahiert man diese Identität von Q_ν und beachtet, daß:

$$1-q^{\alpha+\nu}-q^{\beta+\nu}+q^{\alpha+\beta+2\nu} = (1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})$$

$$1-q^{\gamma+\nu}-q^{\delta+\nu}+q^{\gamma+\delta+2\nu} = (1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu}),$$

so folgt:

$$Q_\nu = (q^\gamma+q^\delta-q^{\gamma+\delta+\nu})(1-q^{\alpha+\nu})(1-q^{\beta+\nu})$$

$$-(q^\alpha+q^\beta-q^{\alpha+\beta+\nu})(1-q^{\gamma+\nu})(1-q^{\delta+\nu}),$$

also:

$$f_{\nu+1}-f_\nu = (q^\gamma+q^\delta-q^{\gamma+\delta+\nu}) \cdot f_{\nu+1}\, q^\nu - (q^\alpha+q^\beta-q^{\alpha+\beta+\nu}) \cdot f_\nu\, q^\nu$$

$$\sum_0^\infty{}^\nu (f_{\nu+1}-f_\nu) \cdot x^{\nu+1} = (q^{\gamma-1}+q^{\delta-1}) \cdot \sum_0^\infty{}^\nu f_{\nu+1} \cdot (qx)^{\nu+1} - (q^\alpha+q^\beta)x \cdot \sum_0^\infty{}^\nu f_\nu (qx)^\nu$$

$$- q^{\gamma+\delta-2} \cdot \sum_0^\infty{}^\nu f_{\nu+1} \cdot (q^2x)^{\nu+1} - q^{\alpha+\beta}\, x \cdot \sum_0^\infty{}^\nu f_\nu (q^2 \cdot x)^\nu$$

---

[1]) Vgl. a. a. O., p. 30.

und daher schließlich:

$$(1-x)\cdot\Phi(x) = 1 - q^{\gamma-1} - q^{\delta-1} + \{q^{\gamma-1} + q^{\delta-1} - (q^{\alpha} + q^{\beta})x\}\ \Phi(qx) + q^{\gamma+\delta-2} - (q^{\gamma+\delta-2} - q^{\alpha+\beta}x)\cdot\Phi(q^2x),$$

eine Gleichung, welche speziell für $\delta = 1$ in die gesuchte übergeht:

$$(1-x)\cdot\varphi(x) = \{1 + q^{\gamma-1} - (q^{\alpha} + q^{\beta})x\}\cdot\varphi(qx) - (q^{\gamma-1} - q^{\alpha+\beta}x)\cdot\varphi(q^2x).$$

Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch auf die in der oben zitierten Abhandlung (p. 5) von mir gemachte Bemerkung zurückkommen, daß mir die von Herrn van Vleck gegebene Beweisführung des in Frage kommenden Hauptsatzes „nicht recht verständlich" erscheine. Herr van Vleck hat mir inzwischen mündlich und schriftlich ergänzende Erläuterungen mitgeteilt, welche geeignet sind, den in jenen Worten enthaltenen Zweifel zu beseitigen. Er wird die betreffenden Ausführungen demnächst in den Transactions of the American Mathematical Society veröffentlichen.

Schließlich sei hier noch ein ziemlich umfangreicher und sinnstörender Druckfehler berichtigt. Auf p. 34 der genannten Abhandlung findet sich unter (18) und (19) zweimal dieselbe Formel; als Formel (18) muß es statt dessen heißen:

$$(18)\quad (q^{\delta-1} - q^{\alpha}x)\cdot\Phi(\alpha,1,1,\delta,qx) = q^{\delta-1} + \frac{q^{\delta} - q^{\alpha}}{1 - q^{\delta}}\cdot\Phi(\alpha,1,1,\delta+1,qx).$$

Über ebene Zirkulationsströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen.

Von W. M. Kutta.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 4. Februar 1911.

1. Allgemeines.

Die Frage nach der allgemeinsten zweidimensionalen Zirkulationsströmung um die geschlossene, sich nicht überschneidende Kontur C der Ebene z führt auf die Aufgabe der konformen Abbildung des von der Strömung durchflossenen Außengebietes von C auf das Außengebiet eines Kreises K in der Ebene ζ. Diese Abbildung muß singularitätenfrei und eindeutig sein, die unendlich fernen Punkte in z und ζ sollen sich entsprechen. K kann etwa als Einheitskreis um den Nullpunkt angenommen werden. Die Abbildung sei durch $z = F(\zeta)$ geleistet.

Dann erhält man die allgemeinste Zirkulationsströmung um C aus derjenigen um K. Die Strömungsfunktion ist:

$$W = c_1\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - i \cdot c_2\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) + i \cdot c \ln \zeta .$$

Die Konstanten c_1 und c_2 bestimmen sich aus der Strömungsgeschwindigkeit V und ihrer Richtung β gegen die x-Achse in der Ebene z; die Wahl von c legt die Stärke der Zirkulation um die Kontur C fest und erfordert eine besondere Annahme, z. B. glattes Abströmen an einer Spitze oder Ecke der Kontur. Der von C erfahrene Auftrieb ist $2\pi\varrho \cdot V \cdot c$, wo ϱ die Dichte der strömenden inkompressiblen Flüssigkeit bedeutet.

Ein beliebiger anderer Kreis K_1 in ζ, der Kreis K einschließt, wird durch die vorige Abbildung $z = F(\zeta)$ in eine geschlossene, sich nicht überschneidende, C einschließende Kontur C_1 der Ebene z abgebildet. Das Außengebiet von C_1 ent-

spricht singularitätenfrei eindeutig dem Außengebiet von K_1. Ist ζ_1 der Mittelpunkt, r_1 der Radius von K_1, so gibt die Strömungsfunktion

$$W = c_1\left[\frac{\zeta-\zeta_1}{r_1}+\frac{r_1}{\zeta-\zeta_1}\right]-i\cdot c_2\left[\frac{\zeta-\zeta_1}{r_1}-\frac{r_1}{\zeta-\zeta_1}\right]+i\,c\,ln(\zeta-\zeta_1)$$

die allgemeinste Zirkulationsströmung um den Kreis K_1 der Ebene ζ und somit (unter Zuziehung von $z = F(\zeta)$) auch die allgemeinste Zirkulationsströmung um die Kontur C_1 in der Ebene z an. Es sind demnach auf Grund der Abbildung $z = F(\zeta)$ nicht nur die Strömung um Kontur C sondern auch die Strömungen um ∞^3 andere Konturen C_1, welche den ∞^3 Kreisen K_1 entsprechen, bekannt.

Der Kreis K_1 war K einschließend vorausgesetzt. Es genügt aber, daß K_1 alle Singularitäten der Abbildung $z = F(\zeta)$ einschließt und daß die Eindeutigkeit der Abbildung der beiden Außengebiete gewahrt bleibt. Beide Forderungen sind von selbst erfüllt, wenn K_1 K einschließt; aber sie können auch erfüllt sein, wenn K_1 K schneidet eventuell K_1 von K umschlossen wird, was dann auch für C_1 und C zutrifft.

Nun sind freilich die Konturen C_1 nicht von vornherein bekannt oder vorzuschreiben, wie es die Kontur C ist. Vielmehr ergeben sie sich erst im Laufe der Rechnung, nach der Aufstellung der Abbildungsfunktion $z = F(\zeta)$. Immerhin läßt sich voraussehen, daß Kreise K_1, die von K wenig abweichen, Konturen C_1 liefern werden, die — von singulären Stellen auf C oder C_1 abgesehen — wenig von der Kontur C abweichen werden; insbesondere wird C_1 C eng umschließen, wenn K_1 K eng umschließt.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die ursprüngliche Kontur C singuläre Punkte, d. h. hier Spitzen oder Ecken, auch sprungweise Änderung der Krümmung zeigt. Gerade für solche Konturen, etwa aus Geradenstücken oder Kreisbögen zusammengesetzte, ist ja die Abbildung oft wirklich ausführbar. In diesem Falle besitzt die Abbildungsfunktion Verzweigungs-

stellen an diesen Punkten; für eine Spitze in C ist die Abbildung durch die Entwicklung

$$z - z_0 = A(\zeta - \zeta_0)^2 + \cdots$$

charakterisiert.

Diese auch für die Abbildung singulären Punkte liegen auf der Peripherie von K. Kreis K_1 kann ebenfalls derartige Punkte statt im Innern auf der Peripherie besitzen, während die Pole und wesentlich singulären Punkte im Innern von K_1 liegen müssen. Jeder Kreis K_1, der Kreis K in einem solchen Verzweigungspunkte einschließend berührt, ergibt demnach eine Kontur C_1, welche dieselbe entsprechende Zuspitzung wie Kontur C besitzt, im übrigen aber die Kontur C umgibt und keine weitere Zuspitzung oder dgl. aufweist. Man kann also von einer mehrfach zugespitzten Kontur als C ausgehend unter Beibehaltung einer Spitze zu einer einfach zugespitzten, sonst C umschließenden Kontur C_1 gelangen, für die die allgemeine Strömung bekannt ist.

Jedoch ist es nicht nötig, daß K_1 K im Verzweigungspunkte berührt. Vielmehr genügt es, daß auch K_1 durch diesen Punkt hindurchgeht und die Forderungen der singularitätenfreien und eindeutigen Abbildung der Außengebiete erfüllt.

Die Wahl der Zirkulationskonstanten c erlaubt, an e i n e r Spitze oder Ecke der Kontur C endliche Geschwindigkeiten herzustellen, indem man diesen Punkt zu einem Spaltungspunkt macht. Ist C mit mehreren Zuspitzungen gegeben, so kann im allgemeinen nur einer dieser Punkte als Spaltungspunkt vorgeschrieben werden, so daß an den anderen Umströmung mit unendlich großer Geschwindigkeit erfolgt. Ich habe daraus die Notwendigkeit einer Abrundung der Vorderkante bei den Tragflächen eines Aeroplans zu begründen und die erforderliche Größe einer solchen Abrundung abzuschätzen versucht. Herr Sonnefeld[1]) hat daraufhin Konturen behandelt, welche durch Ansetzen eines Kreises an die vordere Spitze eines Kreis-

[1]) Dissertation. Über Flüssigkeitsströmungen um zusammengesetzte zylindrische Schalen. Jena 1910.

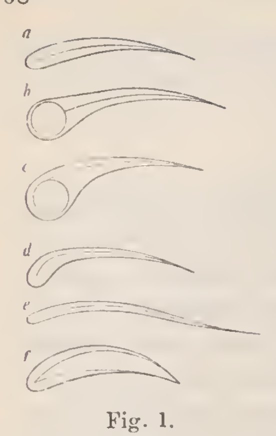


Fig. 1.

bogens entstehen (innere Kontur Fig. 1b und 1c). Herr Jonkowsky[1]) hat einfach zugespitzte Formen für gewölbte und flache Tragflächenform (Fig. 1a) angegeben und berechnet, durch die ich auf die vorigen Überlegungen geführt worden bin, die wohl auch seinen Aufstellungen zu Grunde liegen. Natürlich lassen sich in dieser Art weitere einfach zugespitzte Formen aus jeder mehrfach zugespitzten Kontur, für welche die Abbildung gelungen ist, sofort angeben und berechnen, also Formen, wie sie in Fig. 1b bis 1f als äußere Konturen skizziert sind.

Solche einfach zugespitzte oder eckige Konturen bieten eben darum ein besonderes Interesse, weil sich für sie die Zirkulation aus der Bedingung des Abströmens mit endlicher Geschwindigkeit an der Zuspitzung eindeutig bestimmen läßt.

2.

Die bisherigen Betrachtungen lassen eine etwas andere Formulierung zu, wenn man statt von einer vorgeschriebenen Urkontur C von einer beliebig gewählten Abbildungsfunktion $z = F(\zeta)$ ausgeht und dann die Bilder C_1 der Kreise K_1 der Ebene ζ aufsucht. Das hat freilich den Nachteil, daß man von vornherein in Bezug auf die Form der Konturen nur allgemeine Kriterien aufstellen kann, während vorher der Anschluß der benachbarten Konturen C_1 an die Urkontur C wenigstens eine gewisse Einsicht in ihre Form gab. Außerdem muß die Prüfung der Eindeutigkeit der Abbildung der Außengebiete erfolgen, die früher nach gelungener Abbildung von C in K sich wenigstens für die umschließenden Konturen C_1 von selbst verstand. Dagegen ist es von Vorteil, daß nun

[1]) Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger. Zeitschr. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1. Jahrg., 1910, S. 281.

$F(\zeta)$ beliebig angenommen werden kann und nicht erst das oft schwierige Aufsuchen der Abbildung einer vorgelegten Kontur erfordert.

Da z und ζ sich im Unendlichen als einfache Pole entsprechen sollen, werden wir $F(\zeta) = \zeta + f(\zeta)$ ansetzen und nun fordern, daß $f(\zeta)$ als regulär im Unendlichen und dort verschwindend gewählt wird. Jede beliebige derartige Wahl von $f(\zeta)$ liefert durch die Abbildung

$$z = \zeta + f(\zeta)$$

∞^3 Konturen C_1 mit ihren Strömungen. Wir haben nur alle Singularitäten der Abbildung aufzusuchen und dann Kreise K_1 in ζ anzunehmen, die alle Pole und wesentlich singulären Punkte der Abbildung einschließen, während die Verzweigungspunkte auch auf der Kreisperipherie liegen können. Außerdem sind die Kreise groß genug anzunehmen, um die Eindeutigkeit der Abbildung der Außengebiete zu gewährleisten. Je nachdem ein solcher Kreis K_1 noch mehrere, einen, oder keinen Verzweigungspunkt auf der Peripherie enthält, besitzt die entsprechende Kontur C_1 mehrere, eine oder keine Zuspitzung.

Beiläufig bemerkt ist es augenscheinlich, daß, wenn zwei Abbildungen $\zeta + f(\zeta)$ und $\zeta + g(\zeta)$ bekannt sind, die resultirende Abbildung $\zeta + h(\zeta)$ aus beiden, indem sie die Konturen der ersten Abbildung durch die zweite nochmals abbildet, neue Konturen, nämlich die Bilder der Kreise durch $\zeta + h(\zeta)$ liefert. Anders ausgesprochen: Nachdem wir die Strömung um Konturen C_1 schon kennen, erhalten wir sofort die Strömungen um alle Konturen, die Bilder von C_1 sind, sofern nur die Abbildung die Außengebiete eindeutig singularitätenfrei sich entsprechen läßt. So erlaubt jede beliebige Abbildung mit regulärem Entsprechen des Unendlichen z. B. aus jeder beliebigen einfach zugespitzten Kontur mit bekannter Strömung neue zugespitzte Konturen und deren Umströmung abzuleiten. Man hat dazu nur die erste Kontur in solchem Maßstab und solcher Lage zu zeichnen, daß die Singularitäten der Abbildung in ihr Inneres fallen.

Als ein Beispiel für die vorhergehenden Ansätze diene die einfachste Wahl von $f(\zeta)$, nämlich als $\frac{1}{\zeta}$.

Die Abbildung $z = \zeta + \frac{1}{\zeta}$ besitzt als Pol für z (außer $\zeta = \infty$, wie nötig) nur $\zeta = 0$; als Verzweigungspunkte $\zeta = \pm 1$ Die Kreise durch beide Verzweigungspunkte enthalten, wie gefordert, den Pol im Innern; das Außengebiet eines solchen Kreises bildet sich eindeutig in die gesamte Ebene z ab. Die als Bilder der Kreise erscheinenden Konturen sind deshalb doppelt gezählte Kurvenstücke, mit zwei Zuspitzungen ($\zeta = \pm 1$ entsprechend) als Endpunkten.

Der Kreis um $\zeta = 0$ als Mittelpunkt liefert das Geradenstück von $z = -2$ bis $z = +2$ doppelt gezählt, d. h. den Fall der ebenen Tragfläche von der Tiefe 4. Ein Kreis durch $\zeta = \pm 1$ mit dem Mittelpunkt $\zeta = i \cdot \operatorname{tg} \alpha$, also dem Radius gleich $\frac{1}{\cos \alpha}$ bildet sich in den doppelt gezählten Kreisbogen mit $z = \pm 2$ als Endpunkten und dem Bogenmaß 4α, mit dem Mittelpunkt $-2i \operatorname{cotg} 2\alpha$ und dem Radius $\frac{2}{\sin 2\alpha}$ ab. Dies gibt die von mir 1910 behandelten Strömungen.

Diejenigen Kreise der ζ-Ebene, welche nur den einen Verzweigungspunkt auf der Peripherie, den anderen im Innern enthalten, enthalten auch den Pol $\zeta = 0$ im Innern und lassen die Aussengebiete eindeutig entsprechen, wie daraus klar ist, daß zu jedem solchen Kreise ein eingeschlossener Kreis durch beide Verzweigungspunkte mit Berührung in dem einen Verzweigungspunkt gezeichnet werden kann. Die entsprechenden Konturen der ζ-Ebene zeigen nur eine Zuspitzung und umschließen je den Kreisbogen, der als entsprechende Kontur für den eingeschlossenen Kreis durch beide Verzweigungspunkte sich ergab. Ist der betrachtete Kreis von jenem eingeschlossenen nur wenig verschieden, d. h. liegt der zweite, innere Verzweigungspunkt nahe der Peripherie, so umschließt die entsprechende Kontur den Kreisbogen sehr nahe, behält die

eine Zuspitzung des Kreisbogens bei und zeigt eine leichte Abrundung der anderen Zuspitzung (der Vorderkante, Fig. 1a). Von der Größe dieser Abrundung hängt dann die Umströmungsgeschwindigkeit derselben ab; und danach ist es zu beurteilen, ob infolge eines großen Geschwindigkeitsgefälles und daraus folgender Wirkung der inneren Reibung eine Wirbelbildung an dieser Vorderkante zu befürchten ist. Die Zuspitzung an der Hinterkante kann durch Wahl der Zirkulationskonstante zum Spaltungspunkt gemacht und so ein Strömungsbild angegeben werden, das nirgends unendliche Strömungsgeschwindigkeit aufweist.

Die Kreise ζ, die beide Verzweigungspunkte einschließen, geben Konturen ohne Zuspitzung, die nicht ohne weiteres die Bestimmung einer ausgezeichneten Zirkulationsströmung unter den unendlich vielen möglichen gestatten.

Das hier gegebene Beispiel führt auf die beiden von Herrn Joukowsky angegebenen Flügelformen. (Zitat S. 68.)

3.

Bisher waren nur Zirkulationsströmungen, d. h. Strömungen ohne Wirbel im Endlichen betrachtet worden. Ist aber statt der Zirkulation (dem „Wirbel im unendlich Fernen") ein Wirbel im Endlichen an der Stelle ζ_0 vorhanden, so bleibt das Frühere im wesentlichen gültig, sofern als Strömungsfunktion angesetzt wird

$$W = c_1\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - i c_2\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) + i \cdot c\, ln\left(\frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_0}}\right).$$

Dabei ist $\bar{\zeta}_0$ der konjugierte Wert zu ζ_0; der Ort z_0 des Wirbels in der eigentlich zu untersuchenden Strömung z liefert ζ_0 als entsprechenden Punkt der Abbildung.

Sind mehrere Wirbel zugleich vorhanden oder zugleich im Endlichen liegende Wirbel und Zirkulation, so addieren sich nur die zugehörigen Terme in der Strömungsfunktion. Einen solchen Fall habe ich schon 1905 untersucht. Natürlich ist für Wirbel im Endlichen dann die Kraft zu rechnen, die den

unendlich dünnen Wirbelfaden abtreibt. Nur wenn diese Kraft Null ist, ist der Zustand in der Tat stationär; andernfalls ist das berechnete Strömungsbild nicht mehr als ein Momentanzustand, der als Anfangszustand einer sich zeitlich ändernden Strömung zu betrachten ist. Es würde nun gelten, sich von der Änderung dieses Zustandes, also dem Abtreiben des Wirbels, und insbesondere den Bedingungen, unter denen ein neuer Wirbel etwa an einer scharfen Kante der Kontur entsteht, unter Hinzunahme von Herrn Prandtls[1]) Ansätzen ein Bild zu verschaffen.

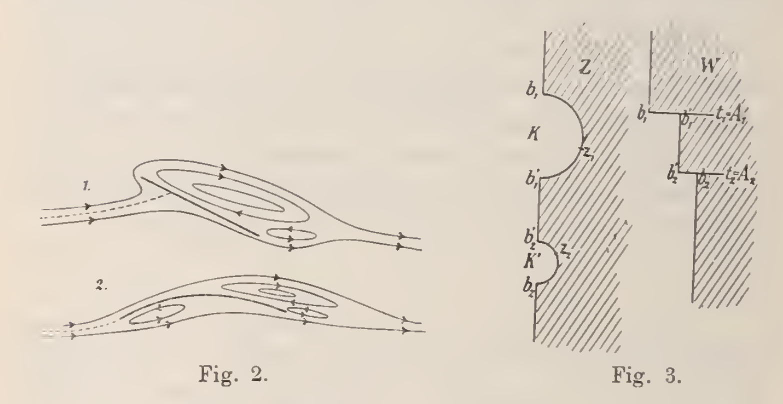


Fig. 2. Fig. 3.

Es wird einerseits von Interesse sein, die Möglichkeit des Vorhandenseins stationärer Wirbel bei gewölbten Flächen, nämlich unter der Vorderkante und über der Hinterkante zu untersuchen. Speziell für kleine oder negative Luftstoßwinkel und starke Wölbung würde ein solcher Unterwirbel vorn die Unterschiede in Bezug auf Größe des Auftriebs und Lage des Druckzentrums erklären, welche die Zirkulationstheorie und das Experiment unter solchen Voraussetzungen zeigen. (Fig. 2).

Andrerseits würde durch eine Abschätzung der Bedingungen, unter denen ein verkrüppelter Wirbel an der Hinterkante sich ablöst, gleichzeitig eine Abschätzung des dadurch

[1]) Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. des 8. intern. Mathematikerkongresses in Heidelberg, 1904. S. 484.

erzeugten Widerstandes der Fläche gegen die Strömung möglich sein. In der Tat ist ja der Sinn der Zirkulationstheorie vom physikalischen Gesichtspunkte aus der, daß durch Ablösung und Fortführung von Wirbeln in der Fläche um diese selbst ein Kreisen von entsprechender Stärke erzeugt worden ist. Die Zirkulationstheorie nimmt nur als Näherung diese Wirbelerzeugung als abgeschlossen und die fortgetragenen Wirbel im Unendlichen an, während in der Tat bei stationärer Auftriebswirkung der Vorgang so erfolgen dürfte, daß durch Neuablösung von Wirbeln gerade wieder Ersatz des durch die Reibung verloren gehenden Teiles des Kreisens geschaffen wird.

4.

Sind zwei geschlossene, sich nicht überschneidende Konturen C und C' in der Ebene z gegeben, so läßt sich theoretisch die singularitätenfreie, eindeutige Abbildung des übrigen, zweifach zusammenhängenden Gebietes z auf die Ebene ζ mit Ausschluß zweier Kreise immer so vollziehen, daß die unendlich fernen Punkte von z und ζ sich entsprechen. Die allgemeinste Zirkulationsströmung um diese Kreise K und K' enthält zwei Perioden, die des Kreisens um beide Kreise, die zusammen die Periode des logarithmischen Punktes im Unendlichen geben. (Fig. 3).

Die von der Zentrale KK' und den beiden Halbkreisen begrenzte Halbebene ζ sei auf die einfachste Halbebene t abgebildet; den rechtwinkligen Ecken in ζ mögen die Werte $t = b_1, b_1', b_2', b_2$ entsprechen; ebenso sollen sich die unendlich fernen Punkte von ζ und t entsprechen. Dann ist die Strömungsfunktion für eine in Richtung der Zentralen im Unendlichen verlaufende Strömung $W = Mt$, wo M eine reelle Konstante ist. Eine senkrecht zur Zentrale im Unendlichen verlaufende und außerdem mit einem Kreisen je um die beiden Kreise verbundene Strömung besitzt die Halbkreise zu Strömungslinien, die drei Stücke der Zentrale zu Äquipotentiallinien. Sind dabei z_1 und z_2 die Spaltungspunkte dieser Strömung, gelegen auf den beiden Halbkreisen, und entsprechen

diesen Punkten in der Abbildung t_1 und t_2, so ist die Strömungsfunktion

$$W = i N \int \frac{(t-t_1)(t-t_2)\,dt}{\sqrt{(t-b_1)(t-b_1')(t-b_2')(t-b_2)}}.$$

mit N als reeller Konstante. Die allgemeinste Zirkulationsströmung um die beiden Kreise ohne Wirbel im Endlichen wird als Summe beider Ansätze für W gefunden; M und N bestimmen die Geschwindigkeitskomponenten im Unendlichen, in Richtung der Zentrale und senkrecht dazu. Die willkürlichen Werte t_1 und t_2 bestimmen zusammen die Stärke des Kreisens je um die beiden Kreise K und K' und damit auch die Stärke der Zirkulation um das gesamte System und endlich den Auftrieb des Systems.

Ist nun die Abbildung des Paares von Konturen C und C' auf beliebige Kreise K und K' als $z = F(\zeta)$ geleistet, so ist auch die allgemeinste Zirkulationsströmung um C und C' gefunden. Aber auch jedes beliebige Paar von Kreisen K_1 und K_1', welche K und K' umschließen — oder doch die Singularitäten der Abbildung umschließen und die Eindeutigkeit im Außengebiet gewährleisten —, liefert ein Paar von Konturen C_1 und C_1', deren allgemeinste Umströmung mit Zirkulation bekannt ist. Enthalten C und C' Spitzen oder Ecken, so zeigt die Abbildungsfunktion $F(\zeta)$ dort Verzweigungspunkte, die auf K und K' liegen. Legt man dann K_1 und K_1' so, daß ihre Peripherie je nur einen Verzweigungspunkt enthält, so enthalten C_1 und C_1' je nur eine Spitze. Wählt man endlich $t_1 = a_1$ und $t_2 = a_2$ so, daß diese Spitzen Spaltungspunkte werden, so ist dadurch eine eindeutige Zirkulationsströmung um die je einseitig zugespitzten Konturen C_1 und C_1' mit überall endlicher Geschwindigkeit gefunden.

Übrigens könnte man theoretisch auch für eine zweifach zugespitzte Kontur C_1 und eine spitzenlose C_1' eine Strömung mit überall endlicher Geschwindigkeit aufstellen, indem man t_1 und t_2 so wählt, daß beide Spitzen Spaltungspunkte werden.

Im ganzen liefert die Abbildung ∞^6 Konturenpaare, von denen ∞^4 je einfach zugespitzte Konturen zeigen.

Wieder kann man statt von einem vorgegebenen Konturenpaare C und C' und dem schwierigen Aufsuchen der Abbildung desselben, von einer beliebigen angenommen Abbildungsfunktion $z = F(\zeta) = \zeta + f(\zeta)$ ausgehen, und dann zwei beliebige Kreise K_1 und K_1' in Konturen C_1 und C_1' abbilden, für die dann die allgemeinste Zirkulation bekannt ist. Leicht gewinnt man dabei in der bekannten Art auch Konturenpaare mit einfacher oder mehrfacher Zuspitzung. Doch ist zu beachten daß die Kreise K_1 und K_1' nicht nur alle Singularitäten der Abbildung einschließen, sondern auch die Eindeutigkeit der Abbildung des Gebietes außerhalb erreichen lassen müssen. Sonst könnten die Konturen C_1 und C_1' sich entweder überschneiden, oder sie liegen ineinander und in beiden der unendlich ferne Punkt eines anderen Blattes ζ über z. Es müssen also die Verzweigungspunkte der Abbildung in entsprechender Weise auf das Innere von K_1 und K_1' verteilt erscheinen.

So z. B. ist es nicht erlaubt, bei der einfachsten Annahme

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta}$$

den Kreis K_1 durch den Verzweigungspunkt $\zeta = 1$, den Pol $\zeta = 0$ im Innern enthaltend, und den Kreis K_1' durch den Verzweigungspunkt $\zeta = -1$ zn legen, um zwei einfach zugespitzte Konturen C_1 und C_1' zu erhalten. Denn dann würden diese Konturen, zu verschiedenen Blättern von ζ gehörig, sich überschneiden. Dagegen könnte K_1 durch beide Verzweigungspunkte, K_1' beliebig außerhalb K_1 gelegt werden und eine eindeutige Zirkulationsströmung um die zweifache zugespitzte Kontur C_1 (einen Kreisbogen) und singularitätenlose Kontur C_1' mit überall endlicher Geschwindigkeit aufgesucht werden.

Wählt man z. B. $f(\zeta) = \frac{A\zeta + B}{\zeta^2 - 1}$, so kann man die beiden auftretenden Pole und die vier auftretenden Verzweigungspunkte (diese zu je zwei) so auf Kreise K_1 und K_1' verteilen,

daß Eindeutigkeit in der Abbildung des Außengebietes gewahrt bleibt. Dann erhält man in bekannter Weise sowohl doppelt zugespitzte wie auch einfach zugespitzte Konturenpaare mit bekannter Strömung, die bei je einfacher Zuspitzung eindeutig mit endlicher Geschwindigkeit überall bestimmbar ist.

Auch aus den im speziellen Teile behandelten Fällen von Konturen mit zwei Zuspitzungen kann man nach dem vorigen den Übergang zu einfach zugespitzten Konturen vornehmen.

Endlich sei bemerkt, daß auch hier an Stelle einer Zirkulation das Vorhandensein eines Wirbels im Endlichen (oder mehrerer) zu Grunde gelegt werden kann. Dann ist nur die Strömungsfunktion für die beiden Kreise eine andere, und zwar kann sie natürlich (wie auch im Falle der Zirkulation) durch die Kelvinsche[1]) Methode der sukzessiven elektrischen Bilder erhalten werden.

Spezielle Einzelfälle.

1. Strömung um eine Sichel.

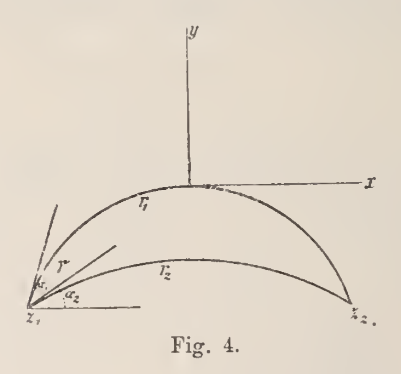


Fig. 4.

Die Kontur bestehe aus zwei Kreisbögen vom Radius r_1 und r_2 und dem Bogenmaß $2\alpha_1$ und $2\alpha_2$, die sich unter dem Winkel $\alpha_2 - \alpha_1 = \gamma$ schneiden (resp. so zusammentreffen) (Fig. 4). Die Länge der gemeinsamen Sehne ist:

$$2 r_1 \sin \alpha_1 = 2 r_2 \sin \alpha_2 = z_2 - z_1.$$

[1]) W. Thomson, Gesammelte Abhandlungen.

Die Abbildung des Außenbereichs der Sichel auf die Halbebene t erfolgt durch

$$z' = e^{i(\pi - \alpha_1)}\left[1 - \frac{z_1 - z_2}{z - z_2}\right]$$

$$z'^{\frac{\pi}{2\pi - \gamma}} = t \cdot \sin \delta + \cos \delta .$$

Dabei ist die Konstante $\delta = \frac{\pi(\pi - \alpha_1)}{2\pi - \gamma}$.

Die Strömungsfunktion ist, ausgedrückt in t:

$$W = 2\, c_1 \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} + 4\, c_2 \frac{t}{t^2 + 1} + 2\, c \operatorname{arc\,tg} t .$$

Soll noch das Außengebiet der Sichel auf das Außengebiet eines Kreises abgebildet werden, so ist $t = i \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}$ anzuführen und

$$W = c_1 \left[\zeta + \frac{1}{\zeta}\right] - i c_2 \left[\zeta - \frac{1}{\zeta}\right] + i c \ln \zeta$$

zu setzen.

Da

$$\frac{dz'}{dz} = - e^{i(\pi - \alpha_1)} \frac{2\, r_1 \sin \alpha_1}{(z - z_2)^2}$$

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{2\pi - \gamma}{\pi} \sin \delta \cdot [z']^{\frac{\pi - \gamma}{2\pi - \gamma}}$$

$$\frac{dW}{dt} = 8\, c_1 \frac{t}{(1 + t^2)^2} + 4\, c_2 \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2} + \frac{2\, c}{1 + t^2}$$

ist, ergibt die Entwicklung an der Stelle $z = \infty$, $w = \infty$, $t = i$ für $t = i + \varepsilon$

$$\frac{dW}{dz} = (i c_1 + c_2) \frac{2\pi - \gamma}{\pi} \frac{\sin \delta}{r_1 \sin \alpha_1} \cdot e^{i\delta} + \text{Glieder in } \varepsilon .$$

Dies gleich $V(\cos \beta - i \sin \beta)$ setzend, erhalten wir c_1 und c_2 durch

$$i c_1 + c_2 = \frac{\pi}{2\pi - \gamma} V \cdot \frac{r_1 \sin \alpha_1}{\sin \delta} e^{i(\beta - \delta)} .$$

Weiter ist in die Entwicklung von $\frac{dW}{dz}$ an der Hinterkante z_2 die Bedingung einzuführen, daß dort der unendlich große Term in der Geschwindigkeit verschwinden soll. Das glatte Abströmen geschieht dann dort in Richtung der Winkelhalbierenden des Winkels der beiden die Sichel bildenden Bögen.

Die Bedingung liefert die Gleichung

$$c = 2\,(c_1 \sin 2\,\delta + c_2 \cos 2\,\delta),$$

woraus

$$c = \frac{2\,\pi}{2\,\pi - \gamma} \cdot V \frac{r_1 \sin \alpha_1}{\sin \delta} \cos(\delta + \beta)$$

folgt.

Der Auftrieb auf die Einheit der Sehne und Einheitsbreite der Fläche (senkrecht zur Ebene z), also auf die Flächeneinheit der Sehnenfläche des Zylinders vom Sichelquerschnitt bezogen, ist demnach

$$\pi\,\varrho\,V^2 \cdot \frac{2\,\pi}{2\,\pi - \gamma} \cdot \frac{\cos(\delta + \beta)}{\sin \delta}$$

$$= \pi\,\varrho\,V^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{2\,\pi}} \cdot \left[\sin\beta + \cos\beta \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4\left(1 - \frac{\gamma}{2\,\pi}\right)}\right)\right].$$

Zum Vergleich setzen wir die Formel für den Auftrieb eines reinen Kreisbogens mit derselben Sehne, aber dem Bogenmaß $\alpha_1 + \alpha_2$ hinzu. Dies ist ein Bogen, der die Sichelwinkel gerade halbiert. Der Auftrieb ist für ihn

$$= \pi\,\varrho\,V^2 \left[\sin\beta + \cos\beta \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4}\right)\right].$$

wie man sieht, kleiner als der oben berechnete.

Für kleine Winkel α_1 und α_2 und insbesondere für kleine Sichelwinkel $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$ ist der Unterschied zwischen beiden Werten relativ nicht bedeutend. Für das Zahlenbeispiel $\alpha_1 = 15^0$ einer Wölbung von $\frac{1}{15.2}$ als $\frac{\text{Pfeil}}{\text{Sehne}}$ entsprechend, und $\alpha_2 = 7\frac{1}{2}^0$,

einer Wölbung $\frac{1}{30,5}$ entsprechend, gibt die genaue Formel für die Sichel

$$\pi \varrho V^2 [1,0213 \cdot \sin\beta + 0,10274 \cdot \cos\beta];$$

die Näherungsformel für das arithmetische Mittel der Bögen oder was bei so kleinem Winkel im wesentlichen dasselbe ist, für das arithmetische Mittel der Pfeile gibt

$$\pi \varrho V^2 [1 \cdot \sin\beta + 0,09849 \cdot \cos\beta],$$

um etwa 2 bis 4 Prozent weniger. Mit dieser Ungenauigkeit kann also bei so kleinen $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2$ der Auftrieb der Sichel durch den Auftrieb eines unendlich dünnen Kreisbogens von gleicher Sehne und arithmetischem Mittel der Wölbungen oder Pfeile, also der Wölbung $\left(\text{oder } \frac{\text{Pfeil}}{\text{Sehne}}\right)$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{15,2} + \frac{1}{30,5}\right] = \frac{1}{20,3}$$

ersetzt werden.

Die Auftriebe der beiden Kreisbögen, welche die Sichel bilden, einzeln aufgestellt — also der Kreisbögen von derselben Sehne und je dem Bogenmaß $2\alpha_1$ resp. $2\alpha_2$ einzeln —, wären

$$\pi \varrho V^2 [1 \cdot \sin\beta + 0,13163 \cdot \cos\beta]$$

und

$$\pi \varrho V^2 [1 \cdot \sin\beta + 0,06335 \cos\beta].$$

Wollte man den Mittelwert aus diesen Auftriebswerten der beiden Sichelbögen als Auftriebswert der Sichel nehmen, so erhielte man

$$\pi \varrho V^2 [1 \cdot \sin\beta + 0,09749 \cos\beta],$$

noch etwas schlechter mit dem genauen Werte für die Sichel übereinstimmend als der erste Mittelwert.

Wollte man den Auftrieb eines Bogens mit dem Mittelwerte der Wölbungszahlen 15,2 und 30,5, also der reziproken

Wölbungen, d. h. mit Wölbungszahl 22,8 und Wölbung $\frac{\text{Pfeil}}{\text{Sehne}}$ $= \frac{1}{22,8}$ benützen, so ergäbe sich dafür

$$\pi \varrho V^2 [1 \cdot \sin \beta + 0,08554 \cos \beta];$$

ein in durchaus unzulässiger Weise zu kleiner Wert.

Das Gesamtresultat zeigt, daß bei so kleinen Winkeln α_1, α_2 und insbesondere kleinem $\alpha_1 - \alpha_2 = \gamma$ es im ganzen wohl zulässig ist, in Bezug auf ihre Auftriebswirkung die Sichel durch einen Mittelbogen von mittlerer Wölbung, etwa den Halbierungsbogen der Sichelwinkel zu ersetzen; freilich ist der erhaltene Wert etwas zu klein. Da in Bezug auf den Auftrieb eines Bogens bei flachen Strömungswinkeln der Unterdruck auf seiner konvexen Seite theoretisch wie experimentell sich wichtiger erweist als der Überdruck auf der konkaven Seite, hätte man vielleicht erwarten können, daß die Wirkung der Sichel mehr von ihrem oberen Grenzbogen als von dem unteren abhängen würde. In der Tat gibt ja auch der Mittelbogen einen etwas zu kleinen Auftriebswert; daß dieser Unterschied nicht größer ist, d. h. daß die Sichel nicht dem Auftrieb nach fast ebensoviel leistet wie ihr oberer Grenzbogen es tun würde, erklärt sich daraus, daß die Strömungen unter und über der Sichel sich gegenseitig beeinflussen. Es wird, und zwar insbesondere deswegen, weil die Abströmung in Richtung der Winkelhalbierenden der Sichelbögen erfolgt, ein geringeres Heraufziehen der strömenden Flüssigkeit, und infolge dessen geringere Zirkulation eintreten. Ein scharfe Zuspitzung der Hinterkante, so daß dort die Kontur statt unter einem Winkel γ, mit einer wirklichen Spitze in Richtung des oberen Bogens verliefe, könnte vielleicht die Auftriebswirkung etwas erhöhen.

Für größere Werte von γ ist in der Tat die obere Wölbung der Sichel von weit größerer Bedeutung für den Auftrieb als die untere. Rechnen wir des Beispiels wegen mit einem extremen Fall, nämlich dem Halbkreis mit Durchmesser als Sichel, so wäre $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$; $\alpha_2 = 0$; $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Somit der Auftrieb nach der genauen Formel:

$$\pi \varrho V^2 \left[\frac{4}{3} \sin \beta + \frac{4}{3\sqrt{3}} \cos \beta\right],$$

nach der Näherung des Mittelpfeils:

$$\pi \varrho V^2 [1 \cdot \sin \beta + (\sqrt{2} - 1) \cos \beta].$$

Die Koeffizienten $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ und $(\sqrt{2} - 1)$ sind 0,770 und 0,414!

Die Näherung ist also hier ganz unzulässig; die obere Wölbung überwiegt der Bedeutung für den Auftrieb nach bei weitem. Der reine, unendlich dünne Halbkreisbogen gäbe als Auftrieb:

$$\pi \varrho V^2 [1 \cdot \sin \beta + 1 \cdot \cos \beta].$$

Anzumerken ist schließlich, daß der Auftrieb der Sichel genauer durch den eines Kreisbogens dargestellt werden könnte, der eine im Verhältnis $\frac{1}{1 - \frac{\gamma}{2\pi}}$ größere Sehne und ein Bogenmaß $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\left(1 - \frac{\gamma}{2\pi}\right)}$ besitzt.

2. Zwei parallele Platten untereinander.

Zwei Geradenstücke von gleicher Länge L seien so untereinander parallel angeordnet, daß die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte senkrecht zu ihnen steht und die Länge h hat. Der Koordinatenursprung z liege in der Mitte dieses Abstandes h, die reelle x-Achse parallel den Geraden (Fig. 5).

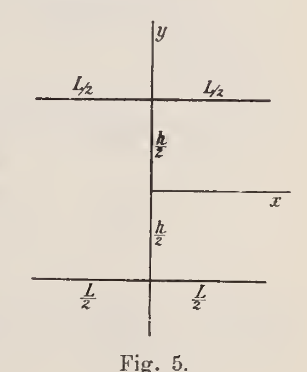


Fig. 5.

Um die Strömungsfunktion zu finden, sei die rechte Halbebene z

(mit zwei Einschnitten) auf die Halbebene t abgebildet. Den Punkten

$$z = i\frac{h}{2};\; i\frac{h}{2}+\frac{L}{2};\; i\frac{h}{2};\; 0,\; -i\frac{h}{2};\; -i\frac{h}{2}+\frac{L}{2};\; -i\frac{h}{2};\; \infty$$

sollen die Punkte

$$t = -a;\; -b;\; -c;\; 0;\; +c;\; +b;\; +a;\; \infty$$

entsprechen. Dabei sei $a = \frac{L}{2}$ gewählt, c mit $k' \cdot \frac{L}{2}$; b mit $\lambda \cdot \frac{L}{2}$ bezeichnet.

Die Abbildung erfolgt dann durch

$$z = i \cdot C \cdot \frac{L}{2} \int_0^t \frac{t^2 - \lambda^2}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2-t^2)}} \cdot dt;$$

die Wurzel ist positiv für kleine reelle t zu nehmen.

Da die Druckberechnung für die Platten zwischen $t = k'$ und $t = 1$ (resp. $t = -k'$ und $t = -1$) erfolgen wird, schreiben wir

$$z = i \cdot C \cdot \frac{L}{2} \int_0^{k'} \frac{t^2 - \lambda^2}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2-t^2)}} \cdot dt + C \cdot \frac{L}{2} \int_{k'}^t \frac{\lambda^2 - t^2}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}} \cdot dt.$$

Zur Bestimmung von k', λ und C dienen die drei Gleichungen:

$$\frac{h}{2} = C \cdot \frac{L}{2} \int_0^{k'} \frac{\lambda^2 - t^2}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2-t^2)}}\, dt;$$

$$\frac{L}{2} = C \cdot \frac{L}{2} \int_{k'}^{\lambda} \frac{\lambda^2 - t^2}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}}\, dt;$$

$$\frac{L}{2} = -C \cdot \frac{L}{2} \int_{\lambda}^{1} \frac{\lambda^2 - t^2}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}} \cdot dt.$$

Statt der vorletzten dieser Gleichungen schreiben wir besser die Gleichung an:

$$0 = \int_{k'}^{1} \frac{\lambda^2 - t^2}{\sqrt{(1 - t^2)(t^2 - k'^2)}} dt.$$

Die Berechnung der drei Konstanten aus diesen Gleichungen ist schwierig; wir umgehen die Schwierigkeit, indem wir zunächst für k' irgend einen Wert annehmen, also $k' = \cos\vartheta$ mit beliebig gewählten ϑ setzen. Ist dann $k = \sqrt{1 - k'^2} = \sin\vartheta$, und wird statt t φ mittelst $\sin^2\varphi = \frac{1 - t^2}{1 - k'^2}$ eingeführt, so ergibt sich

$$\lambda^2 = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \cdot d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}} = \frac{E_1}{F_1}$$

durch die Legendreschen vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für den Modul $k = \sin\vartheta$ ausgedrückt.

Weiter berechnet sich nun C aus

$$\frac{1}{C} = \int_0^{\varphi_0} \frac{(1 - \lambda^2) - k^2 \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} d\varphi = E(\varphi_0) - \lambda^2 F(\varphi_0),$$

wo die elliptischen Integrale für den Modul k und das Argument φ_0, aus $\sin\varphi_0 = +\frac{1}{k}\sqrt{1 - \lambda^2}$, zu berechnen sind.

Endlich findet man

$$\frac{h}{L} = C[E_1' - (1 - \lambda^2) F_1'];$$

E_1' und F_1' sind dabei die vollständigen elliptischen Integrale für den komplementären Modul $k' = \sqrt{1 - k^2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$.

Und es wird:

$$z = -i\frac{h}{2} + C \cdot \frac{L}{2} \int_0^{\varphi} \frac{(1 - \lambda^2) - k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \, d\varphi$$

$$= -i\frac{h}{2} + C \cdot \frac{L}{2} \left[E(\varphi) - \lambda^2 \cdot F(\varphi)\right].$$

Der Nachteil, daß statt vom gegebenen $\frac{h}{L}$ vom angenommenen k' ausgegangen wird, ist nicht von Bedeutung. Denn durch wenige Annahmen von k' kann der Zusammenhang zwischen k' und $\frac{h}{L}$ so übersichtlich gewonnen werden, daß die Interpolation für gegebenes $\frac{h}{L}$ das k' sofort sehr genau ergibt. (Man sehe die Tabelle S. 95.)

Die Strömungsfunktion für eine Strömung, die im Unendlichen die Richtung der y-Achse und die Geschwindigkeit $V \sin\beta$ besitzt, ist einfach

$$W = -C \cdot \frac{L}{2} \cdot V \sin\beta \cdot t.$$

Die Strömungsfunktion für die Geschwindigkeit $V\cos\beta$ in der x-Richtung im Unendlichen ist

$$W = V\cos\beta \cdot z.$$

Endlich die Zirkulationsströmung, die ebenso wie die vorige die Geradenstücke zu Stromlinien, die Mittelsenkrechte (y-Achse) zu einer Äquipotentiallinie hat, würde mit Einschluß der vorigen Horizontalströmung durch

$$W = i \cdot C \cdot \frac{L}{2} V \cos\beta \int \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{\sqrt{(1 - t^2)(k'^2 - t^2)}} \, dt$$

dargestellt. t_1 und t_2 geben die Spaltungspunkte dieser (von der Vertikalströmung noch absehenden) Strömung.

Trennt man davon die Horizontalströmung $V\cos\beta \cdot z$ ab,

so bleibt für die reine Zirkulationsströmung mit im Unendlichen verschwindender Geschwindigkeit die Strömungsfunktion in der Form übrig:

$$W = i \int \frac{Pt + Q}{\sqrt{(1 - t^2)(k'^2 - t^2)}} dt,$$

mit zwei willkürlichen reellen Konstanten P und Q, die der noch willkürlichen Stärke des Kreisens um die beiden Geradenstücke (Platten) entsprechen.

Als allgemeinste Strömungsfunktion für die rechte Halbebene z erhalten wir also:

$$W = V \cos\beta \cdot z - \frac{L}{2} \cdot C V \sin\beta \cdot t + i \int \frac{Pt + Q}{\sqrt{(1 - t^2)(k'^2 - t^2)}} dt.$$

Die daraus folgende Geschwindigkeit $u - iv$ ist:

$$\frac{dW}{dz} = V \cdot \cos\beta + i \cdot V \sin\beta \frac{\sqrt{(1 - t^2)(k'^2 - t^2)}}{t^2 - \lambda^2} + \frac{Pt + Q}{(t^2 - \lambda^2)\frac{L}{2} \cdot C}.$$

In der linken Halbebene von z findet sich für den entsprechenden (an der y-Achse gespiegelten) Punkt die Geschwindigkeit aus denselben drei Termen zusamengesetzt, doch so, daß die Horizontalkomponente des zweiten Termes (für die Vertikalströmung) und die Vertikalkomponente des dritten Termes (für die reine Zirkulation) die Zeichen wechseln. Dies hat bei der Zusammenfügung der beiden Halbebenen z keinen störenden Einfluß.

Zur Bestimmung der Stärke des Kreisens um die Platten führen wir nun wieder die Annahme ein, daß an den rechten Endpunkten der Geradenstücke $z = \pm i\frac{h}{2} + \frac{L}{2}$ Spaltungspunkte der Gesamtströmung liegen, also an den beiden „Hinterkanten" glattes Abströmen mit endlicher Geschwindigkeit erfolgt. Es soll also für $t = \mp \lambda + \varepsilon$ in $\frac{dW}{dz}$ das Glied mit dem Faktor $\frac{1}{\varepsilon}$

verschwinden. Da dort die Wurzel als $\pm i \cdot \sqrt{(1-\lambda^2)(\lambda^2-k'^2)}$ genommen werden muß, ergibt sich aus beiden Bedingungen:

$$Q = 0 \text{ (auch schon aus Symmetriegründen)}$$

$$P = -\frac{L}{2} \cdot C \cdot V \sin\beta \cdot \frac{\sqrt{(1-\lambda^2)(\lambda^2-k'^2)}}{\lambda}.$$

Wir schreiben abkürzend

$$\frac{C \cdot \sqrt{(1-\lambda^2)(\lambda^2-k'^2)}}{\lambda} = A$$

und erhalten als Resultat, indem wir wieder φ einführen:

$$W = V \cdot \cos\beta \cdot z - V \cdot \sin\beta \cdot \frac{L}{2} \cdot C \sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi} - V \sin\beta \cdot \frac{L}{2} \cdot A \cdot \varphi.$$

Und

$$\frac{dW}{dz} = V \cdot \cos\beta \mp V \cdot \sin\beta \cdot \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{1-\lambda^2-k^2\sin^2\varphi} \mp V \sin\beta \cdot \frac{A}{C} \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-\lambda^2-k^2\sin^2\varphi}.$$

Für das unendlich Ferne von z ist auch t unendlich, und zwar $z = -i \frac{L}{2} \cdot C t + \cdots$

Dabei ist

$$\frac{dW}{dz} = V \cos\beta - i \cdot V \sin\beta + \frac{i \cdot \frac{L}{2} \cdot A \cdot V \sin\beta}{z} + \cdots$$

Demnach ist nach einem bekannten Satze die Gesamtzirkulation gleich $\frac{L}{2} \cdot A V \sin\beta$, und der Auftrieb des Gesamtsystems des aus beiden unendlich lang gedachten Platten bestehenden Doppeldeckers ist für die Längeneinheit

$$\pi \varrho V^2 \sin\beta \cdot L \cdot A.$$

Zum Vergleiche schreiben wir den theoretischen Auftrieb der einzelnen ebenen Fläche von der Tiefe L auf die Längeneinheit hin; er ist

$$\pi \varrho V^2 \sin\beta \cdot L.$$

Demnach muß für $\frac{h}{L} = \infty$, d. h. wenn beide Flächen sich nicht mehr stören, $A = 2$ sein; für $\frac{h}{L} = 0$, d. h. wenn beide in eine verschmelzen, $A = 1$.

Um die Vorzeichen zu charakterisieren, welche die drei aus horizontalen, vertikalen und reinen Zirkulationsströmungen herrührenden Geschwindigkeiten an den Platten selbst besitzen, setzen wir die folgenden Skizzen der drei Einzelströmungen bei (Fig. 6).

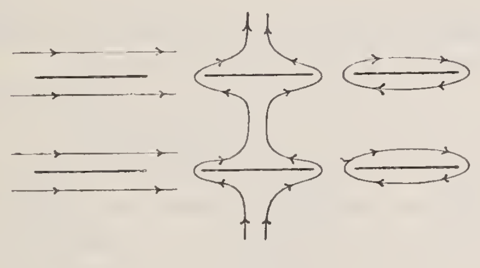


Fig. 6.

Noch sei bemerkt, daß an den Vorderkanten $\pm i \frac{h}{2} - \frac{L}{2}$ sich unendlich große Geschwindigkeit so einstellt, daß für Punkt $z = \pm i \frac{h}{2} - \frac{L}{2} + \delta$ die Entwicklung der Geschwindigkeit mit

$$\frac{i}{\sqrt{\delta}} \cdot V \cdot \sin \beta \sqrt{\frac{L}{2} \cdot A}$$

beginnt.

Wie früher schon gezeigt,[1]) folgt daraus an jeder Vorderkante eine Saugkraft in der Plattenrichtung je vom Betrage

$$\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot L \frac{A}{2} \qquad \text{gegen} \qquad \pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot L$$

bei der einzelnen Platte.

[1]) Sitzungsberichte der Bayer. Akad. der Wiss. 1910, S. 25.

Eleganter wird die Darstellung durch die Einführung von elliptischen resp. Thetafunktionen. Sei die ursprüngliche Variable $t = dn(u)$ mit dem Modul k gesetzt. Dann ergeben sich die früheren Konstanten λ und C aus

$$\lambda^2 = 1 - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}; \qquad C = \frac{\Theta(u_0)}{\Theta'(u_0)},$$

wobei noch

$$sn\,u_0 = \sin\varphi_0 = \frac{1}{k}\sqrt{1-\lambda^2} = \frac{1}{k}\,\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} \qquad \text{oder} \qquad dn\,u_0 = \lambda$$

ist.

Wir erhalten dann, da die Perioden der eingeführten elliptischen Integrale $K = F_1$, $K' = F_1'$ sind:

$$z = -i\,\frac{h}{2} + \frac{L}{2}\cdot\frac{\Theta(u_0)}{\Theta'(u_0)}\cdot\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{L}{2}\cdot k^2\,\frac{\Theta(u_0)}{\Theta'(u_0)}\cdot[sn^2 u_0 - sn^2 u],$$

$$W = V\cos\beta\cdot z + V\sin\beta\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{\Theta(u_0)}{\Theta'(u_0)}\left[\pm dn\,u \pm \frac{k^2\,sn\,u_0\,cn\,u_0}{dn\,u_0}\,\text{ampl.}\,u\right],$$

$$\frac{dW}{dz} = V\cos\beta + V\sin\beta\,\frac{\pm\, sn\,u\cdot cn\,u\cdot dn\,u_0 \pm sn\,u_0\cdot cn\,u_0\cdot dn\,u}{dn\,u_0\,[sn^2 u_0 - sn^2 u]}.$$

Das Rechenschema wäre folgendes. Nach Annahme von k entnimmt man K und K' den Legendreschen Tafeln, rechnet $\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}}$ und sucht den Wert u_0 für dies als $sn\,u_0$. Dann ergibt sich das Verhältnis:

$$\frac{h}{L} = \frac{\Theta(u_0)}{\Theta'(u_0)}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{K}.$$

Da zur Berechnung der Θ die Mitnahme von zwei, höchstens drei Gliedern der trigonometrischen Entwicklung genügt, ist die Zahlenrechnung für jede einzelne Annahme von K verhältnismäßig kurz; übrigens doch wohl die früher gegebene Konstanten- und Auftriebsberechnung noch etwas kürzer.

Als Zirkulation erhalten wir in der neuen Darstellungsform:

$$V \sin\beta \cdot \frac{L}{2}\frac{\Theta(u_0)}{\Theta'(u_0)}\frac{k^2 sn\,u_0\, cn\,u_0}{dn\,u_0} = V\sin\beta\cdot\frac{L}{2}\cdot k\,\frac{H(u_0)\,H_1(u_0)}{\Theta'(u_0)\,\Theta_1(u_0)}.$$

Und der Gesamtauftrieb des ganzen Systems wird:

$$\pi\varrho V^2 \sin\beta\cdot L\cdot\frac{\Theta(u_0)}{\Theta'(u_0)}\frac{k^2 sn\,u_0\, cn\,u_0}{dn\,u_0} = \pi\varrho V^2\sin\beta\cdot L\cdot k\,\frac{H(u_0)\,H_1(u_0)}{\Theta'(u_0)\,\Theta_1(u_0)}.$$

Der Gesamtauftrieb des Systems, vom Betrage $\pi\varrho V^2\sin\beta\cdot A$, wirkt in der Richtung senkrecht zur Strömung. Die Komponente davon senkrecht zur Plattenrichtung, vom Betrage $\pi\varrho V^2\sin\beta\cos\beta\, A$, wird durch Integration über die Platten, d. h. bis in beliebige Nähe der Vorderkanten, bis $z = \pm i\frac{h}{2} - \frac{L}{2} + \delta$ erhalten werden können. Die andere Komponente, in der Plattenrichtung, vom Betrage $\pi\varrho V^2\sin^2\beta\cdot A$, ist schon vorher als Saugwirkung der Vorderkanten, und zwar als je zur Hälfte an jeder Vorderkannte wirkend erkannt worden. Wir wollen nun durch Ausführung der Integration über die Platten die Verteilung des Auftriebes über die beiden einzelnen Platten, insbesondere über ihre rechte und linke Seite, also das Integral

$$-\frac{\varrho}{2}\int\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz$$

untersuchen.

Die drei Terme in der Geschwindigkeit $\frac{dW}{dz}$ ergeben im Quadrate vier zu unterscheidende Summanden.

Der erste, entsprechend der Wechselwirkung der horizontalen und der reinen Zirkulationsströmung, liefert im Integrale den Anteil:

$$\mathrm{I} = \frac{\varrho}{2}V^2\sin\beta\cos\beta\cdot\frac{L}{2}C k^2\int_0^K \frac{2\,sn\,u_0\,cn\,u_0}{dn\,u_0}\,dn\,u\cdot du.$$

Er liefert, da die Geschwindigkeiten beider Strömungen an den Oberseiten der Platten sich addieren, an den Unterseiten sich subtrahieren, überall positiven Auftrieb. Für jede

der vier Plattenhälften ergibt sich daraus zwischen den Grenzen $u = 0$ und $u = K$ der Auftrieb I.

Die Wechselwirkung der horizontalen und der vertikalen Strömung liefert für jede Plattenhälfte den Betrag:

$$\mathrm{II} = \frac{\varrho}{2} V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot \frac{L}{2} C k^2 \int_0^K 2\, sn\, u\, cn\, u\, du.$$

Aber da sich die Geschwindigkeiten dieser Strömungen für die rechte Hälfte der unteren Platte an der Unterseite addieren, an der Oberseite subtrahieren, ist für diese Plattenhälfte rechts unten der Auftrieb II negativ in Rechnung zu setzen. Entsprechend für die Plattenhälften links unten + II, rechts oben — II, links oben + II.

Drittens folgt aus der Wechselwirkung der vertikalen und der reinen Zirkulationsströmung für jede Plattenhälfte der Betrag:

$$\mathrm{III} = \frac{\varrho}{2} V^2 \sin^2\beta \cdot \frac{L}{2} C k^2 \int_0^K \frac{2\, sn\, u_0\, cn\, u_0}{dn\, u_0} \frac{sn\, u\, cn\, u\, dn\, u}{sn^2 u_0 - sn^2 u}\, du.$$

An der rechten Hälfte der unteren Platte subtrahieren sich für die Unterseite diese Geschwindigkeiten, wo $u < u_0$ ist. Dieser Beitrag zum Auftrieb ist also positiv zu rechnen. Für die Oberseite subtrahieren sie sich auch, so daß der dort erscheinende Beitrag negativ wird. Da aber dort $u > u_0$, also der Nenner im Integral negativ wird, ist für die Plattenhälfte rechts unten in der Tat + III als dieser Teil des Auftriebs in Rechnung zu setzen. Entsprechend für die Plattenhälften links unten — III, rechts oben — III, links oben + III.

Bisher waren die doppelten Produkte in $\left(\frac{dW}{dz}\right)^2$ betrachtet worden. Von den drei quadratischen Termen kann der erste, $V^2 \cos^2\beta$, bei der Auftriebsberechnung fortgelassen werden, da er überall gleiche Drucke zur Folge hat. Es bleibt

$$\mathrm{IV} = \frac{\varrho}{2} V^2 \sin^2\beta \cdot \frac{L}{2} C \cdot k^2 \int_0^K \frac{sn^2 u\, cn^2 u\, dn^2 u_0 + sn^2 u_0\, cn^2 u_0\, dn^2 u}{dn^2 u_0\, (sn^2 u_0 - sn^2 u)}\, du$$

zu untersuchen. Überall sind hier positive Geschwindigkeitsquadrate, also Unterdrucke, in Rechnung zu ziehen. Die Unterseiten liefern negative, die Oberseiten positive Beiträge zum Auftrieb. Da für die inneren Seiten der Betrag von $u > u_0$, für die äußeren $< u_0$ ist, tritt die Zeichenumkehrung im Integral richtig ein. Es ist für die Plattenhälfte rechts unten — IV, links unten — IV, rechts oben + IV, links oben + IV in Rechnung zu setzen.

Die Verteilung der Auftriebskräfte über die vier Plattenhälften ist durch das Schema dargestellt:

links oben I + II + III + IV rechts oben I − II − III + IV
links unten I + II − III − IV rechts unten I − II + III − IV

Die obere Platte erfährt im ganzen den Druckauftrieb 2 (I + IV)
die untere „ „ „ „ „ „ 2 (I − IV)

Dazu kommt noch für jede die gleiche Vordersaugkraft.

Der gesamte Druckauftrieb des Systemes senkrecht zur Plattenrichtung beträgt 4 · I, was sich als das oben schon aus der Zirkulation bestimmte $\pi \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot L \cdot A$ erweisen muß. Dazu kommt natürlich die Summe der beiden Saugkräfte der Vorderkanten $\pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cdot L \cdot A$ in der Plattenrichtung.

Wir bemerken, daß wegen der Ungleichheit der Druckauftriebe für die beiden Einzelplatten und der Gleichheit der Saugkräfte vorn nicht nur die Größe sondern auch die Richtung der Gesamtresultierenden für die beiden Platten verschieden sein wird; die Gesamtresultierende der unteren Platte wird etwas mehr nach vorn (links) hin geneigt sein (von der Normalrichtung zur Strömung gerechnet), die obere Platte etwas nach rechts. Erst die Resultierende wieder dieser beiden, der Gesamtauftrieb des ganzen Systems, fällt in die Normale zur Strömungsrichtung. Dabei ist freilich die theoretische Voraussetzung gemacht, daß die Vordersaugkraft in der Tat unverkrüppelt vorhanden bleibt. Wie durch Abrundung der Vorderkante das vielleicht einigermaßen zu erreichen wäre, das ist schon früher besprochen worden.

Für jede der beiden Platten wird die Lage der Resultierenden dadurch bestimmt, daß außer den in die y-Achse zu legenden Kräften $2\,(\mathrm{I}+\mathrm{IV})$ resp. $2\,(\mathrm{I}-\mathrm{IV})$ noch je das Drehmoment der Kräfte II + III resp. II — III vorhanden ist. Für das Gesamtsystem ist das Drehmoment dasjenige der Kräfte II; es wirkt im Sinne des Uhrzeigers drehend. Das Kräftepaar III dagegen sucht die beiden Platten gegeneinander zu verdrehen.

Das Drehmoment der Kräfte II findet sich als

$$4 \cdot \frac{\varrho}{2} V^2 \sin\beta \cos\beta\, C \cdot \frac{L}{2} k^2 \int\limits_0^K 2\, sn\,u\; cn\,u \cdot z \cdot du,$$

was durch partielle Integration leicht zu lösen ist.

Bei Ausführung der Integrationen III und IV ist zu beachten, daß im Innern des Intervalles ein singulärer Punkt vom Typus $\int \frac{du}{u-u_0}$ liegt. Da hier die Integration bis zu einem beliebig nahe an der Kante u_0 liegenden Punkte, und zwar demselben auf Ober- und Unterseite, fortgeführt werden soll, und einem solchen Punkte auf der Ober- resp. Unterseite der Parameter $u_0+\varepsilon$ resp. $u_0-\varepsilon$ mit demselben ε zugehört, so bringt die Integration über den Punkt hinweg, d. h. ohne Ausschaltung des Intervalles von $-\varepsilon$ bis $+\varepsilon$, nur einen rein imaginären Summanden zum ungeänderten reellen Resultat. Dieser imaginäre Summand stellt durch seinen Koeffizienten von i, wie bei Ersetzung der Stelle u_0 durch einen beliebig kleinen Halbkreis in u, daher Ersetzung der Kante in z durch ein unendlich nahes Stückchen der benachbarten Stromlinie deutlich wird, die Saugkraft der Kante für die betreffende Strömung dar. Wegen umgekehrter Integrationsrichtung ergeben sich dabei verschiedene Vorzeichen für die untere und die obere Platte.

Die Resultate der Integrationen sind, wenn die Schreibweise mit den anfangs eingeführten Konstanten K, K', λ, C, A gewählt wird:

$$\text{I} = \pi \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{A}{2}$$

$$\text{II} = \pi \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{C(1-k')}{\pi}$$

$$\text{III} = \pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cdot \frac{L}{2} \cdot \left\{\frac{A}{2\pi} \, l n \left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2 - k'^2}\right) \pm i \frac{A}{2}\right\}$$

$$\text{IV} = \pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cdot \frac{L}{2} \cdot \left\{\frac{K}{2\pi}\left(\frac{C(1-2\lambda^2)(\lambda^2 - k'^2)}{\lambda^2} + C(1-\lambda^2) - \frac{2A}{C}\right) \pm i \frac{A}{2}\right\}.$$

An den Hinterkanten heben sich die beiden in III und IV erscheinenden imaginären Terme (Saugkräfte) fort, an den Vorderkanten summieren sie sich zu dem schon aufgestellten Betrage von $\pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cdot L \cdot \frac{A}{2}$ als Saugkraft für je eine Platte. Die Druckauftriebe für die einzelnen Plattenhälften sind als I ± II ± III ± IV zu bilden. Der Gesamtdruckauftrieb ist, wie vorausgesehen, $4\,\text{I} = \pi \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot L \cdot A$.

Die Ausführung der Integration für das Drehmoment der Kräfte II ergibt:

$$D = \pi \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot L^2 C^2 \cdot \frac{1 - \lambda^2 - \frac{k^2}{2}}{2}.$$

Die bisher in der y-Achse angreifende Resultierende 4 I muß man also, um dies Drehmoment hineinzunehmen, um die Strecke

$$\frac{D}{4\,\text{I}} = \frac{L}{4} \cdot \frac{C^2(2 - 2\lambda^2 - k^2)}{A}$$

nach vorn (links) verschieben.

Im Falle der Einzelplatte, d. h. hier im Falle entweder $\frac{h}{L} = \infty$ oder $\frac{h}{L} = 0$ beträgt diese Verschiebung nach vorn einfach $\frac{L}{4}$.

Das Drehmoment endlich, das beide Platten gegeneinander bzw. die eine gegen die andere festgehaltene zu verdrehen strebt, beträgt:

$$\pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cdot L^2 C^2 \frac{k^4}{2\pi} \frac{sn u_0 cn u_0}{dn u_0} \int_0^K (sn^2 u_0 - sn^2 u) ln(sn u_0^2 - sn^2 u) du.$$

Fügt man zu der in der angegebenen Weise verschobenen Resultierenden 4 I des ganzen Systems noch die beiden an den Vorderkanten wirkenden Saugkräfte hinzu, so ergibt sich als Schlußresultat, daß der theoretische Gesamtauftrieb des Systems (Vordersaugkraft eingeschlossen) im Betrage von $\pi \varrho V^2 \sin\beta \cdot L \cdot A$ in Richtung senkrecht zur Strömung so wirkt, daß seine Angriffslinie durch den Punkt geht, der mitten zwischen den Platten um $\frac{L}{4} \cdot \frac{C^2(2 - 2\lambda^2 - k^2)}{A}$ gegen die Verbindungslinie der Plattenmitten nach vorn (links) verschoben liegt.

Es mögen nun einige Zahlenresultate folgen.

Für große Werte $\frac{h}{L}$, also entfernte Platten, ist k klein und angenähert (freilich nur für sehr kleine k als gute Näherung):

$$\frac{h}{L} = \frac{4}{k^2} - 2 - \frac{11}{32} k^2 \ldots; \quad A = 2\left(1 - \frac{k^4}{64} \cdots\right) = 2\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{L}{h}\right)^2 \cdots\right)$$

Die Koeffizienten in I, II, III, IV werden angenähert:

$$1 - \frac{k^4}{64}; \quad \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{k^4}{128}\right); \quad \frac{k^2}{4\pi}; \quad \frac{k^2}{8}.$$

Die Verschiebung der Resultierenden beträgt $\frac{L}{4}\left(1 + \frac{k^4}{128}\right)$.

Für kleine Werte $\frac{h}{L}$, also nahe Platten, ist k nahezu 1, k' klein und es wird angenähert $\left(\text{noch bis } \frac{h}{L} = \frac{1}{2} \text{ einigermaßen genau}\right)$, wenn noch $\cos hyp \frac{\sigma}{2} = + \sqrt[2]{ln \frac{4}{k'}}$ gesetzt wird:

$$\frac{h}{L}=\frac{\pi}{\sin\operatorname{hyp}\sigma-\sigma};\quad A=1+\frac{\sigma}{\sin\operatorname{hyp}\sigma-\sigma}=1+\frac{1}{\pi}\frac{h}{L}\cdot ln\left(2\pi\cdot\frac{L}{h}\right)+\cdots$$

Die Koeffizienten in I, II, III, IV werden angenähert:

$$\tfrac{1}{2}+\sigma e^{-\sigma};\quad \frac{1}{\pi}(1+2(\sigma+1)e^{-\sigma});\quad \frac{1}{2\pi}(\sigma-ln 4):$$

$$\frac{1}{2\pi}(\sigma-1+2(\sigma^2-\sigma-1)e^{-\sigma}).$$

Die Verschiebung der Resultierenden beträgt:

$$\frac{L}{4}(1+(2\sigma-4)e^{-\sigma}).$$

Es folgt eine Tabelle der zusammengehörigen Werte von $\frac{h}{L}$ und A für verschiedene Annahmen von $k=\sin\vartheta$. Aus ihr geht die Beziehung zwischen k und $\frac{h}{L}$ deutlich hervor; für gegebenes $\frac{h}{L}$ findet man das zugehörige k durch Interpolation aus dieser Tabelle schon recht genau, jedenfalls viel genauer, als praktische Zwecke es erfordern würden.

$k=\sin\vartheta$;	$\frac{h}{L}$	A
$\vartheta=0^0$	∞	2
15^0	57,7	1,99985
30^0	13,88	1,9949
45^0	5,76	1,985
60^0	2,87	1,945
68^0	2,018	1,896
75^0	1,456	1,825
80^0	1,113	1,745
82^0	0,984	1,703
85^0	0,787	1,623
87^0	0,644	1.550
88^0	0,562	1,503
89^0	0,460	1,435
$89^0\,30'$	0,388	1,384
$89^0\,45'$	0,335	1.344
$89^0\,55'$	0,275	1,297
$89^0\,59'$	0,217	1,248
$89^0\,59'\,59''$	0,141	1,178
	0,076	1,111
	0,045	1,072
90^0	0	1,000

Weiter sind für $k = \sin 68^0$, $\sin 82^0$, $\sin 85^0$, $\sin 89^0$ die Koeffizienten von

$$\pi \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot \frac{L}{2} \quad \text{resp.} \quad \pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cdot \frac{L}{2}$$

in I, II, III, IV berechnet, nämlich:

k	$\frac{h}{L}$	I	II	III	IV
$k = \sin 68^0$	$\frac{h}{L} = 2{,}018$	0.948	0,619	0,144	0,171
$\sin 82^0$	0,948	0,852	0,580	0,241	0,335
$\sin 85^0$	0,787	0,811	0,558	0,272	0,367
$\sin 89^0$	0,460	0,717	0,497	0,340	0,428

Die Druckauftriebe der einzelnen Plattenhälften (für die Längeneinheit) ergeben sich also zu $\pi \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot \frac{L}{2}$ mal den folgenden Koeffizienten:

	links oben	rechts oben
$\frac{h}{L} = \infty$	$1{,}637 + 0{,}000 \operatorname{tg} \beta$	$0{,}363 + 0{,}000 \operatorname{tg} \beta$
$\frac{h}{L} = 2{,}018$	$1{,}567 + 0{,}315 \operatorname{tg} \beta$	$0{,}329 + 0{,}027 \operatorname{tg} \beta$
$\frac{h}{L} = 0{,}984$	$1{,}432 + 0{,}576 \operatorname{tg} \beta$	$0{,}272 + 0{,}094 \operatorname{tg} \beta$
$\frac{h}{L} = 0{,}787$	$1{,}370 + 0{,}639 \operatorname{tg} \beta$	$0{,}253 + 0{,}095 \operatorname{tg} \beta$
$\frac{h}{L} = 0{,}460$	$1{,}214 + 0{,}768 \operatorname{tg} \beta$	$0{,}220 + 0{,}088 \operatorname{tg} \beta$

Die Zahlen für die unteren Plattenhälften sind dieselben, nur sind die Glieder mit $\operatorname{tg} \beta$ negativ zu nehmen.

In den berechneten Druckauftrieben, die für die obere resp. untere Platte die Beträge haben $\pi \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot L$ mal

$$1 \pm 0 \cdot \operatorname{tg} \beta: \quad 0{,}948 \pm 0{,}171 \operatorname{tg} \beta; \quad 0{,}852 \pm 0.335 \operatorname{tg} \beta;$$
$$0{,}811 \pm 0{,}367 \operatorname{tg} \beta; \quad 0{,}717 \pm 0{,}428 \operatorname{tg} \beta$$

tritt noch für jede Platte je die Vordersaugkraft hinzu vom Betrage $\pi \varrho V^2 \sin^2 \beta \cdot L$ mal

1 0,948 0,852 0,811 0,717

Im ganzen erkennen wir, daß die untere Platte einen etwas kleineren Druckauftrieb zum Gesamtauftrieb beisteuert als die obere. Bei kleinen Winkeln β und nicht gar zu kleinem Verhältnis $\frac{h}{L}$ ist aber dieser Unterschied nicht eben sehr beträchtlich; für $\frac{h}{L} = 0{,}984$ und $\beta = 10^0$ ist der Druckauftrieb der oberen und der unteren Platte beziehungsweise:

$$(0{,}852 \pm 0{,}335 \operatorname{tg} 10^0)\, \pi \varrho V^2 \sin \beta \cos \beta \cdot L.$$

Der Koeffizient $(0{,}852 \pm 0{,}059)$ zeigt, daß in diesem Falle die obere Platte etwa 7% mehr, die untere ebensoviel weniger als die Hälfte des gesamten Druckauftriebs leistet, also die obere etwa $^1/_7$ mehr als die untere.

Theoretisch gibt es für jedes Distanzverhältnis $\frac{h}{L}$ einen bestimmten Luftstoßwinkel β, von dem ab die obere Platte mehr Auftrieb leistet, als wenn sie allein stünde, und einen zweiten Winkel β, von dem ab die untere Platte sogar negativen Auftrieb erführe, also eine Tendenz der Strömung bestünde, die Platten auseinander zu reißen. Insbesondere bei äußerst kleinem Verhältnis $\frac{h}{L}$ würde dies auch bei kleinen Luftstoßwinkeln β fühlbar. In Wirklichkeit werden aber, da die ganze behandelte Strömung ja nur bei kleinen Winkeln β eine Annäherung der tatsächlichen Erscheinung ergeben dürfte, diese Fälle sich praktisch nie bemerkbar machen.

Dagegen zeigen die obigen Zahlen wieder auffällig, wie schon bei der Einzelplatte $\left(\text{oder hier } \frac{h}{L} = \infty\right)$ bekannt, eine sehr starke Mehrwirkung der vorderen Plattenhälften im Verhältnis zu den hinteren; eine Wirkung, die sich ja auch in der Verlegung der Resultierenden nach vorn äußert.

Diese Verschiebung der Resultierenden des Druckauftriebs des ganzen Systems nach vorn (links) beträgt für

$\frac{h}{L} = \infty$	2,018	0,984	0,787	0,460	0
$\frac{L}{4}$	$\frac{L}{4} \cdot 1{,}0259$	$\frac{L}{4} \cdot 1{,}0715$	$\frac{L}{4} \cdot 1{,}0882$	$\frac{L}{4} \cdot 1{,}1132$	$\frac{L}{4}$.

Es ist also die Verschiebung des Druckmittelpunktes nach vorn um ein geringes größer als bei der Einzelplatte. Die Resultierende geht durch einen Punkt mitten zwischen beiden Platten, der $\left(\text{für } \frac{h}{L} \text{ etwa gleich } 1\right)$ von der Verbindungslinie der Vorderkanten um etwa 23 % der Plattenbreite, statt um 25 % wie bei der Einzelplatte absteht.

Zum Schlusse sei bemerkt, daß der Fall zweier Platten von ungleichen Breiten L_1 und L_2, wenn die Verbindungslinie ihrer Mitten senkrecht auf beiden steht, in derselben Weise, nur mit komplizierterer Zahlenrechnung, erfolgen kann; ebenso bietet der Fall von drei und mehr Flächen prinzipiell nichts Neues.

3. Strömung um zwei gewölbte, untereinander stehende Schalen.

Die Radien seien r_1 und r_2, die Bogenlängen $r_1 \cdot 2\,\alpha_1$ und $r_2 \cdot 2\,\alpha_2$. Die Verbindungslinie der Zentra sei die y-Achse, die beiden Bögen symmetrisch zu dieser gelegen. Um die Abbildung der rechten Halbebene z mit den beiden krummen Einschnitten auf die Halbebene t bequem durchführen zu können, nehmen wir an, daß sich beide Kreise berühren. Der Berührpunkt sei als Nullpunkt der Ebene z gewählt (Fig. 7).

Die unter 2 behandelte Strömung ist ein Spezialfall der nun betrachteten, für den der Berührpunkt im Unendlichen liegt.

Die Abbildung $z = \frac{1}{\zeta}$ führt die rechte Halbebene z mit den beiden krummen Einschnitten in die rechte Halbebene ζ mit zwei geraden Einschnitten über (Fig. 7). Es entspricht $z = \infty$ $\zeta = 0$, den Ecken des Gebietes z entsprechen die Ecken

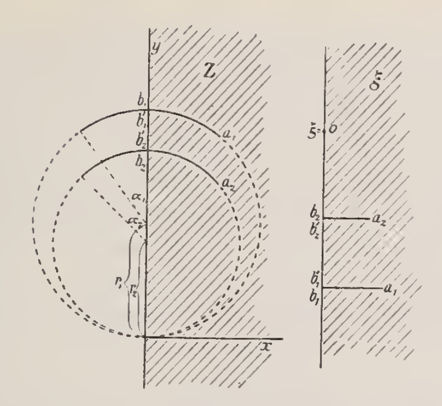


Fig. 7.

$$-\frac{i}{2r_1};\ -\frac{i}{2r_1}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}{2r_1};\ -\frac{i}{2r_1};\ -\frac{i}{2r_2};\ -\frac{i}{2r_2}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{2r_2};\ -\frac{i}{2r_2}.$$

Die Abbildung des Gebietes ζ auf die Halbebene t erfolgt durch

$$\zeta = -iC\int_0^t \frac{(t-a_1)(t-a_2)\,dt}{\sqrt{(t-b_1)(t-b_1')(t-b_2')(t-b_2)}},$$

wo $t = b_1,\ a_1,\ b_1',\ b_2',\ a_2,\ b_2$ den Ecken in ζ, und $t = 0$ $\zeta = 0$ entspricht.

Die Vertikalströmung, die also im Unendlichen die Richtung der y-Achse und die Geschwindigkeit $V\sin\beta$ besitzt, wird, da $z = \infty$ und $W = \infty$ sich entprechen sollen, durch $W = \frac{M}{t}$ dargestellt.

Die Horizontalströmung, die im Unendlichen die Richtung der x-Achse und die Geschwindigkeit $V\cos\beta$ besitzt, und ebenso die kreisende Strömung um beide Schalen, besitzt diese Schalen zu Stromlinien, die y-Achse zur Äquipotentiallinie. Unter Berücksichtigung davon, daß wieder $z = \infty$ und $w = \infty$ sich entsprechen sollen, erhält man hier die Strömungsfunktion

$$W = i N \int \frac{(t - A_1)(t - A_2)\, dt}{\sqrt{(t - b_1)(t - b_1')(t - b_2')(t - b_2)}} \cdot \frac{1}{t^2}.$$

Den Ecken des Gebietes W (Fig. 3) entsprechen die Punkte $t = b_1, A_1, b_1', b_2', A_2, b_2$. Die Punkte $t = A_1, A_2$ entsprechen den Spaltungspunkten der betrachteten zweiten Strömung, sie fallen nicht mit a_1, a_2 zusammen, sondern bleiben willkürlich, solange die Stärke des Kreisens um die Schalen willkürlich bleibt.

Die allgemeinste Zirkulationsströmung wird durch die Summe der beiden aufgestellten dargestellt. Die Konstante C ist beliebig und unwesentlich, da sie nur den Maßstab der Ebene z bestimmt. Die Konstanten a und b sind durch die Abbildung z auf t bestimmt; M und N durch die Geschwindigkeit und Richtung der Strömung im Unendlichen. Endlich A_1 und A_2 werden wieder durch die Annahme bestimmt, daß für die Gesamtströmung die (rechts liegenden) Hinterkanten der beiden Schalen Spaltungspunkte sein sollen, dort also glattes Abströmen mit endlicher Geschwindigkeit erfolgt. Dann ist die Aufgabe gelöst. Allerdings macht die wirkliche numerische Bestimmung der Konstanten sehr beträchtliche Rechenarbeit, ebenso die Berechnung der Auftriebsverhältnisse im einzelnen, wenn auch die Schwierigkeiten eben nur solche der numerischen Rechnung sind.

Die Berechnung der 6 Konstanten a und b der Abbildung z, ζ, t erfolgt durch Ansetzen der Gleichungen für die Lage der Ecken. Es ist:

$$-\frac{i}{2 r_1} = -i C \int_0^{b_1} \frac{(t-a_1)(t-a_2)\, dt}{\sqrt{(t-b_1)(t-b_1')(t-b_2')(t-b_2)}} = -i C \int_{-s}^{d_1} \frac{(\tau^2 - c^2)\, d\tau}{\sqrt{(\tau-d_1)(\tau-d_1')(\tau-d_2')(\tau-d_2)}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}{2 r_1} = -i C \int_{b_1}^{a_1} \qquad\qquad = -i C \int_{d_1}^{-c}$$

$$0 = -i C \int_{b_1}^{b_1'} \qquad\qquad = -i C \int_{d_1}^{d_1'}$$

$$-i\left(\frac{1}{2r_2}-\frac{1}{2r_1}\right)=-iC\int_{b'_1}^{b'_2} \qquad =-iC\int_{d'_1}^{d'_2}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{2r_2}=-iC\int_{b'_2}^{a_2} \qquad =-iC\int_{d'_2}^{+c}$$

$$0=-iC\int_{b'_2}^{b_2} \qquad =-iC\int_{d'_2}^{d_2}$$

Dabei wurde eine Verschiebung der Ebene t durch die Einführung $\tau = t - \frac{1}{4}(b_1 + b'_1 + b'_2 + b_2) = t - s$ vorgenommen. Den Punkten $t = b_1, a_1, b'_1, b'_2, a_2, b_2$ entsprechen dann die Punkte

$$\tau = d_1 = b_1 - s; \quad c_1 = a_1 - s; \quad d'_1 = b'_1 - s, \quad d'_2 = b'_2 - s;$$
$$c_2 = a_2 - s; \quad d_2 = b_2 - s.$$

Es ist dadurch $d_1 + d'_1 + d'_2 + d_2 = 0$ geworden. Da die dritte und die sechste der Bestimmungsgleichungen für die Konstanten zusammen auf die von vornherein klare Forderung, daß für $t = \infty$, $z = 0$ kein logarithmischer Punkt in der Abbildung z, t erscheinen darf, führt, so ergibt sich sofort die Bedingung $c_1 + c_2 = 0$, und wir setzen $-c_1 = c_2 = c$.

Eine der Konstanten d_1, d'_1, d'_2, d_2 kann beliebig genommen werden, da dies nur den Maßstab in der Ebene τ festlegt; wir wählen etwa $d'_2 = +1$.

Es bleiben demnach, unter Berücksichtigung davon, daß bereits eine Kombination der dritten und sechsten Gleichung verwendet und daher nur eine von diesen mehr verwendbar ist, fünf Gleichungen für C, c und die beiden fehlenden d, endlich s. Dabei wird C durch Quotientenbildung fortgeschafft und dadurch auf den linken Seiten der Gleichungen nur mehr die Form, nicht mehr der Maßstab der Hindernisse (der Schalen) in der Ebene z auftreten. Unmittelbar die nunmehr vier Unbekannten c, d und s aus diesen vier Gleichungen für ge-

gebene Form, d. h. gegebene a_1, a_2 und $\frac{r_1}{r_2}$ zu berechnen, ist freilich untunlich. Wir schlagen deshalb, wie vorher bei den ebenen Platten, den umgekehrten Weg ein.

Vorher war eine Gestaltskonstante $\frac{h}{L}$ vorhanden. Statt von ihr gingen wir von der Abbildungskonstante k aus und berechneten erst aus deren Annahme das zugehörige $\frac{h}{L}$, d. h. die Gestalt des Hindernisses. Nunmehr haben wir drei Gestaltskonstanten, a_1, a_2 und $\frac{r_1}{r_2}$. Wir nehmen diesmal zwei Abbildungskonstanten, etwa d_1 und d_1', beliebig an. Da $d_2' = 1$ war und d_2 aus $d_1 + d_1' + d_2' + d_2 = 0$ sich findet, läßt sich nun aus Gleichung 3 (oder 6) c berechnen. Es ist nämlich

$$\int_{d_1}^{d_1'} \frac{\tau^2\, d\tau}{\sqrt{}} - c^2 \int_{d_1}^{d_1'} \frac{d\tau}{\sqrt{}} = 0.$$

Damit sind für die Gestalt die Verhältnisse

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a_1}{2}}{r_1} : \frac{\operatorname{tg}\frac{a_2}{2}}{r_2} : \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

bestimmt.

Eine Gestaltskonstante von den drei vorhandenen charakteristischen aber kann man jetzt nach Wahl der zwei Abbildungskonstanten d immer noch beliebig vorschreiben. Es läßt sich z. B. noch fordern, daß die beiden Kreisschalen gleich lange Sehnen haben sollen, also daß

$$2\, r_1 \sin a_1 = 2\, r_2 \sin a_2$$

sein soll. Das wird dann die Möglichkeit einer Form geben, die, sofern noch durch die günstige Wahl der beiden d flache Schalen, das heißt kleine a_1 und a_2 und etwa Schalenabstand $2\,(r_1 - r_2)$ annähernd gleich Sehnenlänge gemacht wird, der Form eines Doppeldeckers so nahe kommt, als überhaupt bei

der Annahme berührender Kreise möglich ist. Wie groß zu diesem Zwecke d_1 und d_1' zu wählen ist, muß durch Versuche und Überschlagsrechnungen festgestellt werden. Es handelt sich ja auch überhaupt nur darum, den theoretischen Typus der untersuchten Strömung klar zu legen, nicht von vornherein gegebene Einzelbeispiele durchzurechnen.

Wir wählen $d_1 = -28$, $d_1' = -8$. Da $d_2' = +1$, folgt $d_2 = +35$.

Die Ausrechnung der obigen Gleichungen liefert die Verhältnisse:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}{r_1} : \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{r_2} : \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 11{,}52 : 17{,}96 : 29{,}28.$$

Unter Zufügung der Bedingung gleicher Sehnen erhalten wir die Gestalt durch

$$\frac{r_2}{r_1} = 0{,}8032; \quad 2\,\alpha_1 = 22^0\,2'; \quad 2\,\alpha_2 = 27^0\,32'.$$

Die Sehnenlänge ist

$$2\,r_1 \sin\alpha_1 = 2\,r_2 \sin\alpha_2 = 0{,}3822\,r_1,$$

die Entfernung der Schalenmitten

$$2\,(r_1 - r_2) = 0{,}3936\,r_1,$$

also etwa 1,03 mal Sehnenlänge.

Die Konstanten c und s berechnen sich zu $c = 17{,}53$ und $s = 134{,}17$.

Unsere Annahme der d und der gleichen Sehnen führt uns also zu zwei Schalen, die ziemlich genau in einem Abstande gleich ihrer gemeinsamen Sehnenlänge untereinander stehen. Die obere hat das Wölbungsverhältnis $\frac{\text{Pfeil}}{\text{Sehne}} = \frac{1}{20{,}75}$, die untere $\frac{1}{16{,}57}$ (Fig. 8). Daß die untere Schale etwas stärker gewölbt ist als die obere, ist bei Annahme gleicher Sehnenlänge nicht zu vermeiden, da die Schalenkreise sich berühren sollen.

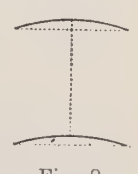


Fig. 8.

Natürlich kann man als die eine bei diesem Rechenschema wählbare Gestaltsbedingung eine andere als die der Sehnengleichheit wählen, z. B. die gleicher Wölbung. Rechnerisch verhältnismäßig am einfachsten wird die Durchführung für den Fall, daß man $d_1' = -d_2' = -1$ annimmt. Dann wird auch $-d_1 = +d_2$, und setzen wir diese noch willkürliche Größe gleich $\frac{1}{k}$, so nehmen die auftretenden elliptischen Integrale ohne weiteres die Normalform an. Aber aus der Annahme $d_1' = -d_2' = -1$ folgt, daß

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}{r_1} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2}}{r_2}$$

ist. Geometrisch und für die Gestalt bedeutet das, daß in der Ebene ζ die beiden geraden Einschnitte der Halbebene gleich lang sind (also dort die Form wie im vorigen Paragraphen vorhanden ist), was freilich die Vereinfachung begreiflich macht. Aber in der Ebene z liegen dann die beiden rechten Endpunkte der Schalenbögen (und ebenso natürlich die linken) auf einem Kreise, der die y-Achse im Nullpunkte berührt. Es wird also die Sehne der unteren Schale weit kleiner als die der oberen, was praktischen Formen nicht entspricht. Nur bei äußerst flachen Bögen ist auf diese Weise eine einigermaßen brauchbare Form zu erzielen. Wäre z. B. $\frac{\alpha_1}{2} = 3^0$, $r_1 = 1$, also die obere Sehnenlänge 0,209, und $r_2 = 0,9$, also der Abstand dor Schalenmitten 0,2, so wäre $\frac{\alpha_2}{2} = 2^0 42'$, die untere Sehnenlänge 0,1694. Das Wölbungsverhältnis wäre für die obere Schale $\frac{1}{38,2}$, für die untere $\frac{1}{42,4}$. Die

Fig. 9.

Fig. 9 zeigt die Verhältnisse. Als Typus, um die Art der Beeinflussung der beiden Schalen und ihrer Strömungen durcheinander einigermaßen erkennen zu lassen, würde die so aufgestellte Form immerhin eine qualitative Vorstellung geben können.

Wenn erst, wie bisher besprochen, die Abbildung der Halbebene z in t geleistet und alle Konstanten bestimmt sind, so bietet die Ermittlung der gesuchten Strömung, d. h. der Konstanten M, N, A_1 und A_2 keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr; ebensowenig die des Auftriebs des ganzen Systems beider Schalen. Nicht so mühelos gestaltet sich die Berechnung der Verteilung dieses Auftriebs im einzelnen über beide Schalen.

Zunächst ist:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\zeta^2}{C t^2} \cdot \frac{i M \sqrt{(t-b_1)(t-b_1')(t-b_2')(t-b_2)} + N(t-A_1)(t-A_2)}{(t-a_1)(t-a_2)}.$$

Wird z unendlich, also $t = \lim \varepsilon = 0$, so wird:

$$\lim \zeta = -iC \frac{a_1 a_2}{\sqrt{b_1 b_1' b_2' b_2}} \varepsilon \left[1 - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1'} + \frac{1}{b_2'} + \frac{1}{b_2}\right)\right) \cdots\right].$$

Somit:

$$\frac{dW}{dz} = -C \frac{a_1 a_2}{b_1 b_1' b_2' b_2} \Big[M \cdot \sqrt{b_1 b_1' b_2' b_2} \cdot i + N \cdot A_1 A_2$$

$$+ \varepsilon N A_1 A_2 \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1'} + \frac{1}{b_2'} + \frac{1}{b_2}\right) - \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right) \cdots \Big]$$

$$= -i C M \frac{a_1 a_2}{\sqrt{b_1 b_1' b_2' b_2}} - C N \frac{a_1 a_2 A_1 A_2}{b_1 b_1' b_2' b_2}$$

$$+ \frac{i}{z} \cdot \frac{N A_1 A_2}{\sqrt{b_1 b_1' b_2' b_2}} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1'} + \frac{1}{b_2'} + \frac{1}{b_2}\right)\right) \cdots$$

Aus der Geschwindigkeit im Unendlichen bestimmen sich die Konstanten:

$$M = V \sin\beta \frac{\sqrt{b_1 b_1' b_2' b_2}}{C a_1 a_2}; \qquad N \cdot A_1 A_2 = -V \cos\beta \cdot \frac{b_1 b_1' b_2' b_2}{C \cdot a_1 a_2}.$$

Endlich ist die Zirkulationskonstante:

$$\frac{N \cdot A_1 A_2}{\sqrt{b_1 b_1' b_2' b_2}} \left[\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1'} + \frac{1}{b_2'} + \frac{1}{b_2}\right)\right] = -\frac{V \cos\beta}{C} \frac{\sqrt{b_1 b_1' b_2' b_2}}{a_1 a_2} \left[\ \right].$$

Und der Auftrieb des ganzen Systems beider Schalen ist:

$$-2\pi\varrho V^2\cos\beta\,\frac{\sqrt{b_1 b_1' b_2' b_2}}{C a_1 a_2}\left[\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_1'}+\frac{1}{b_2'}+\frac{1}{b_2}\right)\right].$$

Zuletzt ist mit Hilfe der Annahme, daß an den Hinterkanten Spaltungspunkte liegen sollen, A_1 und A_2 zu bestimmen. Es soll also für $t = a_1$ und $t = a_2$ $\frac{dW}{dz}$ endlich bleiben. Oder es soll sein:

$$N A_1 A_2\left[\frac{a_1^2}{A_1 A_2}-a_1\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}\right)+1\right]+$$

$$+\,i M\sqrt{(a_1-b_1)(a_1-b_1')(a_1-b_2')(a_1-b_2)}=0:$$

d. h.:

$$\frac{a_1^2}{A_1 A_2}-a_1\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}\right)+1=$$

$$=\operatorname{tg}\beta\sqrt{\left(\frac{a_1}{b_1}-1\right)\left(1-\frac{a_1}{b_1'}\right)\left(1-\frac{a_1}{b_2'}\right)\left(1-\frac{a_1}{b_2}\right)}.$$

Und analog:

$$\frac{a_2^2}{A_1 A_2}-a_2\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}\right)+1=$$

$$=-\operatorname{tg}\beta\sqrt{\left(\frac{a_2}{b_1}-1\right)\left(\frac{a_2}{b_1'}-1\right)\left(\frac{a_2}{b_2'}-1\right)\left(1-\frac{a_2}{b_2}\right)}.$$

Daraus endlich:

$$\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}\right)=\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_1}\right)+$$

$$+\frac{\operatorname{tg}\beta}{\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}}\left[\sqrt{\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{a_1}\right)\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{b_1'}\right)\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{b_2'}\right)\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{b_2}\right)}\right.$$

$$\left.+\sqrt{\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{a_2}\right)\left(\frac{1}{b_1'}-\frac{1}{a_2}\right)\left(\frac{1}{b_2'}-\frac{1}{a_2}\right)\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{b_2}\right)}\right].$$

Und der Auftrieb wird für die Längeneinheit des Systems:

$$- 2\pi \varrho V^2 \frac{\sqrt{b_1 b_1' b_2' b_2}}{C \cdot a_1 a_2} \left\{ \cos\beta \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1'} + \frac{1}{b_2'} + \frac{1}{b_2}\right)\right] \right.$$

$$+ \sin\beta \cdot \frac{\left[\sqrt{\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_1}\right)\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1'}\right)\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_2'}\right)\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_2}\right)}\right.}{\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}}$$

$$\left. + \frac{\left.\sqrt{\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_2}\right)\left(\frac{1}{b_1'} - \frac{1}{a_2}\right)\left(\frac{1}{b_2'} - \frac{1}{a_2}\right)\left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{a_2}\right)}\right]}{\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}} \right\}.$$

Nachdem einmal die Abbildungskonstanten c, d, s und C berechnet sind, also $a = c + s$, $b = d + s$ bekannt sind, macht die Auswertung dieser Endformel für den Auftrieb des Systems keine Mühe.

Die Berechnung der Auftriebe der beiden einzelnen Schalen kann, allerdings mühsamer, mit Hilfe der Simpsonschen Regel oder einer ähnlichen Regel erfolgen; dabei wird zugleich die Geschwindigkeit der Strömung an verschiedenen Stellen der Schale berechnet und gibt so eine gewisse Übersicht über den Verlauf der Strömung in der Nähe der Schalen.

Für das in Fig. 8 dargestellte Beispiel der beiden Schalen von gleicher Sehnenlänge gibt die Zahlenrechnung bei horizontaler Strömung ($\beta = 0$) als Gesamtauftrieb $\varrho V^2 \cdot 0{,}2399$. Davon kommen auf die obere Schale $\varrho V^2 \cdot 0{,}1145$, auf die untere Schale $\varrho V^2 \cdot 0{,}1254$. Stünden die Schalen je allein oder in solcher Entfernung voneinander, daß sie gegenseitig keine Störung bewirken, so wäre der Auftrieb der oberen Schale $\varrho V^2 \cdot 0{,}1158$, der unteren Schale $\varrho V^2 \cdot 0{,}1450$. Die Summe beider wäre $\varrho V^2 \cdot 0{,}2608$.

Wir sehen, daß für diesen Fall der Auftrieb infolge der gegenseitigen Störung 0,920 von dem beträgt, was er ungestört als Summe ergeben würde. Immerhin ist der Verlust, ver-

glichen mit dem, welchen das System zweier ebenen Platten für den ähnlichen Fall, daß $\frac{h}{L} = 1{,}03$ ist, erleidet, kleiner, denn in diesem Fall gab die gestörte Strömung für jeden Winkel β etwa 0,860 des ungestörten Auftriebs.

Auch in Bezug auf die Verteilung des Auftriebsverlustes zeigt der Fall gewölbter Flächen Unterschiede gegenüber dem Falle ebener Flächen. Für diese ist bei kleinen Winkeln β der Verlust der oberen Fläche nicht viel kleiner als der der unteren Fläche. Dagegen zeigt hier die obere gewölbte Fläche fast keinen Auftriebsverlust und fast der ganze Verlust des Systems entfällt auf die untere gewölbte Fläche. Das bezieht sich auf den Winkel $\beta = 0$. Im ganzen kann man sagen, daß bei beliebigem Winkel β derjenige Teil des Auftriebs, der der Wölbung zuzuschreiben ist, also für $\beta = 0$ vorhanden wäre, durch Untereinanderstellen der Schalen weniger Verlust erleidet, als der Teil des Auftriebs, der dem schiefen Anprall der Strömung, also dem Winkel β, zuzuschreiben ist. Insbesondere geht der erstere Verlust so gut wie ganz auf Kosten der unteren Schale, während der zweite sich gleichmäßiger über beide Schalen verteilt.

4. Strömung um die Jalousie.

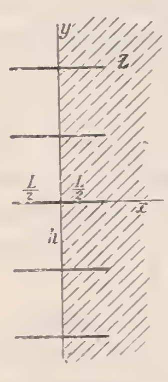


Fig. 10.

Wir nehmen unendlich viele Geradenstücke von der Breite L und dem gegenseitigen Abstande h an, die parallel untereinander gestellt sind, so daß die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte (die rein imaginäre Achse y) senkrecht zu ihnen ist (Fig. 10). Die x-Achse liege in einem dieser Geradenstücke.

Die Abbildung der rechten Halbebene z (mit den unendlich vielen Einschnitten von der Länge $\frac{L}{2}$) auf die Halbebene t ist durch die Formel gegeben:

$$z = \frac{L}{2} - C\int_0^t \frac{\sin t\, dt}{\sqrt{\sin(a-t)\sin(a+t)}}$$

$$= \frac{L}{2} + C\left[ln\left(\frac{\cos t}{\cos a} + \sqrt{\left(\frac{\cos t}{\cos a}\right)^2 - 1}\right)\right]_0^t = \frac{L}{2} - iC\left[\arccos\frac{\cos t}{\cos a}\right]_0^t.$$

Man kommt zu dieser Formel aus dem Ansatz für eine endliche Zahl untereinander gestellter Geradenstücke, wenn man sich an die Produktformel für den Sinus erinnert.

Da $t = a$ auf $z = 0$; $t = \pi - a$ auf $z = -ih$ führen soll, sind die Bedingungen für die Konstanten;

$$C\, ln\, \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = \frac{L}{2} \quad \text{und} \quad \pi C = h.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \operatorname{tg\,hyp}\left(\frac{L}{h}\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{und} \quad \sin a = \operatorname{tg\,hyp}\left(\frac{L}{h}\frac{\pi}{2}\right)$$

und es wird:

$$z = \frac{h}{\pi}\, ln\left(\frac{\cos t}{\cos a} + \sqrt{\left(\frac{\cos t}{\cos a}\right)^2 - 1}\right) = -i\frac{h}{\pi}\arccos\left(\frac{\cos t}{\cos a}\right).$$

Die Strömungsfunktion ist für die Strömung, die im Unendlichen die Richtung der y-Achse besitzt von der Form:

$$W = Mt.$$

Für die Strömung, die im Unendlichen die x-Richtung besitzt und mit einem Kreisen um die Geradenstücken verbunden ist, so daß $t = -\gamma$ ein Spaltungspunkt ist, erhält die Strömungsfunktion die Form:

$$W = N\int \frac{\sin(t+\gamma)\, dt}{\sqrt{\sin(a-t)\sin(a+t)}}.$$

M und N sind dabei reelle Konstanten.

Freilich ist hier, da ja die Jalousie in Richtung y ins Unendliche reicht, $z = \infty$ ein wesentlich singulärer Punkt. Wir

hätten uns auf einen Streifen von $z = +i\frac{h}{2}$ bis $z = -i\frac{h}{2}$ zu beschränken. Dasselbe aber erreichen wir, wenn wir stets nur in der Richtung x ins Unendliche gehen, um die dort vorgeschriebenen Bedingungen zu erfüllen. D. h., wir haben dafür $t = iT$ zu setzen und T reell ins Unendliche gehen zu lassen.

Die gesamte Strömungsfunktion

$$W = Mt + N\int\frac{\sin(t+\gamma)\,dt}{\sqrt{\sin(a-t)\sin(a+t)}}$$

liefert für die Geschwindigkeit $u - iv$ den Ansatz

$$\frac{dW}{dz} = \frac{M\sqrt{\sin(a-t)\sin(a+t)} + N\sin(t+\gamma)}{-\frac{h}{\pi}\sin t}.$$

Für $t = iT$, $\sin iT = i\sin\operatorname{hyp} T = \frac{i}{2}(e^T - e^{-T})$ wird

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{\pi}{h}\,\frac{M\sqrt{\frac{i}{2}\left(e^{\frac{a}{i}-T} - e^{-\frac{a}{i}+T}\right)\frac{i}{2}\left(e^{\frac{a}{i}+T} - e^{-\frac{a}{i}-T}\right)} + N\frac{i}{2}\left(e^{\frac{\gamma}{i}+T} - e^{-\frac{\gamma}{i}-T}\right)}{\frac{i}{2}\left(e^T - e^{-T}\right)}.$$

Demnach:

$$\lim_{T-\infty}\frac{dW}{dz} = \lim\frac{\pi}{h}\left(-\cdot\frac{Mie^T + Ne^T(\cos\gamma - i\sin\gamma)}{e^T}\right)$$

oder:

$$\lim_{T=\infty}\left(\frac{dW}{dz}\right) = V\cdot\cos\beta - iV\sin\beta = -\frac{\pi}{h}Mi - \frac{\pi}{h}N(\cos\gamma - i\sin\gamma).$$

Daraus folgt:

$$V\cos\beta = -\frac{\pi}{h}N\cos\gamma$$

$$V\sin\beta = \frac{\pi}{h}M - \frac{\pi}{h}N\sin\gamma.$$

Man bemerkt, daß die Zirkulationsströmung hier einen

Beitrag zur Vertikalgeschwindigkeit im Unendlichen liefert. Das ist verständlich, da das Kreisen um jede der Platten von endlichem Betrage ist und, obwohl das einzelne Kreisen nur einen verschwindenden Beitrag zur Geschwindigkeit im Unendlichen liefert, doch die Summation aller dieser Beiträge für die unendlich vielen Platten sehr wohl einen endlichen Beitrag liefern kann. Das läßt sich auch direkt durch Ausführung dieser Summation nachprüfen und verifizieren.

Wir erhalten:

$$N = -\frac{h}{\pi} V \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}; \qquad M = \frac{h}{\pi} V \left(\sin\beta - \sin\gamma \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right).$$

Im Vorhergehenden ist die allgemeinste Zirkulationsströmung um die Jalousie aufgestellt, sie enthält in γ noch eine Konstante, die je nach der Stärke des noch unbestimmten Kreisens um jede Platte verschiedenen Wert hat. Wir machen wieder die Annahme, daß die Spaltungspunkte der Gesamtströmung rechts an den „Hinterkanten" liegen sollen, d. h. daß für $z = \frac{L}{2}$, $t = 0$, $\frac{dW}{dz}$ endlich bleiben soll.

Dafür muß $M \sin\alpha + N \sin\gamma = 0$ sein, d. h.

$$\sin\alpha \left[\sin\beta - \sin\gamma \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right] - \sin\gamma \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = 0.$$

Es folgt:

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\beta \frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha}.$$

Damit ist die Strömung eindeutig bestimmt.

Zur Berechnung des Auftriebs haben wir die Integration

$$= \tfrac{1}{2}\varrho \int \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz = + \tfrac{1}{2}\varrho \int\limits_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\left[M\sqrt{\sin(\alpha - t)\sin(\alpha + t)} + N\sin(t + \gamma)\right]^2 dt}{\frac{h}{\pi}\sin t \sqrt{\sin(\alpha - t)\sin(\alpha + t)}}$$

auszuführen. Der erste quadratische Term gibt natürlich bei der

Integration als reellen Teil Null. Der Term des doppelten Produktes liefert den Wert:

$$-\varrho V^2 \cos\beta \sin\beta \cdot \frac{h}{\pi}\left[1-\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta}\right][2 \operatorname{arc} a + \operatorname{tg}\gamma \cdot \pi i]$$

$$= -\varrho V^2 \cos\beta \cdot \sin\beta \cdot \frac{h}{\pi}\frac{2 \operatorname{arc} a + \operatorname{tg}\gamma \cdot \pi i}{1+\sin a}.$$

Dieser für eine rechte Plattenhälfte berechnete Wert besitzt dieselbe Größe, aber das umgekehrte Vorzeichen für die linke Plattenhälfte, wo die beiden zusammenwirkenden Geschwindigkeiten, deren Wechselwirkung den Term veranlaßt, sich gerade dort subtrahieren, wo sie sich entsprechend links addieren und umgekehrt.

Der zweite quadratische Term

$$\frac{\varrho}{2} V^2 \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\gamma} \frac{h}{\pi}\int\limits_{-a}^{+a} \frac{\sin^2(t+\gamma)\,dt}{\sin t \sqrt{\sin(a-t)\sin(a+t)}}$$

gibt unter Einschluß des imaginären Wertes des ersten quadratischen Termes

$$\varrho V^2 h \cos^2\beta \operatorname{tg}\gamma \left[1+\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sin a} i\right] = \varrho V^2 \sin\beta\cos\beta \cdot h \frac{\sin a + \operatorname{tg}\gamma \cdot i}{1+\sin a}.$$

Dieser Term behält seinen Wert auch dem Vorzeichen nach für die linke Plattenhälfte. Die imaginären Terme stellen mit ihren Koeffizienten wieder die Kantensaugkräfte in der Plattenrichtung dar.

Der Druckauftrieb ist also für die linke bzw. rechte Plattenhälfte

$$\varrho V^2 \sin\cos\beta \cdot \frac{h}{\pi}\frac{\pi \sin a \pm 2 \operatorname{arc} a}{1+\sin a}.$$

Dazu kommt noch für die linke Plattenhälfte (rechts heben sich entsprechend dem glatten Abströmen die beiden imaginären Terme fort) die Saugkraft der Vorderkante im Betrage:

$$\varrho V^2 \sin\beta\cos\beta \cdot h \frac{2 \operatorname{tg}\gamma}{1+\sin a} = \varrho V^2 \sin^2\beta \cdot h \cdot \frac{2\sin a}{(1+\sin a)^2}.$$

Für die ganze Platte ist außer dieser Vordersaugkraft (die auch direkt durch die 1910 S. 25 gegebene Formel berechnet werden kann) als Druckauftrieb für die Länge 1 vorhanden:

$$\varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot h \frac{2 \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}.$$

Endlich den Wert von $\sin\alpha$ einsetzend, erhalten wir den Druckauftrieb der Platte als

$$\varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot h \left[1 - e^{-\frac{L}{h}\pi}\right],$$

die Vordersaugkraft als

$$\varrho V^2 \sin^2\beta \cdot h \frac{\left[1 - e^{-\frac{L}{h}\pi}\right]}{1 + \operatorname{tg\,hyp}\left(\frac{L}{h}\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Für $\frac{L}{h}$ beliebig klein, also die Einzelplatte, ergeben sich daraus die bekannten Formeln:

$$\pi \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot L \quad \text{und} \quad \pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cdot L.$$

Auffällig erscheint, daß die Resultierende nicht senkrecht zur Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen steht. Vielmehr bildet sie mit der y-Achse den Winkel δ, für den

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\beta \cdot \frac{1}{1 + \sin\alpha} = \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma$$

statt $\operatorname{tg}\beta$ ist.

Begreiflich aber wird das, wenn wir uns erinnern, daß ein Teil der vertikalen Geschwindigkeit im Unendlichen vom Betrage $-\frac{\pi}{h} N \sin\gamma$ von der Zirkulation selbst herrührt. Der Rest derselben, vom Betrage $\frac{\pi}{h} M$ allein, würde mit der Horizontalgeschwindigkeit $V\cos\beta$ vereinigt, in der Tat eine Strömung im Unendlichen geben, auf der die berechnete Resultierende senkrecht steht. Wir erhalten also:

Die gesamte Auftriebskraft einer Platte steht senkrecht zu derjenigen Strömungsrichtung im Unendlichen, die ohne die Zirkulationswirkung im Unendlichen vorhanden wäre.

Auffallend ist ferner, daß für nahe zusammengerückte Platten, also $\frac{L}{h}$ groß, der Auftrieb für die Einzelplatte gar nicht mehr von der Breite L der Platte abhängt. Der Druckauftrieb wird angenähert für jede Platte $\varrho V^2 \sin\beta \cos\beta\, h$; die Vordersaugkraft $\varrho V^2 \sin^2\beta \frac{h}{2}$.

Für die Tiefeneinheit der Jalousie (in y-Richtung), auf die $\frac{1}{h}$ Platten kommen, ist der Druckauftrieb konstant $\varrho V^2 \sin\beta \cos\beta$; die Saugkraft $\varrho V^2 \sin\beta \cdot \frac{1}{2}$.

Diese Ergebnisse sind aber auch vom physikalischen Gesichtspunkte aus wohl erklärlich. Bei nahe stehenden und verhältnismäßig langen parellelen Hindernissen ist der wesentliche Punkt, daß die Strömung aus ihrer schiefen Ankunftsrichtung in eine zu den Hindernissen parallele Durchgangsrichtung gezwungen wird. Wie weit dann diese Durchgangsrichtung verfolgt werden muß, d. h. wie groß L ist, sofern es nur groß gegen h ist, kommt nun gar nicht mehr in Betracht und kann den Auftrieb nicht ändern. Auch die Unabhängigkeit des Auftriebs von der Anzahl der (unendlich dünnen) Hindernisse, die auf die Einheit der Jalousietiefe treffen, ist nun begreiflich, da in die einmal erzwungene horizontale Durchgangsströmung noch weitere (unendlich dünne) Hindernisse parallel hineingesteckt werden können. Daß bei gleicher Länge L derselben die Umformung der Strömung vorn (und hinten) aus einer schiefen in eine horizontale doch noch durch Vermehrung der Hinderniszahl ein wenig beeinflußt wird, zeigt sich in der Formel dadurch, daß ja in der Tat die erhaltenen Näherungen nur für $\frac{L}{h} = \infty$ exakt werden.

Aus der letzten Überlegung folgt, daß auch Hindernisse in variablen Abständen h und mit variabler Länge L, sofern

nur L gegen h groß ist, denselben Druckauftrieb $\varrho V^2 \sin\beta \cos\beta$ für die Tiefeneinheit und Breiteneinheit zeigen. Dabei braucht nach der Formel L gar nicht soviel größer zu sein als h; L etwa 2—3 mal so groß wie h genügt. Es wäre nicht ohne Interesse, die wirbelartigen (obwohl nicht wirklich wirbelnden) Vorgänge an der Vorderkante, wo die schiefe Strömung sich in die horizontale einstellt und wo je ein Spaltungspunkt mit Geschwindigkeit Null und die Kante mit Geschwindigkeit ∞ äußerst nahe beieinander liegen, zeichnerisch genau zu verfolgen. Freilich wäre es noch besser, dabei abgerundete Vorderkanten oder überhaupt Platten von endlicher, wiewohl geringer Dicke, einzuführen, was allerdings rechnerisch Mühe machen würde. Dabei erscheint es mir nicht als ausgeschlossen, daß diese Betrachtungen eine Übertragung auf die Gebiete der Elektrizität und Optik, speziell für die Übergangsschicht zwischen zwei Medien, zulassen könnten.

Um für einige Zahlenwerte Druckauftrieb und Saugkraft mit denjenigen der Einzelplatte, für die sie $\pi \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot L$ resp. $\pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cdot L$ betragen, vergleichen zu können, schreiben wir sie in der Form:

$$\pi \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot L \cdot \frac{h}{L}\frac{1}{\pi}[1 - e^{-\frac{L}{h}\pi}]$$

resp.

$$\pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cdot L \cdot \frac{h}{L}\frac{1}{2\pi}[1 - e^{-\frac{L}{h}2\pi}].$$

Es ergeben sich die Koeffizienten für die Verhältnisse:

$\frac{h}{L}$ =	1	2	4	8	16	∞
als	0,317	0.504	0,688	0,827	0,908	1
resp.	0,159	0,317	0,504	0,688	0,827	1

Unterhalb des Wertes $\frac{h}{L} = 1$ hängen die Kräfte praktisch nicht mehr von L, sondern nur noch von h ab, wie vorher besprochen. Es wird dann $\sin\alpha$ annähernd 1, und die Richtung δ des Gesamtauftriebs ist durch $\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta$, also bei

flacher Anströmung, β klein, im wesentlichen durch $\delta = \frac{1}{2}\beta$ gegeben.

Übrigens muß noch bemerkt werden, daß der Vergleich mit der Einzelplatte oder mehreren Platten besser so zu ziehen ist, daß man für diese statt der Geschwindigkeit V im Unendlichen, die von der Zirkulationswirkung der unendlich vielen Platten absehende Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ im Unendlichen einführen. $\mathfrak{V}$ hat die Richtung δ, wie früher schon erwähnt; es ist:

$$\mathfrak{V} \cdot \cos\delta = V\cos\beta$$

$$\mathfrak{V} \cdot \sin\delta = V\left(\sin\beta - \cos\beta\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\right).$$

Es folgt:

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\beta \cdot \frac{1}{1+\sin\alpha} = \operatorname{tg}\beta\frac{(1+e^{-\frac{L}{h}\pi})}{2}$$

und

$$\mathfrak{V} = V\sqrt[2]{\cos^2\beta + \sin^2\beta\left(\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2}.$$

Da noch

$$V\cos\beta = \mathfrak{V}\cos\delta,$$

$$V\sin\beta = \mathfrak{V}\sin\delta\,(1+\sin\alpha)$$

ist, schreiben wir Druck, Auftrieb und Saugkraft bei der Jalousie lieber als

$$\pi\varrho\mathfrak{V}^2\sin\delta\cos\delta \cdot L \cdot \left(\frac{2}{\pi}\frac{h}{L}\operatorname{tg\,hyp}\left(\frac{L}{h}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

resp.

$$\pi\varrho\mathfrak{V}^2\sin^2\delta \cdot L \cdot \left(\frac{2}{\pi}\frac{h}{L}\operatorname{tg\,hyp}\left(\frac{L}{h}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Hier werden die Koeffizienten für:

$\frac{h}{L} =$	1	2	4	∞
	0,584	0,835	0,952	1

Diese Zahlen stehen denen für die einzelne Platte oder das Plattenpaar weit näher als die vorher angegebenen. Hier

gehen die für Auftrieb und Saugkraft gefundenen Beträge bei kleinem Verhältnis $\frac{h}{L}$ in die Werte

$$\varrho \mathfrak{V}^2 \sin\delta \cos\delta \cdot 2\,h$$

resp.

$$\varrho \mathfrak{V}^2 \sin^2\delta \cdot 2\,h$$

über, also der erstere Koeffizient in den doppelten Betrag des früheren bei

$$\varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot h,$$

der zweite Koeffizient in den vierfachen des früheren bei

$$\varrho V^2 \sin^2\beta \cdot \frac{h}{2}.$$

Handelt es sich um eine Jalousie von einer großen Anzahl wiewohl nicht unendlich vielen Einzelflächen, so wird die Geschwindigkeit im Unendlichen durch den Effekt des Kreisens bei einer nur endlichen Zahl von Flächen nicht geändert. Der Auftrieb, wie gerechnet, steht nun wirklich senkrecht zur Richtung der Strömung im Unendlichen, wie es ein allgemeiner Satz verlangt, und erlaubt die Gesamtzirkulation, um das nunmehr endliche System zu berechnen. Freilich wird an den obersten und untersten Flächen — insbesondere den obersten — ein korrigierter, stärkerer Auftrieb anzunehmen sein. Eine ungefähre Vorstellung von der Größe der Korrektur erhalten wir dadurch, daß bei zwei Flächen vom Abstandsverhältnisse $\frac{h}{L} = 1$ der durchschnittliche Auftrieb beider als

$$\pi \varrho \mathfrak{V}^2 \sin\delta \cos\delta \cdot L \cdot 0{,}855$$

berechnet wurde, bei unendlich vielen Flächen er durchschnittlich aber nur

$$\pi \varrho \mathfrak{V}^2 \sin\delta \cos\delta \cdot L \cdot 0{,}584$$

beträgt. Man kann schätzen, daß bei z. B. 20 Flächen von $\frac{h}{L} = 1$ die äußersten Flächen wohl noch etwa 0,7 oder 0,75 als

Koeffizienten erhalten werden, allerdings dann der Auftrieb der mehr inneren Flächen sehr rasch sich im Koeffizienten an 0,584 nähern wird. Es dürfte also für die 20 Flächen insgesamt statt des Auftriebs

$$\pi \varrho \mathfrak{V}^2 \sin \delta \cos \delta \cdot L \cdot 11{,}68$$

wohl ein solcher von etwa

$$\pi \varrho \mathfrak{V}^2 \sin \delta \cos \delta \cdot L \cdot 12{,}4 \text{ bis } 12{,}5$$

richtiger anzunehmen sein.

5. Strömung um zwei hintereinander gestellte Platten.

Als Hindernisse der Strömung nehmen wir zwei Geradenstücke an, die auf der reellen x-Achse von $-(L+E)$ bis $-E$ und von $+E$ bis $+(L+E)$ reichen.

Die Horizontalströmung ist dann durch die Strömungsfunktion $W = V \cdot \cos\beta \cdot z$ gegeben.

Für die Vertikalströmung und das Kreisen sind die Geradenstücke Stromlinien, die übrigen Teile der x-Achse Äquipotentiallinien. Für die untere Hälfte der z-Ebene ist demnach, wenn dort die Spaltungspunkte dieser Strömung die Lage z_1 und z_2 besitzen, die Strömungsfunktion:

$$W = -iV\sin\beta \int \frac{(z-z_1)(z-z_2)\,dz}{\sqrt{(z^2-E^2)(z^2-(E+L)^2)}}.$$

Durch Zusammenfügen beider Funktionen erhalten wir die allgemeinste Zirkulationsströmung mit den willkürlichen Konstanten z_1 und z_2.

Wir machen wieder die Annahme, daß zwei Spaltungspunkte der Gesamtströmung in den Hinterkanten $-E$ und $+(L+E)$ liegen sollen, fordern also, daß für diese Punkte

$$\frac{dW}{dz} = V\cos\beta - iV\sin\beta \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{\sqrt{(z^2-E^2)(z^2-(L+E)^2)}}$$

endlich bleiben soll. Dazu ist $z_1 = -E$; $z_2 = -(L+E)$ nötig. Die Vorderkanten $-(L+E)$ und $+L$ erhalten dabei

unendlich große Geschwindigkeiten (müssen also abgerundet werden), und zwar ist für $z = -(L + E) + \delta$:

$$\frac{dW}{dz} = V \sin\beta \cdot \sqrt{\frac{2L(L+E)}{L+2E}} \frac{1}{\sqrt{\delta}} + \cdots$$

und für $z = E + \delta$:

$$\frac{dW}{dz} = V \sin\beta \sqrt{\frac{2LE}{L+2E}} \frac{1}{\sqrt{\delta}} + \cdots$$

Daraus folgen die Saugkräfte der Vorderkanten in Richtung der negativen x-Achse gleich

$$\pi \varrho V^2 \sin^2\beta \frac{2L(L+E)}{L+2E}$$

resp.

$$\pi \varrho V^2 \sin^2\beta \frac{2LE}{L+2E}.$$

Die gesamte Komponente des Auftriebs in der x-Achse für das System ist gleich der Summe dieser Saugkräfte, also gleich

$$\pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cdot 2L.$$

Wir erkennen, daß die hintere (rechte) Fläche verringerte Saugwirkung aufweist, die vordere (linke) vergrößerte, und zwar im Verhältnis $E : L + E$. Gegenüber einer Einzelfläche besitzt die Vordersaugkraft der vorderen Platte das Verhältnis

$$\frac{2(L+E)}{L+2E} = 1 + \frac{L}{L+2E},$$

die der hinteren Platte das Verhältnis

$$1 - \frac{L}{L+2E}.$$

Die gesamte Saugkraft beider Vorderkanten ist gleich derjenigen der beiden Platten, wenn einzeln vorhanden, oder es ändert sich die Summe der Vordersaugkräfte nicht, wenn wir die Platten in ihrer eigenen Richtung (der x-Achse) auseinanderziehen, also E ändern. Wohl aber ändert sich die Verteilung

der Saugkräfte auf beide Platten und zwar vom Koeffizienten 2 resp. 0 für $E = 0$ bis zu den Koeffizienten 1 für $E = \infty$. Diese beiden Grenzangaben sind natürlich von vornherein selbstverständlich.

Die Gesamtzirkulation finden wir, indem wir

$$\frac{dW}{dz} = V\cos\beta - iV\sin\beta\sqrt{\frac{(z+E)(z-E-L)}{(z-E)(z+E+L)}}$$

für z gleich ∞ entwickeln. Es kommt:

$$\frac{dW}{dz} = V\cos\beta - iV\sin\beta\left[1 - \frac{L}{z}\cdots\right].$$

Die Zirkulationskonstante C ist also $L \cdot V\sin\beta$ und somit der Gesamtauftrieb des ganzen Systems senkrecht zur Strömungsrichtung

$$\pi\varrho V^2 \sin\beta \cdot 2L$$

mit den Komponenten des Druckauftriebs

$$\pi\varrho V^2 \sin\beta\cos\beta \cdot 2L$$

in Richtung y, und des schon vorher bestimmten Saugauftriebs

$$\pi\varrho V^2 \sin^2\beta \cdot 2L$$

in der negativen x-Richtung.

Es ergibt sich, daß auch für den Gesamtauftrieb und für den gesamten Druckauftrieb des ganzen Systems Unabhängigkeit von der Entfernung $2E$ beider Platten theoretisch vorhanden ist. Daß für $E = 0$ und $E = \infty$ der doppelte Auftrieb der Einzelplatte erreicht wird, ist ja selbstverständlich, aber auch für die Zwischenlagen gilt dasselbe.

Dagegen ist Gesamtauftrieb und Druckauftrieb in verschiedenem Maße über die beiden Platten verteilt. Nach dem Früheren wissen wir, daß für $E = \infty$ natürlich jede Platte die Hälfte davon beiträgt, daß aber für $E = 0$ die vordere Platte (als vordere Hälfte einer Platte von der Breite $2L$) als Beitrag zum Druckauftrieb

$$\pi\varrho V^2 \sin\beta\cos\beta \cdot L\left(1 + \frac{2}{\pi}\right),$$

die hintere Platte

$$\pi \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot L\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

liefert, also diese Beiträge im Verhältnis $\frac{\pi + 2}{\pi - 2}$ oder angenähert $\frac{9}{2}$ stehen. Unmittelbar erkennt man nun auch, da die Vordersaugkräfte für $\lim E = 0$ in anderer Weise sich verhalten, nämlich gegen $\pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cdot 2L$ und $\pi \varrho V^2 \sin^2 \cdot 2L \cdot 0$ gehen, daß der aus Saugwirkung und Druckauftrieb zusammengesetzte Gesamtauftrieb jeder einzelnen Platte nicht senkrecht zur Strömungsrichtung sein wird, daß er vielmehr bei der ersten Platte gegen die Strömungsnormale etwas vorwärts geneigt, bei der zweiten, hinteren Platte stärker rückwärts geneigt sein wird. Erst aus der Zusammensetzung dieser beiden Gesamtauftriebe der Einzelplatten zum Gesamtauftrieb des Systems ergibt sich dieser letztere als senkrecht zur Strömung gerichtet.

Es sollen nun die Druckauftriebe der beiden einzelnen Platten durch Integration wirklich gefunden werden. Die beiden in $\left(\frac{dW}{dz}\right)^2$ auftretenden quadratischen Terme geben bei der Integration über jede Platte Null, der Term der doppelten Produkte gibt das elliptische Integral zweiter Art

$$2 \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \int\limits_E^{E+L} \sqrt{\frac{(z + E)(E + L - z)}{(z - E)(E + L + z)}}\, dz$$

als Auftrieb für die rechte (hintere) Platte. Wir setzen

$$z^2 = (L+E)^2\left[1 - \frac{L(L+2E)}{(L+E)^2} u^2\right]; \quad \frac{L(L+2E)}{(L+E)^2} = k^2; \quad u = \sin\varphi$$

und erhalten für das Integral

$$L\int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - L\int\limits_0^1 \frac{\left(1 - \frac{L+2E}{L+E} u^2\right) du}{\sqrt{1-u^2}\;\sqrt{1-k^2u^2}}$$

oder

$$L\frac{\pi}{2} + E \cdot F_1 - (L + E)\, E_1,$$

F_1 und E_1 sind dabei die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für den Modul:

$$k = \sqrt{\frac{L\,(L + 2\,E)}{(L + E)^2}}.$$

Der Druckauftrieb der hinteren (rechten) Platte ist also:

$$\pi\,\varrho\, V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot L \left[1 - \frac{2}{\pi}\left(E_1 - \frac{E}{L}(F_1 - E_1)\right)\right].$$

Für die vordere (linke) Platte ist der Druckauftrieb durch denselben Ausdruck mit positivem Zeichen in der Klammer vor $\frac{2}{\pi}$ gegeben.

Für $E = \infty$ wird:

$$E_1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{k^2}{4}\cdots\right)$$

$$k^2 = \frac{2\,L}{E} \qquad F_1 = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4}\cdots\right).$$

Somit:

$$E_1 - \frac{E}{L}(F_1 - E_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{k^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k^2}{2} = \text{Null},$$

wie vorausgesehen.

Für $E = 0$ wird:

$$k^2 = 1 - \frac{E^2}{L^2}; \qquad E_1 = 1; \qquad F_1 = ln\,\frac{4}{E/L},$$

also $\frac{E}{L} \cdot F_1 = 0$. Somit, wie vorausgesehen, die Klammer bei $\frac{2}{\pi}$ gleich 1.

Endlich bestimmen wir noch die Lage des resultierenden Druckauftriebs für die einzelnen Platten und für das System.

Das Drehmoment der Auftriebskräfte der rechten Platte in Bezug auf den Nullpunkt ist:

$$D = 2\varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \int_E^{E+L} \sqrt{\frac{(z+E)(E+L-z)}{(z-E)(E+L+z)}}\, z\, dz.$$

Und es findet sich:

$$D = L\left[(L+E)E_1 - L\cdot\frac{\pi}{4}\right] 2\varrho V^2 \sin\beta \cos\beta.$$

Ebenso für das Drehmoment an der linken Platte:

$$D = -L\left[(L+E)E_1 + L\frac{\pi}{4}\right] 2\varrho V^2 \sin\beta \cos\beta.$$

Es muß also die Resultierende des Druckauftriebs für die hintere Platte in der Entfernung von deren Vorderkante gleich

$$\frac{E_1(L+E)^2 - \frac{\pi}{4}L(L+2E) - E^2 F_1}{\frac{\pi}{2}L + E\cdot F_1 - (L+E)E_1}$$

liegen.

Ebenso liegt die Resultierende für die vordere Platte in einer Entfernung von deren Vorderkante gleich

$$\frac{E_1\cdot E(L+E) + \frac{\pi}{4}L(L+2E) - F_1 E(L+E)}{\frac{\pi}{2}L - EF_1 + (L+E)E_1}.$$

Ungemein einfach ergibt sich aus dem gesamten Drehmoment beider Druckauftriebe $(-\pi\varrho V^2 \sin\beta \cos\beta\, L^2)$ und dem gesamten Druckauftrieb $\pi\varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot 2L$ die Lage der Resultierenden dieses gesamten Druckauftriebs für beide Platten, nämlich unabhängig von E um die Strecke $\frac{L}{2}$ nach links von der Mitte des Systems (der y-Achse) geschoben. Die Angriffslinie des Druckauftriebs teilt also die Strecke von der

vorderen Vorderkante bis zur hinteren Hinterkante im Verhältnis $\frac{L + 2E}{3L + 2E}$.

Vereinigen wir den Druckauftrieb

$$\pi \varrho V^2 \sin\beta \cos\beta \cdot L \left[1 - \frac{2}{\pi}\left(E_1 - \frac{E}{L}(F_1 - E_1)\right)\right]$$

und die Vordersaugkraft

$$\pi \varrho V^2 \sin^2\beta \cdot L \frac{2E}{L + 2E},$$

so erhalten wir den Gesamtauftrieb der hinteren Fläche. Der Winkel derselben gegen die y-Achse ist durch

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \operatorname{tg}\beta \cdot \frac{2E}{(L + 2E)\left[1 + \frac{2}{\pi}\left(E_1 - \frac{E}{L}(F_1 - E_1)\right)\right]}$$

gegeben; der Faktor von $\operatorname{tg}\beta$ ist kleiner als 1, somit $\delta_1 < \beta$ und der Gesamtauftrieb der hinteren Fläche gegen die Strömungsnormale rückwärts geneigt. Da analog für die vordere Fläche

$$\operatorname{tg}\delta_2 = \operatorname{tg}\beta \cdot \frac{2(L + E)}{(L + 2E)\left[1 + \frac{2}{\pi}\left(E_1 - \frac{E}{L}(F_1 - E_1)\right)\right]}$$

ist, und der Faktor von $\operatorname{tg}\beta > 1$ ist, ist $\delta_2 > \beta$ und der Gesamtauftrieb der vorderen Fläche gegen die Strömungsnormale nach vorn geneigt. Die beiden Gesamtauftriebe gehen durch die vorher berechneten Schnittpunkte der Angriffslinien der Druckauftriebe mit der x-Achse.

Die Zusammensetzung beider Gesamtauftriebe der Einzelplatten liefert den Gesamtauftrieb des Systems, der vom Betrage

$$\pi \varrho V^2 \sin\beta \cdot 2L$$

senkrecht zur Strömungsrichtung durch den Punkt

$$x = -\frac{L}{2}, \quad y = 0$$

geht.

Es mögen endlich einige Zahlen folgen. Die Rechnung gibt für

$\frac{E}{L}$	als Druckauftrieb der vorderen und hinteren Platte $\pi\varrho V^2 \sin\beta\cos\beta \cdot L$ mal	als Saugkraft an den Vorderkanten $\pi\varrho V^2 \sin^2\beta \cdot L$ mal	als Entfernung des Druckmittelpunktes von der Vorderkante in Teilen von L für die vordere	hintere Fläche
$= 0$	$1 \pm 0{,}6366$	1 ± 1	0,3055	0,3729
$= \frac{1}{8}$	$1 \pm 0{,}4441$	$1 \pm 0{,}800$	0,2733	0,2884
$\frac{1}{4}$	$1 \pm 0{,}3559$	$1 \pm 0{,}667$	0,2647	0.2716
$\frac{1}{2}$	$1 \pm 0{,}2588$	$1 \pm 0{,}500$	0,2577	0,2602
1	$1 \pm 0{,}1691$	$1 \pm 0{,}333$	0,2534	0,2540
2	$1 \pm 0{,}1005$	$1 \pm 0{,}200$	0,2512	0,2513
∞	$1 \pm 0{,}000$	$1 \pm 0{,}000$	0,2500	0,2500

Diese Zahlen bestätigen die auf S. 120 aus den Formeln gezogenen Schlüsse. Insbesondere zeigen sie, daß auch in einer Entfernung gleich der doppelten Plattentiefe der Auftrieb der zuerst angeblasenen Platte jenen der folgenden Platte um 20% übertrifft, ja die entsprechenden Saugkräfte an den Vorderkanten sich gar um 40% unterscheiden, während der Angriffspunkt der Resultierenden des Luftwiderstandes auf beiden Platten nahezu wie im ungestörten Falle *einer* Platte in $\frac{1}{4}$ der Plattentiefe hinter der jeweiligen Vorderkante gelegen ist.



Versuche über die Periodizität einiger Holzgewächse in den Tropen.

Von **Hermann Dingler.**

Vorgelegt von K. v. Goebel in der Sitzung am 4. Februar 1911.

Es ist heute wohl ziemlich allgemein angenommene Ansicht der Physiologen, daß bei den periodischen Erscheinungen des Pflanzenlebens neben äußeren Einflüssen sogenannte innere Gründe mitspielen, mit anderen Worten, daß bei dem pflanzlichen Organismus die in regelmäßigem Wechsel auftretenden Lebensäußerungen nicht einfach direkt durch äußere Beeinflussungen, wie Temperatur, Feuchtigkeit etc. ausgelöst werden, sondern daß ein kompliziertes „Gewebe" von äußeren und inneren Kräften vorliegt.

So fallen auch die Blätter vieler unserer einheimischen Holzgewächse im Herbst nicht deswegen ab, weil sie unseren klimatischen Winterverhältnissen nicht angepaßt sind, wie neuerdings vertreten wurde, sondern weil ihre Lebensfähigkeit mit dem Sommer zu Ende geht und weil außerdem die ganze Pflanze ihre Wasser- und sonstige Ökonomie auf den Winter einrichtet. Sie hat kein „Bedürfnis" mehr nach Blättern. Diese Blätter haben übrigens auch selbst ein gewisses Maß selbständigen Lebens, aber sie sind im Herbst gealtert, ihre Gewebe sind abgebraucht und mangelhaft geworden. Meist ist ihr Abfall schon von langer Hand vorbereitet.

Außer der Abnahme des Wassergehaltes im Stamme unserer Hölzer in den Hochsommermonaten, welche R. Hartig entdeckt hat, und wichtigen chemischen Vorgängen, deren Nachweis

das Verdienst von A. Fischer ist, wissen wir einstweilen noch nicht allzuviel darüber, wie weit sich der innere Zustand des Protoplasmas im Herbst geändert hat und wann die Vorbereitung beginnt. Jedenfalls müssen wir mit „inneren Gründen" rechnen und wenn sie nichts anderes sein sollten als „aufgespeicherte" äußere Gründe bzw. Nachwirkungen. Die Vorgänge sind zum Teil mehr oder weniger fixiert oder sogar vererblich, und doch andrerseits häufig veränderbar. Alle bis jetzt gemachten Versuche, die natürliche Ablösung der Blätter der abfälligen Laubhölzer auf irgend eine einzelne bestimmte Ursache, wie z. B. auf die Entstehung gewisser chemischer Substanzen,[1]) auf verminderte Wurzeltätigkeit oder wie immer der angebliche Grund genannt wurde, zurückzuführen, sind mißglückt.

Was den Laubfall zahlreicher mitteleuropäischer Hölzer mit sommergrünen Blättern betrifft, so geht gegenüber manchen anderen Anschauungen schon aus dem Verhalten der Blätter spät entstandener Johannistriebe oder nach Verstümmelungen entstandener später Ausschläge sowie besonders beweiskräftig aus dem Resultat meiner Schneidelungsversuche[2]) hervor, daß das Altern dabei eine überaus wichtige Rolle spielt, denn die später entstandenen Blätter fallen nicht gleichzeitig mit den übrigen, sondern trotz der Ungunst der Witterung viel später

---

[1]) Vgl. Pfeffer, „Pflanzenphysiologie", 2. Aufl., 2. Bd., p. 278.

[2]) „Zum herbstlichen Laubfall", Forstwissensch. Zentralbl. 1902, p. 195; „Versuche und Gedanken zum herbstlichen Laubfall", Ber. der D. B. G. 1905, p. 463; „Über das herbstliche Absterben des Laubes von Carpinus Betulus", ibid. 1906, p. 17. — H. Hofmann („Über Blattdauer", Bot. Zeit. 1878) und G. Kraus („Die Lebensdauer der immergrünen Blätter", 1880. Ref. Bot. Zentr.-Bl. 1882, Bd. 9, p. 75) haben zuerst für immergrüne Blätter eine schwankende, aber immerhin zwischen gewissen Grenzen bestimmte Lebensdauer nachgewiesen. Die beobachteten Unregelmäßigkeiten solcher langlebiger Blätter entsprechen durchaus der Kompliziertheit der Verhältnisse. Die Langlebigkeit der Blätter von kultivierten Kalthausexemplaren Hofmanns, welche den größten beobachteten Werten im Heimatklima nahekommt, beweist die bestehende, auch unter etwas veränderten Verhältnissen bewahrte Gesetzmäßigkeit im Alterungsprozeß.

ab und vermögen sogar bei manchen Arten tief in den Winter hinein dessen Unbilden zu trotzen.

Aus solchem Verhalten unserer meisten sommergrünen Bäume sowie aus allgemeinen Erwägungen schloß ich, daß die laubabwerfenden Bäume heißer Länder wenigstens zum Teil sich ähnlich verhalten dürften. Ich nahm an, daß gerade in den Tropen, wo Wärmemangel kein Hindernis für pflanzliches Leben bildet, noch schlagendere Beweise für die oben vorgetragene Anschauung müßten beigebracht werden können. Um so überraschender war mir Holtermanns Meinung, welche dieser Forscher sich auf Grund eingehender Studien in den Tropen gebildet hat und die sich u. a. in den Worten ausspricht: „Die Blätter, die bei Beginn der Trockenperiode abfallen, sind anatomisch nicht so gebaut, daß sie eine solche Periode zu überdauern imstande wären.“[1]) Ich will dabei übrigens gar nicht leugnen, daß für manche Holzgewächse Holtermanns Anschauungen bis zu einem gewissen Grade zutreffen und nenne dazu beispielsweise aus unserem Klima Ligustrum vulgare, welche nach dem Standort und nach den jeweiligen klimatischen Verhältnissen sich tatsächlich verschieden verhält, indem seine Blätter zwischen rein sommergrünem und nahezu oder wirklich immergrünem Verhalten schwanken. Dieser und ähnliche Fälle sind freilich unter besonderen Gesichtspunkten zu behandeln.

Herbert Wright[2]) hat eine ganze Reihe von Tatsachen erwähnt, welche dafür sprechen, daß bei den Erscheinungen des Blattwechsels innere Gründe mitspielen. Einen Hauptbeweis, welchen er selbst aber nicht in dem Maße bewertet, wie er es tun könnte, bringt er in dem Bericht über das Verhalten von Bäumen von Mangifera indica und Terminalia Catappa, deren oberer Kronenteil weggenommen worden

---

[1]) Holtermann, „Der Einfluß des Klimas auf den Bau der Pflanzengewebe“. Anatomisch-physiologische Untersuchungen in den Tropen. Leipzig 1907, p. 182.

[2]) „Foliar Periodicity of Endemic and Indigenous Trees in Ceylon“ in Ann. R. Bot. Gard. Peradeniya II, 3, p. 415—516. Okt. 1905.

war.[1]) Ein Exemplar der erstgenannten Art, welche normal im Februar und März Blätter entwickelt, wurde im Mai gekappt. Der Baum trieb im Juli bis September reichlich neue Blätter, dafür aber infolge der Verspätung im nächsten Frühjahr keine. Ganz ähnlich lag es mit Terminalia Catappa. Ein Teil der Krone wurde im Mai gekappt und entwickelte nun neue Blätter im Juli und August und die Periodizität wurde damit für einige Jahre verschoben. Es kann kaum ein Zweifel obwalten, daß hier doch nur eine Erklärung möglich ist, welche der Autor selbst zu geben auffallenderweise unterläßt: die später als gewöhnlich entstandenen Blätter funktionierten im nächsten Frühling, wo sonst Neubildung nötig gewesen war, noch so gut, daß die Neubildung unterblieb bzw. verschoben wurde.

Sehr interessant ist ferner das von H. Wright angeführte verschiedene Verhalten von Schizolobium excelsum in Peradeniya und in Buitenzorg. Die Erklärung Treubs, welche dahin geht, daß die Gleichmäßigkeit des Klimas an letzterem Ort jedem Ast gewissermaßen seiner eigenen Inspiration zu folgen gestatte, ist mir viel zusagender als eine bei ähnlichen Erscheinungen von partieller Entblätterung gelegentlich von Holtermann gebrachte Vorstellung, daß ungenügender Wasserzufluß nur für einen Teil der Blätter genüge. Auch andere Arten zeigen an beiden Orten verschiedenes Verhalten, welches zum Teil wenigstens an das Verhalten von Schizolobium sich anschließt.

Daß nicht unbedeutende Schwankungen im Verhalten der verschiedenen Individuen einer Art im gleichen Klima bei gleichen äußeren Verhältnissen vorkommen, ist bezeichnend und deutet, wenn auch kein wirklich zwingender Beweis damit geliefert werden kann. in manchen Fällen auf innere Gründe ihrer verchiedenen Periodizität. Der Unterschied im Verhalten kann, wie Wright[2]) anführt, bei Bombax malabaricum bis zu zwei Monaten betragen. Übrigens scheint Wright nach seiner Bemerkung, daß der Unterschied die relative Unwichtigkeit

---

[1]) l. c., p. 429. [2]) l. c., p. 444.

der äußeren oder der klimatischen Faktoren in Bezug auf die Periodizität beweise, gerade in diesem Fall die Bedeutung der äußeren Faktoren vielleicht etwas zu unterschätzen, wenigstens die Schwierigkeit außer acht zu lassen, ein sicheres Urteil über die absolute Gleichheit aller äußeren Umstände (besonders der Bodenverhältnisse und des Wasserzuflusses) zu gewinnen.

Mit Recht dagegen führt Wright[1]) meines Erachtens zu Gunsten innerer Beeinflussung an, daß verschiedene Arten wenige Tage nach dem Laubfall noch während der heißen, trockenen Zeit neue Blätter treiben, womit sie also trotz Wassermangels in ungünstiger Zeit ihre Transpiration steigern müssen. Die klimatischen Verhältnisse können bei ihnen also nicht ausschlaggebend für den Blattfall etc. sein. — Ich verzichte übrigens darauf, noch weitere Literaturnachweise für die hier vertretene Ansicht beizubringen.

Als ich Anfang August 1909 meine Tropenreise antrat, hatte ich u. a. die Absicht, die gleichen Schneidelungsversuche, wie ich sie mit einheimischen Waldbäumen gemacht hatte, mit abfälligen Arten der Tropen vor der Trockenzeit zu wiederholen. Ich wollte prüfen, ob nicht kürzere Zeit vor Beginn der trockenheißen Zeit entwickelte Blätter, welche in jugendlicher Frische und Lebenskraft in diese Jahresperiode eintreten, sie ohne Schaden überstehen könnten. Ich beabsichtigte, die Versuche in Peradeniya zu machen und fand auch bei dem zurzeit amtierenden stellvertretenden Direktor, Herrn Dr. Lock, sehr freundliches Entgegenkommen. Gleichwohl nahte der Oktober heran, bevor zur Ausführung der Versuche geschritten werden konnte. In diesem Monat mußten die Schneidelungen vorgenommen werden, wenn einige Sicherheit des Erfolges erwartet werden sollte. Die betreffenden Bäume pflegen zumeist im Januar oder Februar, manchmal schon im Dezember ihr Laub abzuwerfen und im April wieder auszuschlagen. Wenn die zu operierenden Bäume Anfang Oktober geschneidelt, d. h. aller Blätter und aller jüngeren, mit einigermaßen vorgerückten

[1]) l. c., p. 452.

Knospen versehenen Zweige beraubt wurden, so konnten sie ihr Laub bis zum Januar soweit ausgereift haben, daß es zwar noch sehr jung, aber möglichst widerstandsfähig in die eigentlich trockenheiße Zeit eintreten konnte. Diese umfaßt die beiden Monate Februar und März. Im April beginnt wieder feuchtwarme Zeit.

Besonders in den Kulturen der Experimentstation des Botanischen Gartens fand sich geeignetes Versuchsmaterial. In dem ausgezeichneten Leiter dieser Station, Herrn J. Kelway Bamber, welcher mich in der liberalsten Weise unterstützte und allen meinen Wünschen mit der größten Liebenswürdigkeit entgegenkam, fand ich den richtigen Helfer, der auch, in Gemeinschaft mit seinem jungen Mitarbeiter, Herrn Wilson-Smith, die Güte hatte, mir für die Zeit nach meiner Abreise dauernde Beobachtung der geschneidelten Bäume zuzusagen. Ohne diese wären natürlich meine Versuche wertlos gewesen, da ich meinen Aufenthalt nicht über die Trockenzeit ausdehnen konnte.

Einige geeignete Exemplare von Arten, welche in der Experimentstation fehlten, wurden im eigentlichen Botanischen Garten selbst aufgefunden mit Hilfe des auch gärtnerisch unterrichteten Unterbeamten Plantcollector Miguel de Silva, welcher mir auch ein in seinem eigenen Gärtchen stehendes Bombaxexemplar zu den Versuchen überließ und die Beobachtung dieses und noch einiger anderer Bäume, welche ich im Governor Park in Kandy zu schneideln Gelegenheit hatte, übernahm. Für die Erlaubnis, in diesem Park Versuche, besonders auch mit Pisonia alba, zu machen, bin ich Herrn Hugh F. Macmillan, Kurator des Botanischen Gartens, zu besonderem Dank verpflichtet.

Nach Herbert Wright sind unter den 280 ausschließlich Ceylon bewohnenden („endemischen") Baumarten 17 laubabwerfend. Außerdem besitzt die Insel noch weitere 78 Arten laubabwerfender Bäume, welche sie mit dem kontinentalen Indien oder dem malaiischen Archipel etc. gemeinsam hat; und im übrigen werden im Botanischen Garten von Peradeniya eine

Menge weiterer laubabwerfender Bäume kultiviert, welche aus den Tropen der übrigen Kontinente stammen. Ich war besonders darauf aus, in Ceylon einheimische Arten zu meinen Versuchen zu benützen, da sonst vielleicht gegen meine im erwarteten Sinne ausfallenden Resultate Einwände geltend gemacht werden könnten, die ich selbst freilich als kaum begründet erachten müßte.

Holtermann erklärt ausdrücklich Beobachtungen über Periodizität in botanischen Gärten für wertlos, da hier die Bäume unter ganz anderen Bedingungen wie im Urwald leben. Nun — es existieren kleine Partien im Peradeniyagarten, die annähernd urwaldartige Bedingungen bieten würden. Der feuchtheiße Urwald selbst ist mit wenigen Ausnahmen auf Ceylon verschwunden und genau seine Bedingungen künstlich herzustellen ist einfach nicht möglich. Dafür bieten aber einen Ersatz Kulturen in verschieden gearteten Klimaten resp. Bedingungen und das Experiment. Richtig ausgeführte Kulturen sind an sich schon ein Experiment und gerade der Periodizität wird man überhaupt nur auf experimentellem Wege beikommen, wenn ich auch die Wichtigkeit von Beobachtungen unter natürlichen Lebensbedingungen nicht unterschätzen möchte — aber mehr für die biologische Deutung als für das physiologische Wesen eines Vorganges.

Am liebsten hätte ich natürlich die Versuche mit Arten aus der Gruppe der 17 endemischen angestellt, indessen ergab sich dazu keine Gelegenheit. Dagegen konnte ich einige einheimische Arten der zweiten Gruppe (der 78) benützen und endlich standen zwei in Ceylon seit lange eingeführte Arten des übrigen indomalaiischen Gebietes und einige zu Kulturzwecken angepflanzte Exoten zur Verfügung, deren seit Jahren beobachtetes Verhalten genau dem Verhalten der einheimischn Arten entsprach.

Die Arten der zwei einheimischen Gruppen waren: Ficus hispida L. f. (Urtic.), Trema orientalis Blume (Ulmac.), Bombax malabaricum DC. und Eriodendron anfractuosum DC. (Malvac.), Peltophorum ferrugineum Benth. (Caesalpin.), Gmelina arborea L.

(Verbenac.). Von indisch-malaiischen Ceylon fehlenden Arten: Erythrina lithosperma Miq. (Papil.) und Tectona grandis L. f. (Verbenac.). Von tropischen Kulturexoten: Castilloa elastica Cerv. (Urticac.), Hevea brasiliensis Müll. Arg. und Manihot Glaziovii Müll. Arg. (Euphorbiac.), alle drei tropisch-amerikanische Kautschukbäume, und Theobroma Cacao L. (Sterculiac.), der tropisch-amerikanische Kakaobaum. Außerdem wurden zur Beantwortung einiger Fragen, welche zum Teil mit dem hier behandelten Problem zusammenhängen, eine Anzahl weiterer Hölzer geschneidelt, von denen ich die afrikanische Bignoniacee Spathodea campanulata P. Beauv. hier erwähnen will. Es war mir dabei namentlich um den Einfluß des Schneidelns auf die Verschiebung der Vegetationsperioden zu tun. Ich gehe übrigens auf diese Versuche, welche erst viel später Resultate ergeben können, nicht weiter ein und bemerke nur noch, daß die in Ceylon einheimischen geschneidelten Bäume sich in intaktem Zustande im Garten wie im wilden Zustande verhalten.

Alle geschneidelten Bäume mit abfälligem Laub, welche kontrolliert wurden, außer einem der geschneidelten Eriodendronbäume ergaben nach den Nachrichten, welche ich erhielt, die erwartete Reaktion. Warum es bei diesem Eriodendronexemplar nicht geschah, darüber wird später zu sprechen sein. In zwei Tabellen gebe ich die Einzelheiten der Versuche. In der I. Tabelle die Versuche, welche in der Experimentstation gemacht wurden. Die Beobachtungen sind mit Ausnahme der vom 7. Dezember 1909, welche von mir selbst herrühren, von den Herren Bamber und Wilson-Smith gemacht und mir brieflich mitgeteilt worden. Bombax und Eriodendron hat Herr Bamber auf meine Bitte schneideln lassen. Die übrigen Schneidelungen geschahen in meiner Gegenwart.

In der II. Tabelle sind die im Botanischen Garten, im Governor Pavilion Park in Kandy und beim Hause Miguels geschneidelten Bäume mit abfälligem Laub verzeichnet. Am 6. und 11. Dezember 1909 nach meiner Rückkehr nach längerer Abwesenheit kontrollierte ich selbst, soweit möglich, die Versuchsbäume. Einzelne Lücken konnten leider nicht in wün-

schenswerter Weise ausgefüllt werden infolge von Umständen, welche nicht in meiner Macht lagen, aber die Resultate der Versuche werden glücklicherweise dadurch nicht beeinträchtigt.

Zu der Angabe der Stammdurchmesser (Dm) in den Tabellen bemerke ich, daß sie 1,3 m über dem Boden gemessen wurden. Die Höhenangaben gelten, wo nicht ausdrücklich anders bemerkt, für die intakten Bäume.

Die Resultate der beiden Tabellen scheinen mir überzeugend. Mit einer einzigen Ausnahme zeigten alle Bäume das erwartete Verhalten. Während alle ihre Artgenossen unter den gleichen Verhältnissen sich für einige Monate entblätterten, behielten die geschneidelten Bäume ihre neugebildeten Blätter und standen noch im Mai in vollem Laub. Die nicht geschneidelten Manihot- und Castilloabäume standen sogar am 4. Mai noch kahl. Was die einzige Ausnahme, das auf der Experimentstation geschneidelte Eriodendronexemplar betrifft, welches nach der Schneidelung zwar neue Blätter gebildet hatte, dieselben aber nach kurzer Zeit wieder abwarf, so ist zunächst zu beachten, daß die Schneidelung sehr spät, Anfang Januar, vorgenommen wurde, so daß das neugebildete Laub in sehr jugendlichem Zustande vielleicht nicht genügend widerstandsfähig in die Trockenzeit eintrat. Andrerseits blühte der Baum zu normaler Zeit, wie die nicht operierten, also zu einer Zeit, wo er sonst, regelmäßig entblättert, seine Blüten entwickelt. Es könnte hier wohl eine Art Konkurrenz zwischen den reproduktiven Tendenzen, d. h. dem Antrieb zum Blühen, und den vegetativen Tendenzen, dem Antrieb zur Blattentwicklung und Blatterhaltung, im Spiel gewesen sein, wobei die ersteren obsiegten. Der Baum ließ die kaum gebildeten Blätter wieder fallen.

Das andere Eriodendronexemplar verhielt sich wie die übrigen geschneidelten Bäume und blühte, wie es nach der etwas kurzen Mitteilung Miguels scheint, nicht.

Zu Spathodea campanulata in der II. Tabelle, welche in Ceylon schon lange und häufig als Allee- und Zierbaum kultiviert wird, ist zu bemerken, daß der Baum nur in der Jugend

Tabelle I.

Namen, Alter und Größe der Bäume. Art der Schneidelung	Tag der Schneidelung	Beginn der Blattentwicklung (oder Knospenöffnung	Entwicklungszustand am 6. XII. 1909 (u. 7. XII. eigene Beobachtung)	Entwicklungszustand am 22. III. 1910	Bemerkungen
Bombax malabaricum	15. XI. 1909	5. XII. 1909 nur an den Gipfelästen	Triebe ca. $2^1/_2''$ lang, eben ausgetrieben	Beginn der Blattentwicklung an den unteren Ästen	Blattfall fand nicht statt. Der Baum blühte nicht. Die anderen Bäume blühten um den 10. II. — Noch am 4. V. in vollem Laub. Auch die nicht operierten Bäume hatten sich jetzt wieder belaubt.
Eriodendron anfractuosum	7. I. 1910	30. I. 1910 nur an den Gipfelästen		fast blattlos	Der Baum hatte sich am Gipfel beblättert, warf aber alle neu gebildeten Blätter im Febr. und März wieder ab. Am 22. III. erschienen die Baumwollkapseln (also hatte er geblüht). Am 4. V. befand er sich in neuer Blattentwicklung.
Erythrina lithosperma Nr. 1 8,5 m h., 22 cm Dm.; entasteter Strunk	8. X. 1909	30. XI. 1909 am Gipfel und nahe den Astwunden. Später abwärts steigend. Auch einzelne Triebe nahe der Gabelung des Strunks		ganz beblättert	Am 4. V. noch in vollem Laub. Die neu gebildeten Blätter waren nicht gefallen wie an den nicht operierten Bäumen.

Nr. 2 8 m h., 24 cm Dm.; nur die einjährigen Zweige weggenommen	8. X. 1909	20. X. 1909	Triebe bis 2 1/2′ lang	ganz beblättert	Wie das Exemplar Nr. 1. Am 4. V. hatten sich auch alle anderen Exemplare wieder belaubt.
Hevea brasiliensis					
Nr. 1 8,5 m h., 10 cm Dm.; Stamm gegabelt. Entastet zum zweigabeligen Strunk	8. X. 1909	28. XI. 1909	7. XII.: am obersten Ende der Stümpfe 15 bis 20 cm lange Triebe mit vollständig entwickelten Blättern (eigene Beobachtung)	ganz beblättert	An dem entasteten Baum geht die Blattentwicklung vom Gipfel aus den Stämmen entlang nach abwärts vor sich. 4. V. noch in vollem Laub. Die neu gebildeten Blätter waren nicht gefallen wie an den nicht operierten Bäumen.
Nr. 2 8 m h., 10 cm Dm.; 3 gabel. Stamm; nur die einjähr. Zweige weggenommen	8. X. 1909	29. X. 1909	Triebe bis 1 1/2′ lang. 7. XII.: mit zahlreichen Trieben bis zu 40 cm Länge und zahlreichen entwickelten Blättern, von denen einzelne (unterste) gelb werden und abfallen. Warum? (eigene Beobachtung)	ganz beblättert	4. V.: Beblätterung wie bei Exemplar Nr. 1. Auch die nicht operierten hatten sich bereits wieder belaubt.
Castilloa elastica					
gepflanzt 1903; c. 7 jähr. Nr. 1 8 m h., 14 cm Dm.; entastet zu einem dreigabeligen Strunk	8. X. 1909	13. XII. 1909		ganz beblättert	Die entblätterten und entasteten Bäume ließen ihr Laub nicht fallen wie die übrigen Exemplare. Am 4. V. stehen die operierten Bäume noch in vollem Laub. Die übrigen sind noch kahl.

Namen, Alter und Größe der Bäume Art der Schneidelung	Tag der Schneidelung	Beginn der Blattentwicklung (oder Knospenöffnung)	Entwicklungszustand am 6. XII. 1909 (u. 7. XII. eigene Beobachtung)	Entwicklungszustand am 22. III. 1910	Bemerkungen
Castilloa elastica					
Nr. 2 ähnlich wie Nr. 1, ein wenig schwächer; nur die einjähr. Zweige weggenommen	8. X. 1909	10. XI. 1909	7. XII.: gegen die Astenden 3 - 20 cm lange Triebe mit wenigen 3 bis 8 cm langen Blättern (bis $^1/_4$ der Länge fertiger Blätter) (eigene Beobachtung)	ganz beblättert	Die entblätterten und entasteten Bäume ließen ihr Laub nicht fallen wie die übrigen Exemplare. Am 4. V. stehen die operierten Bäume noch in vollem Laub. Die übrigen sind noch kahl.
Funtumia (Kickxia) elastica					
gepflanzt 1903; zirka 7 jährig					
Nr. 1 $4^1/_2$ m h., in 2 ca. 6 cm starke Gabeläste geteilt; entastet	9. X. 1909	20. XII. 1909		ganz beblättert	Behielten ihre Blätter und stehen am 4. V. noch in vollem Laub. Die nicht operierten sind jetzt ebenfalls wieder belaubt.
Nr. 2 ähnliches Bäumchen, etwas schwächer, nur einjährige Zweige weggenommen	9. X. 1909	4. XI. 1909		ganz beblättert	

Manihot Glaziovii					
gepflanzt 1. VII. 1908; ca. zwei Jahre alt					
Nr. 1 5 m h., 6 1/2 cm Dm.; alle Zweige unter 3 cm Dm. weggeschnitten	9. X. 1909	?	?	ganz beblättert	Beide Bäume behielten ihr neu entwickeltes Laub und sind am 4. V. noch voll beblättert. Die nicht operierten Bäume sind um die gleiche Zeit noch blattlos.
Nr. 2 ähnlich Nr. 1; alle Zweige unter 1 1/2 cm Dm. weggeschnitten	9. X. 1909	?	?	ganz beblättert	
Theobroma Cacao					
Alter?					
Nr. 1 3,2 m h., gegabelt, stärkerer Ast 5 cm Dm,; entastet zu einem Strunk mit zweispaltiger Gabel	8. X. 1909	?	7. XII.: Triebe bis 30 cm lang mit gut entwickelten noch hängenden Blättern. Hauptast in der Mitte krebsig (eigene Beobachtung)		Der Baum blühte entlang dem Hauptast, aber starb dann ab durch Krebs und „bark shaving“.
Nr. 2 ähnlich Nr. 1, auch ähnlich behandelt	8. X. 1909	?	7. XII.: Triebe mit ganz jungen hängenden roten Blättern und zahlreichen Blättern am Stamm. Enden der Stümpfe nackt. Etwas krebsig		Abgestorben?
Nr. 3 3 m h., strauchig; nur 1 jähr. Zweige weggeschnitten	8. X. 1909	1. XI. 1909	7. XII.: vollständig ausgewachsene Blätter, z. T. befallen von Holopeltis und dann vertrocknet	ganz beblättert	Der Baum behielt sein Laub und ist (4. V.) kaum mehr zu unterscheiden von den übrigen nicht operierten, welche sich auch neu belaubt haben.

Tabelle II.

Namen, Alter und Größe der Bäume (alle wurden stark zurückgeschnitten und nur starkes Holz, öfter nur der Strunk stehen gelassen)	Tag der Schneidelung	Zeit des ersten Austreibens	Beblätterung am 6. XII. 1909 und 11. XII. (eigene Beobachtung)	Beblätterung am 30. III. 1910	Beblätterung am 31. V. 1910
Ficus hispida 6 m h., 7 cm Dm.; Alter? Strunk 4 m h.	6. X. 1909	26. X. 1909	6. XII.: ziemlich zahlreiche, vollkommen und fast ausgewachsene Blätter	voll beblättert	„Die entlaubten Bäume im Botanischen Garten in Kandy und der Baum bei meinem Hause sind alle ausgewachsen und in vollem Laub, Nicht ein einziger hat seine Blätter abgeworfen.“ Not. von Miguel.
Trema orientalis 9 m h., 35 cm Dm.; Alter?	6. X. 1909	3. XI. 1909	6. XII.: ziemlich zahlreiche, fast vollkommen entwickelte Blätter	voll beblättert	
Peltophorum ferrugineum 6 m h., 7 cm Dm.; Alter? Strunk 4 m h., mit drei starken Ästen	6. X. 1909	28. X. 1909	6. XII.: ziemlich zahlreiche, noch nicht ausgewachsene Blätter	voll beblättert	
Gmelina arborea 7 m h., $4^1/_2$ cm Dm.; Alter 2—3 Jahre; Strunk 5 m h.	6. X. 1909	23. X. 1909	6. XII.: ziemlich zahlreiche, vollkommen ausgewachsene Blätter	voll beblättert	
Tectona grandis Zwei Bäumchen von ca. 7 m H. u. 5 cm Dm.; Alter drei Jahre; Strunk 5 m h.	6. X. 1609	24. X. 1909	6. XII.: mäßig zahlreiche, vollkommen oder fast vollkommen ausgewachsene Blätter	voll beblättert	

Spathodea campanulata					
9 m h., 12 cm Dm,; Alter ca. 4 Jahre; Strunk 6 m h.	6. X. 1909	19. X. 1909	6. XII.: ziemlich zahlreiche, vollkommen ausgewachsene Blätter. (13. XII.: 15 cm lange Triebe mit ca. 30 cm langen, jungen Blättern.) Not. von Miguel.	voll beblättert	„Die entlaubten Bäume im Botanischen Garten in Kandy und der Baum bei meinem Hause sind alle ausgewachsen und in vollem Laub. Nicht ein einziger hat seine Blätter abgeworfen.“ Not. von Miguel.
Bombax malabaricum					
Baum bei Miguels Haus	X. 1909	?	?	Die Aststümpfe am Gipfel haben ausgetrieben und Blätter entwickelt, welche nicht abfielen. (Die Blätter aller Bombaxbäume im Garten sind abgeworfen worden.	
Bombax malabaricum					
Fünf junge Bäumchen im Governors Park in Kandy; ca. 3—3,2 m h., 4—5 cm Dm.; alle Zweige und Gipfel weggeschnitten	30. IX. 1909	?	11. XII.: wenige, ganz kurze Triebe nahe der Spitze der Strünke, mit noch kleinen, halbentfalteten Blättern	beblättert	
Eriodendron anfractuosum					
Mittelstarker Baum im Governors Park in Kandy; 17 m h., 22 cm Dm.; 5 m Gipfel und alle Äste weggenommen	30. IX. 1909	?	11. XII.: an der Spitze des Strunks eine Anzahl Triebe mit, soweit von unten erkennbar, noch nicht ganz ausgewachsenen Blättern	beblättert	

seine Blätter abwirft und in der Trockenzeit kahl steht, im Alter aber immergrün wird. Wollte man nun die Sache in der sehr naheliegenden Weise erklären, daß in der Jugend die Wurzeln sich nur in der oberflächlicheren Bodenschicht ausbreiten, welche in regenarmer Zeit rasch austrocknet, so daß also Wassermangel den Baum zur Entblätterung zwingt, so scheint das Resultat der Schneidelung zu zeigen, daß die Sache nicht ganz so einfach liegt. Denn das gleiche junge Individuum, welches in anderen Jahren die alten Blätter fallen ließ, konservierte nach der Schneidelung seine neugebildeten Blätter über die trockenheiße Zeit hinaus. Gleichwohl lege ich auf das Beispiel von Spathodea kein besonderes Gewicht, da der Versuch nur mit einem einzigen Exemplar gemacht wurde und gerade hier Wiederholung mit jüngeren wie älteren Individuen angezeigt wäre. Die übrigen Beispiele aber sind beweiskräftig genug.

Regenhöhen und Zahl der Regentage in Peradeniya.

Monatsmittel aus 23 Beobachtungsjahren		Monat Jahr	Monatsmittel der gleichen Monate 1909/10	
Zahl der Regentage	Regenhöhen		Regenhöhen	Zahl der Regentage
21	14.01″	Okt. 1909	4.54″	15
17	9.95″	Nov. 1909	12.06″	17
13	7.90″	Dez. 1909	5.25″	11
7	3.17″	Jan. 1910	1.51″	9
4	1.72″	Febr. 1910	6.74″	9
8	4.35′	März 1910	0.75″	3
14	8.79″	April 1910	7.92″	15

Herrn Bamber verdanke ich auch die Mitteilung der in Peradeniya während der Versuchszeit gemessenen Regenhöhen und der Zahl der Regentage, welche ich in der kleinen Tabelle hier wiedergebe. Ich füge derselben die aus dem offiziellen Report der meteorologischen Stationen Ceylons für 1908 entnommenen entsprechenden m i t t l e r e n Daten für die Station Peradeniya Gardens bei. Die Regenmengen sind in engl. Zoll

angegeben. Links stehen die Mittelzahlen, rechts die neu beobachteten. Die Zahl der Regentage ist in der ersten Hälfte der Beobachtungszeit meist etwas niedriger als im Mittel und die Regenhöhe deutlich geringer, namentlich im Dezember. Der Januar hat zwar zwei Regentage mehr als der Durchschnitt, aber dafür eine ganz besonders geringe Regenmenge, die weniger als die Hälfte des ohnehin ziemlich niedrigen Januarmittels ausmacht und in der Beobachtungszeit besonders starken Anlaß für direkte Wirkung auf Entlaubung geboten haben muß. Die auffallend hohe Regenmenge des Februar wiederum hätte nach dem sehr trocknen Januar — nach unseren europäischen Erfahrungen — erst recht den Blattfall beschleunigen müssen. Der März hatte schließlich nicht nur sehr wenig Regentage sondern auch ganz besonders geringe Regenhöhe, fast nur $^1/_6$ des Mittels aus vielen Jahren.

Das Hauptresultat meiner hier mitgeteilten Versuche geht also dahin, daß es bei einer Anzahl von Bäumen, welche normal in der trockenheißen Zeit des ceyloneser Tropenklimas alljährlich ihre Blätter abwerfen, gelingt, sie über die ganze trockenheiße Periode hinaus in ihrer vollen Belaubung zu erhalten. Nicht einmal der Mangel besonderer anatomischer Schutzeinrichtungen gegen Wasserverlust, wie er z. B. bei den Blättern von Bombax malabaricum besteht, erwies sich in den vorliegenden Fällen für deren Erhaltung hinderlich.

Damit ist erwiesen, daß die äußeren Verhältnisse, welche der Eintritt der trockenheißen Zeit mit sich bringt, nicht die unmittelbare Ursache des normalen Laubfalles dieser Bäume sein können.[1])

Allen bereits genannten Herren, ganz besonders Herrn R. H. Lock und Herrn J. Kelway Bamber, bin ich für die Ermöglichung meiner Versuche zu großem Dank verpflichtet.

---

[1]) Über einige die Periodizität sommergrüner Bäume gemäßigter Klimate im tropischen Klima betreffende Beobachtungen werde ich besonders berichten.



Die ostbayerische Überschiebung und die Tiefbohrungen bei Straubing.

Von **A. Rothpletz.**

Mit 2 Tafeln.

Vorgetragen in der Sitzung vom 4. März 1911.

Einleitung.

Die Höhenzüge des granitischen bayerischen Waldgebirges enden zwischen Regensburg und Deggendorf so unvermittelt an der weiten Donauniederung, daß sich dem Beschauer fast unwillkürlich der Gedanke an einen tektonischen Abbruch aufdrängt, durch den das Granitgebirge im Süden in die Tiefe versenkt wurde. Die Donau hat sich in großen Windungen ihren Weg längs diesem Abbruchrande gebahnt bis zur Einmündung der Isar. Von da ab stellen sich jedoch einige kleine granitische Hügel auch auf der südlichen Stromseite ein und bei Pleinting fließt die Donau geradezu in das Granitgebirge hinein, das sie erst bei Linz in Oberösterreich wieder verläßt. Auf dieser langen Strecke folgt sie keiner Abbruchlinie mehr und ihr Lauf trägt die Spuren starker Erosionstätigkeit deutlich zur Schau. Den Südrand des über die Donau herübergreifenden Granitgebirges kann man hier orographisch nicht mehr erkennen und auch der Geologe ist in Verlegenheit ihn anzugeben, weil mächtige diluviale und jungtertiäre Ablagerungen das Grundgebirge überlagern und es um so mehr verhüllen, je weiter man sich südwärts von der Donau entfernt. In dieser Richtung stellen sich aber unter dem Tertiär auch vereinzelte Partien von Jura- und Kreidegesteinen ein, teils in mitten des Granites teils an dessen Südrande. Gümbel hat

angenommen, daß sie die der Erosion entgangenen Überreste einer Sedimentdecke sind, welche sich ehemals auf dem Granitgebirge weithin ausgedehnt habe. Es ist jedoch sehr auffallend, daß, wie von Ammon schon vor 36 Jahren nachgewiesen hat, im Jura keine älteren Horizonte als die des oberen und mittleren Doggers palaeontologisch nachweisbar sind und daß an keiner einzigen Stelle eine Auflagerung dieses Juras oder der Kreide auf dem Granit zu sehen ist.

Das erweckte in mir den Verdacht, daß die Verbandverhältnisse zwischen Jura und Granit andere sein könnten als bisher allgemein angenommen worden ist, und ihre eigentümlichen Verbreitungsverhältnisse schienen mir durch eine Überschiebung besser erklärt werden zu können. Der Versuch, den ich deshalb vor zwei Jahren gemacht habe, einem jungen Geologen die Aufnahme dieses Gebietes als Doktorarbeit zu geben, hatte leider keinen Erfolg gegenüber dem Anreiz, den alpine Geologie auf das Herz eines Bergsteigers ausübt. So blieb denn dieses interessante Problem liegen und ich dachte nicht mehr daran, als mir zu Ende des Septembers im vorigen Jahre Herr Bergrat Dr. Weithofer, Generaldirektor der oberbayerischen Aktiengesellschaft für Kohlenbergbau, einige Bohrkerne zeigte, die von Tiefbohrungen stammten, welche jene Gesellschaft in Verbindung mit der Maxhütte im August 1909 in der Nähe von Straubing, also in der eben erwähnten Donauniederung am Südrande des bayerischen Waldgebirges, begonnen hatten in der Hoffnung Steinkohlenflötze zu finden. Da man mit dem ersten über 800 m tiefen Bohrloch bei Straubing nicht fündig geworden war, hatte man ein zweites ebenso tiefes um 4½ km näher am Gebirgsrande niedergebracht und mit diesem erreichte man wirklich das Rotliegende, aber darunter nicht die erwartete kohlenführende Steinkohlenformation, sondern marine Schichten.

Damit war die Hoffnung auf einen praktischen Erfolg zwar zerstört worden, aber Herr Dr. Weithofer war sich des wissenschaftlichen Wertes dieser Bohrungen wohl bewußt und so stellte er der geologischen Staatssammlung alle Bohrproben

zur Verfügung. Damit hat er der Wissenschaft einen sehr großen Dienst erwiesen und ich kann ihm dafür nicht genug danken. Wünschen möchte ich, daß sein Vorgehen auch für andere vorbildlich werde, denn jede Tiefbohrung, auch wenn sie den erwarteten Gewinn nicht bringt, ist für die geologische Forschung von großer Bedeutung und indirekt auch von praktischem Nutzen für die Zukunft.

Schon der erste Bohrkern, den mir Dr. Weithofer aus dem Liegenden des Rotliegenden brachte, erfüllte mich mit Freude, denn der Anblick desselben genügte mir, sein mesozoisches Alter zu erkennen und damit die Überschiebung und die Beziehung derselben, zu der von mir vermuteten Überschiebung zwischen Pleinting und Passau. So trat das ein Jahr vorher auf unbestimmte Zeit vertagte Problem plötzlich und unvermutet wieder in den Vordergrund. Noch ehe der Winterschnee es unmöglich machte, stattete ich der Ortenburger Gegend und dem Keilberg einen Besuch ab und so kann ich nun einen vorläufigen Bericht über das Ergebnis erstatten. Die Versteinerungen, soweit sie der Präparator Reitter aus den Bohrkernen lösen konnte, hat Herr Dr. Dacqué bestimmt und darüber den im zweiten Kapitel abgedruckten Bericht verfaßt. Die zahlreichen Foraminiferen werden von Dr. Karl Beutler bearbeitet werden.

I. Die Bohrungen bei Straubing.

Das erste Bohrloch wurde im August 1909 bei der Wundermühle unweit Straubing an der Donau begonnen. Dr. Weithofer hat das Bohrmehl untersucht, petrographisch und, soweit es möglich war, auch stratigraphisch bestimmt. Proben davon wurden in Gläsern und Papiertüten aufbewahrt. Wo es wünschenswert erschien, wurden auch Bohrkerne ausgehoben. Soweit sie Versteinerungen enthielten, wurden diese von Dr. Dacqué nachträglich bestimmt. Daraus und aus dem Bohrregister läßt sich für die durchsunkenen Schichten folgende Reihe von oben nach unten angeben:

34,0	Donau-Alluvionen: Ton, Sand und Kies,
391,0	Tertiär: Sand, Ton, kohlenhaltiger Ton, Lignitlager und Quarzsandstein,
313,25	obere Kreide: grauer Mergel, Kalkstein und grauer bis weißer Sandstein,
65,0	weißer Jura: gelblich-weißer Kalkstein.
803,25	

Die tertiären Sande werden erst von der Tiefe von 146 m an zu festem Sandstein, aber die auch ihnen eingelagerten Lignite machen es ziemlich sicher, daß sie alle noch zur miocänen Süßwasserablagerung gehören.

Die Ergebnisse dieses Bohrloches stehen in Einklang mit dem, was man bisher von der Geologie dieser Gegend wußte. Das flache Hügelland im Süden der Donau zwischen Regensburg und Plattling besteht allerorten aus jungtertiären Süßwasserablagerungen, die entweder von diluvialem Lehm oder von alluvialen Sanden bedeckt sind. Und wenn auch in den Donauniederungen selbst diese jüngere Decke das Tertiär ganz verhüllt, so war doch nicht zweifelhaft, daß es darunter liege.

Bei Regensburg bildet die jüngere Kreide, Cenoman bis Senon, die Unterlage des Tertiärs und Hofrat Dr. Brunhuber[1]) hat schon 1894 auf Grund vorhandener Bohrungen nachgewiesen, daß sich dort die Kreideschichten ganz schwach gegen Osten senken im Verhältnis von etwa 1:80. Wenn man die Oberfläche der Kreide (+ 380 m) bei Regensburg mit dieser Neigung bis Straubing sich fortsetzend annimmt, dann liegt sie hier ziemlich genau in der Höhe, in welcher sie tatsächlich erbohrt wurde (— 76 m). Auch darauf hat Brunhuber schon hingewiesen, daß die Mächtigkeit der Kreideablagerungen nach Osten zunimmt, und so war es nicht überraschend, daß sie bei Straubing über 300 m mißt, während sie bei Regensburg durchschnittlich nur 70 m stark ist. Für die Oberfläche der Jura-

[1]) Über die geotektonischen Verhältnisse der Umgebung von Regensburg. Berichte des naturw. Vereines zu Regensburg 1894/5 Heft 5.

formation ergibt sich daraus eine Neigung von Regensburg bis Straubing von rund 1 : 50 oder etwas über 1°.

Für die Unternehmer war dieses Ergebnis nicht günstig, denn sie hätten noch die ganze Jura- und Triasformation zu durchbohren gehabt, um feststellen zu können, ob dieselben auf Rotliegendem, der Kohlenformation oder Granit liegen. Man gab deshalb dieses Bohrloch auf und versuchte es mit einem anderen, das um 4$^{1}/_{2}$ km weiter in NNO und ziemlich nahe am Gebirgsrande bei Unterharthof niedergebracht wurde.

Welche Voraussage hätte sich für diese neue Bohrung nach den Ergebnissen des Straubinger Bohrloches und auf Grund der hauptsächlich auf den Schultern Gümbels ruhenden tektonischen Auffassung dieser Gegend wohl geben lassen?

Zieht man eine Linie von Bogen bis Münster, so gibt sie die Südgrenze des Granitgebirges an. Unterharthof liegt im Süden dieser Linie also noch in dem Gebiet des Donauabbruches. Der Granit mit samt seiner Decke von Rotliegendem, Keuper, Lias, Dogger, Jura und Kreide ist hier in die Tiefe abgesunken und nur am Abbruchrande selbst ragt noch etwas von der Kreide, dem Jura, Dogger und Keuper in stark verstürzter Lagerung, südlich von Münster kleine Hügel bildend, „dem Urgebirge angeklebt“ (Gümbel, Geologie Bayerns II S. 466) aus der Niederung auf. Da Unterharthof im Süden dieser geschleppten Schichten aber ganz in ihrer Nähe liegt, so war demnach anzunehmen, daß man zunächst mit dem Bohrloche das Diluvium und Tertiär durchsinken, dann aber in die sich schon etwas flacher legenden Kreideschichten und darunter in den Jura kommen, also eine ähnliche Schichtenreihe wie mit dem Straubinger Bohrloch durchstossen würde. Ein Unterschied hätte nur insofern prophezeit werden können, als für das Tertiär eine geringere Mächtigkeit und für die mesozoischen Schichten eine weniger regelmäßige Lagerung infolge der Schleppung wahrscheinlich war. Für das baldige Auffinden der palaezoischen Unterlage wären aber die Aussichten dadurch nicht günstiger geworden wegen der steileren Stellung der hangenden Schichten.

Eine solche Prognose, wenn sie überhaupt gestellt worden wäre, hätte durch das Unterharthofener Bohrloch insofern Bestätigung gefunden, als das Tertiär wirklich nur etwa 100 m Mächtigkeit aufwies und die Kreide mit ziemlich steiler Schichtenstellung angetroffen wurde, ohne daß man bei gleicher Tiefe wie im Straubinger Bohrloch den darunter liegenden Jura erreichte. Aber dennoch wäre die Voraussage irrig gewesen. Denn unter dem Tertiär und ehe es die Kreide erreichte, durchsank das Bohrloch das Rotliegende in einer Mächtigkeit von beinahe 600 m. Dies war das ganz unerwartete und in tektonischer Beziehung bedeutungsvollste Ergebnis dieser zweiten Bohrung. Die durchbohrte Schichtenfolge ergab von oben nach unten folgende Mächtigkeiten:

Bohrloch bei Unterharthof.

10,5	m diluvialer Lehm und alte Donaualluvionen,
96,8	Tertiäre Tone, Sandsteine und Lignitlager,
589,6	Rotliegendes: Konglomerat, Schieferletten und Sandstein,
106,6	obere Kreide (Senon, Turon und Cenoman).
803,5	

Die Unterfläche des Tertiärs liegt hier also um rund 320 m höher als bei Straubing, sie steigt von dort gegen Unterharthof mit einer Neigung von 1 : 14 oder ungefähr 4^0 an. Die Oberfläche der Kreide hingegen liegt um 270 m tiefer, senkt sich also um 1 : 16.6 oder etwa $3^1/_2{}^0$ nach Norden. Das dazwischen liegende Rotliegende wurde bei Straubing nicht gefunden, es hat sich offenbar innerhalb der $4^1/_2$ km langen Strecke, die zwischen beiden Bohrlöchern liegt, ausgekeilt.

Wie kann man sich diese abnormale Lagerung des Rotliegenden erklären?

Man könnte zweierlei Annahmen machen. Entweder ist das Rotliegende mitsamt der Kreide überfaltet, oder es ist von Norden her über die Kreide geschoben worden. Die Überfaltung wird jedoch dadurch widerlegt, daß unter dem Rotliegenden zunächst die senone Kreide kam, dann erst die turone

und cenomane, so daß bei weiterem Bohren die Juraformation zu erwarten gewesen wäre. Bei einer Überfaltung hätte zu oberst die cenomane und darunter die turone und senone Kreide liegen müssen. Mithin bleibt nur die einfache Überschiebung zur Erklärung übrig.

Es fällt auf, daß die Kreide-Bohrkerne eine Neigung der Schichten von 20—35° zeigen. Leider wurde es versäumt, von diesen Kernen einige orientiert zu Tage zu fördern, und so sind wir nicht mehr im Stande festzustellen, nach welcher Himmelsrichtung die Schichten einfallen. Ich nehme jedoch eine Neigung nach Süden an und habe dafür zwei Gründe. Erstens haben die in der Nähe bei Münster zu Tage gehenden Jura- und Kreide-Schichten ebenfalls eine solche Neigung und zweitens sind wir hier ganz nahe bei der Donauabbruchspalte, auf der die absinkenden Schichten naturgemäß eine Schleppung erfahren und damit eine Neigung nach Süden erhalten mußten. Es kann aber kaum einem Zweifel unterliegen, daß die in den zwei Bohrlöchern erreichte Kreide ein und derselben am Granit des bayerischen Waldgebirges abgesunkenen Gebirgsscholle angehören. Ob dieselbe so einfach gestaltet ist, wie ich sie im Profil gezeichnet habe, mag dahingestellt bleiben. Nicht unwahrscheinlich ist es, daß der Abbruch nicht nur auf einer, sondern auf mehreren Spalten staffelförmig erfolgte. Da aber keine bestimmten Anhaltspunkte zu gewinnen waren, wo diese Brüche liegen und welche Sprunghöhe sie haben, zog ich es vor, sie in der Zeichnung nicht anzudeuten, und ich gab deshalb auch der Schubmasse von Rotliegendem eine möglichst einfache Form, wenn schon ich die Überzeugung habe, daß eine solche Regelmäßigkeit nicht besteht. (Siehe Fig. 1 auf S. 159.)

Für die Unternehmer war auch dieses zweite Bohrloch eine Enttäuschung, denn obschon man das Rotliegende in großer Mächtigkeit angetroffen hatte, so fand man darin doch nicht die geringsten Spuren von Kohlenlagern und die Gesteine wiesen darauf hin, daß sie aus dem Detritus des älteren Granitgebirges durch Zusammenschwemmung entstanden sind, offenbar unter Umständen, die der Ablagerung größerer Pflanzenmassen nicht günstig waren.

II. Paläontologische Untersuchung der Bohrproben.

Bericht des Herrn Dr. E. Dacqué.

Die von mir untersuchten Bohrproben sind bezeichnet mit: I. Unterharthof; II. Straubing.

Ad. I. Bohrprobenlänge und Gesteinscharakter von I.

Meine Gesteins- und Fossilbestimmungen beginnen bei 711,40 m und endigen bei 803 m.

Das Gestein ist von 711,40 m bis 782 m ein schwarzer bis grauschwarzer Kalkmergel, offenbar mit wechselndem Ton- und Kalkgehalt. Es erinnert stark an den Marterberg-Pläner bei Ortenburg und an die dunkeln Mergel der Priesener Schichten in Böhmen. Das Gestein reichert sich bei 782,5 m mit Glaukonit an und geht von 784 m ab in einen typischen, nach unten immer heller werdenden groben brüchigen Grünsandstein über (bis 786 m).

Stichproben auf Fossilien wurden vorgenommen bei einer Tiefe von:

711,40 m	736 m	761 m
713/714 m	739 m	781 m
721/722 m	740,5 m	782 m
726 m	746/747 m	785 m
729 m	751/752 m	786 m
734 m	756,50 m	800 m

Die Fossilien sind ihres Kalkgehaltes großenteils verlustig gegangen und daher ungemein brüchig und schwer zu isolieren bzw. sind Schlösser von Muscheln niemals freizulegen. Die Fossilien repräsentieren fast ausnahmslos eine Mikrofauna.

Es konnten folgende Arten bestimmt werden:

Verzeichnis der aus I bestimmten Fossilien.

711,40 m

Vola quinquecostata Sow.

Nucula (?) sp.

Leda semilunaris v. Buch.

Cardium Ottoi Gümb.

Venus laminosa Rss.

Tellina concentrica Rss.

Trochus amatus d'Orb.

713/714 m

Foraminiferen
Pecten Nilssoni Gein.
Vola quadricostata Sow.
Mytilus cfr. anthracophilus Zitt.
Arca pygmaea (?) Rss.
Nucula concentrica (?) Gein.
" producta Nilss.
" ovata Mant.
" subaequalis Rss.
Leda semilunaris v. Buch
Cardium Eggeri Gümb.
" Ottoi Gümb.
Cardita tenuicosta Sow.
Lucina lenticularis Goldf.
Venus laminosa Rss.
Tellina concentrica Rss.
Siliqua truncatula Rss.
Dentalium polygonum Rss.
Trochus Geinitzi Rss.
Turritella cfr. acicularis Rss.
Aporrhais Reussi (?) Gein.
" stenoptera (?) Goldf.
Krebsrest (?)

721/722 m

Pecten Nilssoni Goldf.
Arca Geinitzi Rss.
Nucula producta Nilss.
" cfr. pectinata Sow.
Cardium Eggeri Gümb.
Astarte acuta Rss.
Venus faba Sow.
Cypricardia testacea Zitt.
Capulus sp.
Dentalium glabrum Gein.
Helicoceras (?) sp.

726 m

Inoceramus Cuvieri (?) Sow.
Spondylus (?) sp.
Mytilus cfr. anthracophilus Zitt.
Nucula producta Nilss.
" subaequalis (?) Rss.
Cardita tenuicosta d'Orb.
Cardium Eggeri Gümb.
Venus faba Sow.
Siliqua truncatula Rss.
Turbo aff. Naumanni Gein.

729 m

Spondylus (?) sp.
Arca Geinitzi Rss.
Cardium Ottoi Gümb.
Venus faba Sow.
Siliqua truncatula Rss.
Volutoderma fenestrata Röm.
Aporrhais megaloptera (?) Rss.

734 m

Pecten Nilssoni Goldf.
Inoceramus Cuvieri Sow.
Spondylus sp. ind.
Arca Geinitzi Rss.
Nucula ovata Mant.
Cardium Eggeri Gümb.
Cardita tenuicosta Sow.
Tellina concentrica Rss.
Voluthilites Römeri Gein.
Turbo punctatus Zek.

736 m

Pecten Nilssoni Goldf.
Lima cfr. dichotoma Rss.
Cardium Eggeri Gümb.
Corbula caudata Rss.

Psammobia semicostata Röm.
Trochus Engelhardti Gein.
Turbo sp. ind.
Capulus aff. verus J. Böhm.

739 m

Arca Geinitzi Rss.
Nucula subaequalis (?) Rss.
„ ovata Mant.
Cardium lineolatum (?) Rss.
„ Ottoi Gein.
„ Eggeri Gümb.
Venus faba Sow.
Cerithium subfasciatum d'Orb.
„Trochus“ concinnus Röm.
Krebsrest (?)

740,5 m

Cucullaea cfr. subglabra oder Matheroniana d'Orb.
Circe dubiosa Zitt.
Venus parva (?) Sow.

746/747 m

Nucula producta Nilss.
Leda semilunaris v. Buch.
Cardium Ottoi Gein.
Astarte acuta Rss.
Venus faba Sow.
Solen aequalis (?) d'Orb.
Teredo ornatissima Frič.
Lyonsia carinifera d'Orb.
Neaera caudata Nilss.
Capulus aff. verus J. Böhm.
Turritella multistriata Rss.

751/752 m

Lima Mantelli Goldf.
Nucula subaequalis Rss.
Arca Geinitzi Rss.
Pectunculus cfr. insculptus Rss.
Cardium alutaceum Goldf.
Tellina concentrica Rss.
Teredo ornatissima Frič.
Siliqua truncatula Rss.
Aporrhais stenoptera Goldf.
Cosmoceras Schloenbachi (?) Frič.
Lamnidenzahn (= Spinax marginatus Rss.)

756,50 m

Dubiosa.

761 m

Anomia sp. ind.
Arca Geinitzi Rss.
Pectunculus cfr. insculptus Rss.
Cardium alutaceum Goldf.
„ Eggeri Gümb.
Venus parva Sow.
Dentalium polygonum Rss.
Voluta elongata Sow.
Aporrhais Buchi Münst.
Krebsrest.
Epiaster (?) sp.

773 m

Arca subglabra (?) d'Orb.
Astarte acuta Rss.
cfr. Pholadomya aequivalis d'Orb.
Einzelkoralle ??

778 m

Dubiöse Konkretionen.
Exogyra sp. ind.
Spondylus sp. ind.

780 m
Inoceramus labiatus Gein.
Venus laminosa Sow.
Tellina concentrica Rss.
Corbula bifrons Rss.

781 m
Dubiöse Konkretionen.

782 m
Anomia sp. ind.
Cyprina sp. (?)
Venus fabacea Röm.
Tellina concentrica Gein.
Pholadomya aequivalvis (?) d'Orb.
Corbula bifrons Rss.
Cerithium subfasciatum d'Orb.
Fusus Requienianus (?) d'Orb.

785 m
Callianassa sp.

786 m
Callianassa sp., Konkretionen.

800 m
Pflanzenstengel.

Altersbestimmung der durch die vorhergehenden Fossilien charakterisierten Stufen.

Die vorstehend aufgezählte Fauna vereinigt in sich Arten, welche außerhalb unserer Fundstelle besonders in den Marterberger, den Priesener, den Weißenberger und den Malnitzer Schichten in gleichartiger Vergesellschaftung vorkommen.

Es läßt sich nicht genau angeben, welche Metertiefe im einzelnen der einen oder anderen jener Schichten genauer entspricht; dazu sind die Formen nicht charakteristisch genug. Die allermeisten gehen durch Turon und Senon, mehrere auch durch das Cenoman noch hindurch.

Eine zur genauen übersichtlichen Feststellung des Alters der einzelnen Schichten angefertigte Tabelle hat indessen doch das eine Resultat ergeben, daß bis zu einer Tiefe von 734 m inkl. ganz entschieden Formen vorwiegen, welche in den Priesener Schichten, also dem allerobersten Turon, vor allem heimisch sind, während von 736 m ab nach abwärts ausschließlich Formen vertreten sind wie Corbula caudata Rss., Psammobia semicostata Röm., Cardium alutaceum Gdf., Lima Mantelli Goldf. und vielleicht auch Cerithium subfasciatum d'Orb., welche in der böhmischen Kreide durchaus tiefere Niveaus einnehmen und zwar Teplitzer-, Malnitzer- und Weißenberger Schichten.

Dazu kommt noch in einer Tiefe von 780 m der Inoceramus labiatus Gein., welcher auf Weißenberger Schichten, also unteres Turon deutet. Bei 785 m haben wir zweifelloses Cenoman, erwiesen durch die Identität unserer spezifisch nicht bestimmbaren Callianassa mit einem ebensolchen Stück aus dem Regensburger Cenoman, das in der bayerischen Staatssammlung liegt.

Wenn wir daher das böhmische und zum Vergleich auch das sächsische Einteilungsschema der oberen Kreide zu Grunde legen, erhalten wir etwa folgende Alterseinteilung unserer Bohrkerne:

Übersichts-Tabelle zur Altersbestimmung der Bohrproben.

	Böhmen	Sachsen	Bohrproben
Senon	Chlomeker	Baculitensch.	
	Priesener		711,40—734 m
Turon	Teplitzer	Oberer Pläner von Strehlen	735 m 736 m
	Malnitzer		
	Weißenberger (labiatus)	Mittlerer Pläner	780 m
Cenoman	Korytzaner	Unterer Pläner	785 m

Ich glaube nicht, daß höhere Schichten als solche des Priesener Niveaus vorhanden sind, die ich in das oberste Turon, nicht in das Senon selbst stellen möchte. Zwar haben wir eine große Anzahl Arten, die auch in die Chlomeker Schichten gehen, ja Cardium Ottonis soll sogar für diese in Böhmen charakteristisch sein, aber anderwärts geht letztere Art auch in reichlich tiefere Niveaus herein (Gosau), sodaß wir ein Vertretensein

des Chlomeker Horizontes nicht unbedingt zu folgern brauchen. Es kommt hinzu, daß unsere schwarzgrauen Mergel sowohl petrographisch, wie auch faunistisch in ihren oberen Lagen so stark an die Marterberger Schichten bei Ortenburg — also ein Vorkommen in nächster Nähe — erinnern, daß wir auch aus diesem Grunde keinen höheren Horizont als oberstes Turon bei unseren Bohrproben anzunehmen brauchen.

Ad II. Bohrprobenlänge und Gesteinscharakter von II.

Die mir mit der Bezeichnung „Straubing" vorliegenden Bohrkerne erstrecken sich von 550 m bis inkl. 806 m.

Das Gestein besteht von 550 bis 575 m aus denselben schwärzlichen tonigen Mergeln, wie die oberen Lagen aus Bohrloch „Unterharthof" (I). Dann ist eine Lücke vorhanden bis 619 m. Von 619,55—620,05 m liegt ein Stück glaukonitischen Gesteins vor. Dann wieder eine Lücke, dann von 645,80 bis 646,45 m ein grauer homogener Kalk.

Aus solchem Kalk bestehen auch die weiteren, von 653 m bis 661 m Tiefe untersuchten Bohrproben. Von 670 m bis 738 m wieder eine Lücke, und von 738 m bis 806 m weißer Jura.

Stichproben auf Fossilien wurden vorgenommen bei Tiefen von:

550—575 m	658/659 m
653 m	660 m
653,50 m	661,60 m

und zwischen 738 m und 806 m aus Bohrproben mit nicht näher bezeichneter Tiefe.

Für die Fossilien von 550 m bis 575 m gibt dasselbe wie für jene aus Bohrloch I „Unterharthof": sie sind ungemein brüchig und repräsentieren dieselbe Mikrofauna.

Es konnten folgende Arten bestimmt werden:

550/575 m

Avicula Geinitzi Rss.
Cardium cfr. lineolatum Rss.
„ (??) sp. ind.
Neaera caudata Nilss.

Dentalium polygonum Rss.
Scaphites cfr. Geinitzi d'Orb.
Hamites bohemicus (??) Frič.
Baculites Faujassi (??) Frič. u. Schlot.

Micrabacia coronula Goldf.

653/653,50 m

Anomia sp. ind.
Exogyra sp. ind.
Rhynchonella plicatilis Sow.
Magas Geinitzi Schlönb.

658 m

Vola cfr. quadricostata Sow.

660 m

Vola cfr. quadricostata Sow.
Pecten acuminatus Gein.
Dentalium medium Sow.
Rhynchonella octoplicata Sow.
Magas transversa Frič.

661,50 m

Rhynchonella plicatilis Sow.
Magas cfr. transversa Frič.
„ Geinitzi Schlönb.

Die Alterbestimmung ist hier ziemlich einfach: Die obersten Schichten bei 550—575 m sind Äquivalente der Priesener Schichten und nehmen vielleicht ein etwas höheres Niveau ein als die obersten aus dem Bohrloch I von Unterharthof; ich schließe das aus dem Vorkommen des vermutlichen Baculites.

Die grauen homogenen Kalke von 653 m ab bis hinunter zu 661,60 m gehören nach ihrem Fossilinhalt in das Niveau der Weißenberger Schichten Böhmens, also in das untere Turon. Cenoman wurde nicht beobachtet, dagegen sind die Bohrproben aus der Tiefe 738 m bis 806 m weißes Juragestein, in dem sich nur zweifelhafte Terebratulidenreste fanden, dessen genaueres Alter also nicht festgelegt werden konnte.

III. Die Beziehungen des Juras von Münster zu dem des Donaueinbruches.

In Fig. 1 habe ich den Versuch gemacht, den bei Straubing in 738 m Tiefe erbohrten Jura mit demjenigen in eine tektonische Verbindung zu bringen, der bei Münster am Helmberg und Buchberg zutage ansteht. Ich war dabei gezwungen, zwei Verwerfungen anzunehmen, von denen die eine die Donauabbruchspalte, die andere eine ältere Abbruchspalte am granitischen Waldgebirge darstellt. Die Strecke Straubing-Unterharthof fällt freilich mit der von Helmberg-Münster nicht in eine Vertikal-Ebene. Letztere liegt 2 km weiter nach NW. Würde ich das Profil ohne Richtungsänderung von Straubing über Unterhart-

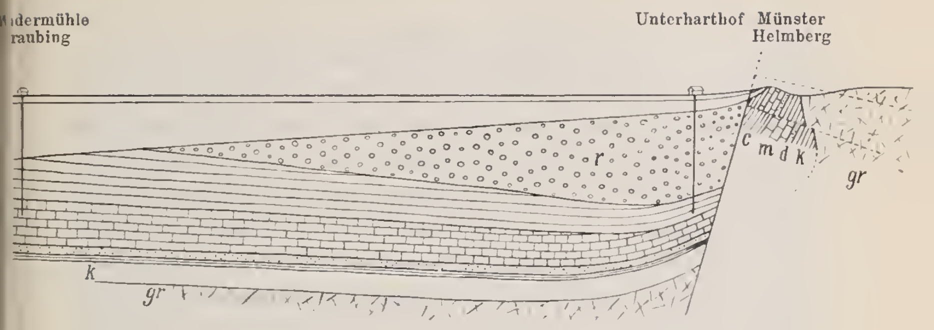


Fig. 1. l Alluvium und Diluvium, t Miocän, c obere Kreide, m oberer Jura, d Dogger, l Lias, k obere Trias, r Rotliegendes, gr Granit. Maasstab 1 : 50 000.

hof verlängert haben, so wäre ich damit in ein sanft ansteigendes Gelände gekommen, dessen von Diluvium ganz verhüllter Untergrund unbekannt ist, und ich hätte erst bei Kapfelberg, in einer Entfernung von 3½ km von Unterharthof, den Granit des Waldgebirges erreicht. Ich habe es deswegen vorgezogen, die Schichten des Helmberges in das Profil Straubing-Unterharthof zu projizieren, weil es doch recht wahrscheinlich ist, daß im Süden des Helmberges unter der Donauebene dasselbe Rotliegende in der Tiefe liegt, das bei Unterharthof erbohrt worden ist. Das Profil ist somit genau von S nach N gerichtet.

Da mir die Winterzeit einen Besuch von Münster nicht mehr gestattete, so muß ich mich im nachfolgenden ausschließlich auf die Angaben verlassen, die von Ammon 1875 veröffentlicht hat. Danach fallen die Schichten des weißen Jura und Doggers am Westende des Buchberges mit 20° nach Süd ein, stellen sich aber am Ostende erheblich steiler. Unter dem Eisensandstein des Doggers liegen Kaolinsandstein und rote Letten der oberen Trias, während der Lias fehlt. Am Helmberg sind die Schichten nicht so regelmäßig gelagert, teils gefaltet teils senkrecht aufgerichtet. Dogger und weißer Jura sind zerrissen und die aufgelagerte Kreide ist in eine muldenförmige Vertiefung hineingeschoben worden.

Diese starken Pressungen verweisen auf einen Horizontalschub, der von dem Granit ausging. Ob das Fehlen des Lias ursprünglich, oder erst durch die tektonischen Bewegungen

verursacht worden ist, bleibt ungewiß. Die eigenartige Aufstülpung der vorher horizontal gelagerten Schichten läßt sich durch einen einfachen Faltungsvorgang kaum erklären und sie wird jedenfalls viel verständlicher, wenn wir annehmen, daß zuerst der Jura auf einer Randspalte am Granit absank und daß dann erst jene horizontale Bewegung des ganzen Granitgebirges begann; die zur Überschiebung der Juraplatte durch den Granit und das dem Granit auf- und eingelagerte Rotliegende führte, wie dies durch das Unterharthofer Bohrloch bewiesen worden ist. Zunächst wurde dabei der Jura samt seinen liegenden und hangenden Schichten zusammengepreßt und aufgestülpt, dann aber werden sich wahrscheinlich in dem ganzen vorwärts geschobenen Gebirge einzelne flach liegende Zerreißungsflächen herausgebildet haben, auf denen die hangenden Massen sich etwas schneller als die liegenden bewegten, wie das in Fig. 1 angedeutet ist. Granit und Rotliegendes schoben sich so über die aufgestülpten Schichtenköpfe des Helmberges hinüber und wenn heute von dieser Decke nichts mehr zu sehen ist, so mag dies seinen Grund darin haben, daß die Erosion sich von dem Momente an gerade hier besonders fühlbar machte, als im Süden der Donauabbruch die Schubdecke und das basale Kreide- und Juragebirge um ungefähr 800 m in die Tiefe versenkte und dem von Norden in das Senkungsfeld herabfließenden Wasser ein stärkeres Gefälle gab.

Für diese tektonische Auffassung kann ich natürlich zunächst nur Wahrscheinlichkeitsbeweise erbringen, aber ich werde ähnliche Erscheinungen am Rande des bayerischen Waldgebirges weiter im Osten und Westen in den nachfolgenden Kapiteln zu beschreiben haben, die dieser Hypothese zur Stütze gereichen.

IV. Die Donauabbruchspalte.

Wenn sie auch bei Straubing nicht sichtbar ist, so kann die Spalte, auf der der Untergrund des Donautales in die Tiefe gesunken ist, doch nur in geringer Entfernung nördlich von dem Unterharthofer Bohrloch liegen (siehe Taf. I). Ihre Lage wird aus der Orographie leicht erkannt, denn der geschlossene Randabsturz des Waldgebirges ist unzweifelhaft erst durch den Einbruch erzeugt worden und durch die Erosion seither zwar mannigfach verändert, aber nicht wesentlich örtlich verschoben worden. Gegen Westen folgt diese Spalte somit dem Donaulauf bis Regensburg, wo Brunhuber (l. c., S. 15) sie am nördlichen Ufer der Donau beobachtet hat. Aber die Sprunghöhe der Verwerfung beträgt hier nicht mehr 800 m wie bei Straubing, sondern nur noch 50 m. Weiter nach Westen liegen Beobachtungen nicht vor, und man kann entweder annehmen, daß die Sprunghöhe allmählich bis zum Verschwinden abnimmt, oder daß die Spalte in der Richtung gegen Abbach nach Süden abschwenkt.

Von Straubing donauabwärts ist die Kreide im Senkungsfeld nirgends mehr sichtbar und es sind mir auch keine Bohrungen oder Schächte bekannt, die sie in der Tiefe erreicht haben. Dafür hat man hier aber andere Merkmale, die dennoch den Verlauf der Spalte anzudeuten scheinen. Der südliche Steilrand des Waldgebirges hält an bis Pleinting und bei Flintsbach ist demselben noch eine Partie von Jura und Kreide in gleicher Weise wie bei Münster vorgelagert. Um so verwunderlicher erscheint es, daß im Süden davon ganz in den Niederungen der Donauebene und zum Teil an den Ufern des Stromes selbst kleine Partien von Granit und Gneis zutage gehen, so zwischen Pleinting und Künzing, am Natternberg gegenüber Deggendorf, bei Klein-Schwarzbach, Lenzing und Allkofen an der Donau. Alle diese Vorkommnisse liegen orographisch tief gegenüber dem Granit des Gebirgsrandes und stehen in keinem sichtbaren Zusammenhang mit demselben, sind bei Flintsbach sogar durch das Dazwischentreten der Jura-

scholle tatsächlich von ihm getrennt. Sie erscheinen an der Oberfläche wie die Spitzen ertrunkener Hügel, die gerade noch aus dem Donauschwemmland hervorschauen. Es liegt nahe, sie als tektonische Äquivalente des bei Straubing erbohrten Rotliegenden anzusehen, die jedoch nicht wie dieses ganz von Tertiär und Diluvium verhüllt worden sind. Danach würde eine Tiefbohrung bei Natternberg oder bei den jodhaltigen Salzquellen von Künzing unter dem Granit und dem diesen umhüllenden Tertiär die Kreide- und Juraschichten in derselben Weise antreffen wie bei Straubing. Damit wäre auch eine befriedigende Erklärung für den Jod- und Kochsalzgehalt der warmen Römerquelle bei Künzing gefunden, die in einer ganz flachen Bodensenke der Donauebene aufsteigt.

Wie schon eingangs erwähnt, senken sich die Kreideschichten im Einbruchgebiet bei Regensburg im Verhältnis von 1 : 80 gegen Osten. Deshalb liegen sie bei Unterharthof so tief unter der Erdoberfläche und tragen noch eine fast 600 m mächtige Überschiebungsdecke von Rotliegendem. Wie dick die Tertiärdecke bei Natternberg und Künzing ist, wissen wir nicht. Sie kann ebensogut nur 30 m wie bei Alteglofsheim und Hellkofen[1]) als über 70 m, wie bei der Zuckerfabrik von Regensburg, oder ungefähr 400 m wie bei Straubing mächtig sein.

Die Tiefenlage der Kreideoberfläche unter Künzing hängt hauptsächlich davon ab, ob der Donaueinbruch an Sprunghöhe von Straubing gegen SO noch zu- oder abnimmt.

Bei Pleinting liegt wahrscheinlich die Ostgrenze des Einbruchgebietes und es dreht sich dort die Abbruchspalte aus ihrer südöstlichen in eine südliche Richtung um. Die Granithügel im Osten von Pleinting, die sich südwärts bis ins Vilstal erstrecken, hängen ohne Unterbrechung nordwärts mit den Granitmassen des Waldgebirges zusammen und die Donau hat sich ihr Bett in dieselben eingeschnitten.

Die Zeit, zu der der Donaueinbruch erfolgt ist, läßt sich nicht mit Sicherheit feststellen, weil wir nicht wissen, ob die

[1]) Dr. Brunhuber, Ber. nat. Ver. Regensburg 1898/99, Heft 7.

jungmiocänen terrestren und lacustren Tertiärschichten dieses Gebietes mit eingesunken sind, oder sich erst nachher in der Senke abgesetzt haben. Die mittelmiocänen marinen Ablagerungen, die im Osten des Einbruchfeldes eine große Verbreitung haben, fehlen in diesem selbst gänzlich. Man wird annehmen müssen, daß der Boden während der mittelmiocänen Periode im Westen höher lag als im Osten und daß er dadurch dem im Osten weithin sich ausdehnenden Meere hier seine westliche Grenze setzte. Heute aber ist das Verhältnis ein umgekehrtes, und die miocänen marinen Schichten der Ortenburger Gegend liegen orographisch höher als die Süßwasserablagerungen im Westen. Es erscheint deshalb wahrscheinlich, daß der Donaueinbruch zwischen Pleinting und Regensburg jünger als die obermiocänen Schichten ist.

V. Die Ortenburger Überschiebung.

Um die geologische Erforschung dieses Gebietes haben sich hauptsächlich von Ammon[1]), J. G. Egger[2]) und Gümbel bemüht.

Von Pleinting an gegen Osten greift der Granit des nördlichen Waldgebirges durchweg über die Donau herüber und die Südgrenze seiner oberflächlich sichtbaren Verbreitung innerhalb Bayerns reicht bis Söldenau bei Ortenburg, Fürstenzell und Schärding am Inn. Orographisch tritt jedoch diese Südgrenze ganz und gar nicht hervor. Langsam verschwindet der Granit unter einer alle Höhen bedeckenden mächtigen diluvialen und jungtertiären Decke, er ist meist nur in den Tälern noch sichtbar und verliert sich auch da, je weiter man die wenig tief eingeschnittenen Täler südwärts heraufgeht. Aber ab und zu findet man statt des Granites oder Gneises an den Talgehängen auch etwas Jura und Kreide anstehen; man würde sie meist gar nicht erkennen können, wenn sie nicht durch Steinbrüche aufgeschlossen wären hauptsächlich zur Gewinnung des Kalk-

[1]) Die Juraablagerungen zwischen Regensburg und Passau. München 1875.

[2]) Der Jurakalk von Ortenburg. I. Jahresber. d. naturhist. Ver. zu Passau 1857.

steines, der in jener Gegend so selten ist, daß man früher, als es noch keine Eisenbahn gab, ihn selbst an Orten abbaute, wo sich heute der Betrieb nicht mehr rentieren kann und die Brüche infolge davon schon längst wieder eingegangen und von Wald überwachsen sind (siehe Taf. II).

Paläontologisch nachgewiesen ist die obere Kreide, der weiße Jura und Dogger. Lias und Trias sind hier unbekannt. Die obere Kreide liegt, wo immer ihre Unterlage aufgeschlossen ist, auf dem weißen Jura aber diskordant, denn von den obersten Horizonten des Jura fehlen stets einige und die untere Kreide ganz. Vom Dogger, der unter dem weißen Jura liegt, kennt man nur die oberen Horizonte, denn vom Eisensandstein sind nur an einer Stelle kümmerliche Reste gefunden worden.

Gümbel hat angenommen, daß diese kleinen isolierten Sedimentinseln die von der Erosion verschont gebliebenen Überreste einer weiten Decke seien, die sich einstmals über das ganze granitische Grundgebirge ausgedehnt habe. Von Nordwesten her habe das Jurameer bis hierher infolge einer Transgression, die aber erst in der Doggerperiode einsetzte, gereicht, so daß triasische und liasische Sedimente hier nicht abgesetzt worden seien. Jetzt liegen nach ihm die jurassischen und kretazischen Schichten hier „vielfach in verstürzten Lagen gleichsam zwischen dem alten kristallinischen Untergrundgestein eingeklemmt“.

Merkwürdigerweise jedoch ist in dem ganzen Gebiete keine einzige Stelle bekannt, wo der Jura auf dem Granit liegt, und selbst da, wo beide Gesteinsarten ganz dicht aneinander herantreten, ist von einer Überlagerung nichts zu sehen. Das ist aber um so befremdender, als es zahllose Stellen gibt, die die Überlagerung des Granites durch Tertiär, oder des Juras durch die Kreide oder das Tertiär in unzweideutigster Weise zeigen. Dazu kommt noch, daß der Jura oder die Kreide häufig oragraphisch im gleichen oder sogar einem tieferen Niveau wie der Granit liegen. ohne daß eine muldenförmige Einbiegung nachweisbar ist. Ich will versuchen für die Orte, welche ich in zweitägiger Exkursion in diesem Winter noch besuchen konnte, eine kurze Beschreibung und tektonische Deutung zu geben.

1. Der Jura bei Zeitlarn.

Von den drei Aufschlüssen, die von hier beschrieben worden sind, ist nur einer — der sog. Meßmerbruch, oberhalb der Blümelmühle — noch gut. Er liegt neben der Fahrstraße Vilshofen-Zeitlarn. Der dickbankige Kalk gehört dem unteren weißen Jura an bis herauf zum Kieselnierenkalk. Die Bänke gehen bis zur Talsohle herab, sind in einer Mächtigkeit von nur einigen Metern aufgeschlossen und neigen sich ganz schwach nach West. Darüber liegt mächtiger diluvialer Lehm, der für die Ziegelei Gallinger gewonnen wird.

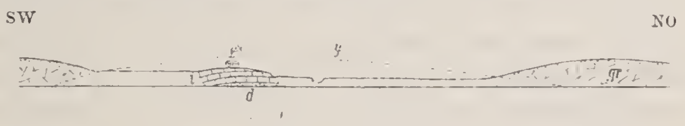


Fig. 2. 1 : 10000.

Unter der Zeitlarner Brücke sah man früher besser als heute am Ufergehänge der Wolfach den Dogger anstehen. Seine Schichten fallen mit 20° nach Osten.

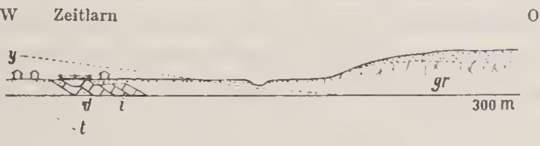


Fig. 3. 1 : 10000.

Zwischen da und dem Meßmer Bruch, aber näher bei der Brücke, liegt der Föckerer Bruch, jetzt ganz verschüttet, mit oberem Dogger und unterem Malm. Die Bänke sind mit 15° nach Osten geneigt.

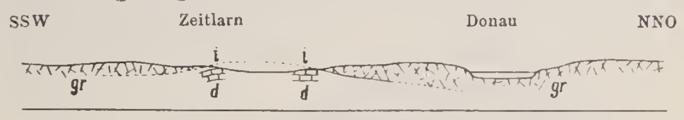


Fig. 4. 1 : 50000.
Zeichenerklärung für Fig. 2—4. gr Granit, t mutmaßliche obere Grenze der Trias, d Dogger, m Malm, y Überschiebungsfläche.

Die drei Aufschlüsse zusammen geben das Bild eines NS streichenden flachen Gewölbes, dessen Achse mit dem Tal der Wolfach gleichgerichtet ist, während der Ostflügel nach Osten

und der Westflügel nach Westen geneigt ist. An den höher gelegenen beiderseitigen Talgehängen sollte man mithin die im Tal fehlenden oberen Malm- und Kreideschichten dieses Gewölbes erwarten. Statt dessen trifft man dort den Granit und dieser kommt rings um den Zeitlarner Jura herum zum Vorschein, so daß er ihn förmlich umschließt und der Jura auf der Talsohle wie durch ein Granitfenster hervorschaut. Wäre man nicht von dem Gedanken an das höhere Alter des Granites beherrscht gewesen, so hätte man höchst wahrscheinlich schon längst daraus den Schluß gezogen, daß der Granit auf dem Jura liegt und jünger als dieser sei. Für die Annahme eines so jungen Alters fehlt freilich jede Berechtigung, aber es bleibt noch die Möglichkeit übrig, daß der Granit auf den Jura hinübergeschoben worden sei.

Im Meßmerbruch habe ich eine Beobachtung gemacht, die sehr zu Gunsten einer solchen Auffassung spricht. Es war zur Zeit meines Besuches eine fast horizontal liegende Kalkbank der Transversariuszone in Abbau genommen, die von einer N 30 W streichenden und mit 15° nach NO geneigten Rutschfläche (a) durchsetzt war. Sie war sehr gut zu beobachten, weil man den hangenden Teil der Bank auf einer etwa 2 qm großen Fläche entfernt hatte. Die Rutschstreifen hatten die Richtung N 60° O, bedeckten aber die sonst etwas rauhe Ablösungsfläche nur streckenweise. Es war also keine vollständige Glättung eingetreten, was damit in Übereinstimmung steht, daß die gleitende Bewegung ein Ausmaß von nur wenigen Dezimetern gehabt haben kann. Eine zweite ähnliche Ablösungsfläche (b) sieht man auf Fig. 3 unterhalb jener den Kalkstein durchschneiden. Ob auch auf ihr Rutschstreifen vorkommen, ließ sich nicht erkennen.

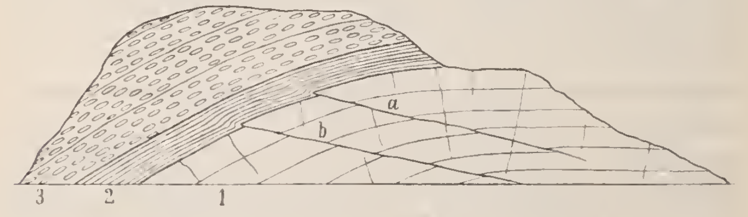


Fig. 5. 1 Spongienkalk, 2 gelblicher Mergel, 3 Kieselknollenkalk.

Der Granit, der rings um den Kalk liegt, ist ebenfalls von zahllosen Klüften durchsetzt, von denen viele oft annähernd parallele Anordnung haben und von ferne dem Gestein den Anschein eines regelmäßig gebankten Sedimentes geben. In der Nähe erkennt man dann freilich immer, daß sie sich in Wirklichkeit doch wenn auch unter spitzen Winkeln schneiden. Erstaunlich bleibt immerhin ihre für die technische Verwertung des Gesteines meist verhängnisvolle Häufigkeit, und sie zwingt uns über ihre Entstehung nachzudenken. In der Regel sind diese Kluftflächen ganz glatt, manchmal zeigen sie auch eine feine Streifung. An der Straße bei Knadlarn sah ich in einem kleinen Steinbruch eine solche Kluft in einer Ausdehnung von 5 qm freigelegt. Sie strich N 15 W und war 43° nach ONO geneigt. Die Streifen fielen nicht mit der Fallrichtung zusammen, sondern liefen in Richtung N 50° O, also ziemlich gleich wie die im Meßmerbruch.

Aus alle dem kann man wohl nicht anders als den Schluß ziehen, daß hier eine Überschiebung des Juras durch den Granit recht wahrscheinlich ist und daß, wenn dem so ist, die Bewegung in nordost-südwestlicher Richtung erfolgt sein muß. Denn wenn auch die Schubfläche selbst nicht zu sehen ist, so erlauben doch die gleichsinnig gerichteten Rutschstreifen in den hangenden und liegenden Teilen diese Folgerung.

2. Der Jura bei Söldenau.

Wenn man den Zeitlarner Jura auf der Wanderung von Vilshofen nach Ortenburg hinter sich zurückgelassen hat, gelangt man wieder in den Granit, den man auf eine Erstreckung von etwa 3,5 km nicht mehr verläßt bis kurz vor dem Gute Dötter. Da hört er auf der rechten Talseite auf und setzt nur auf der linken noch eine kleine Strecke weiter nach Süden fort. Das ist der südlichste Punkt, bis zu dem der Granit über Tag im Tal der Wolfach reicht.

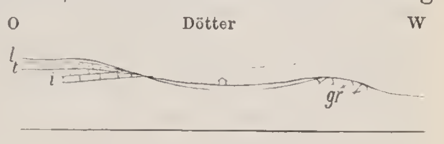


Fig. 6. gr Granit, i Kieselknollenkalk des Malm, t marines Miocän, l diluvialer Lehm.

Gleich hinter dem Gute Dötter liegt ein großer Kalkbruch in dem sanft ansteigenden Talgehänge eingesenkt. Unter dem Lehmboden und einer mehrere Meter mächtigen mittelmiocänen marinen Sandablagerung wird Weiß-Jurakalk abgebaut, der undeutlich gebankt und stark zerklüftet ist. Er fällt schwach gegen Osten ein. Wenn man die Schichtflächen des Jura gegen Westen in der Luft verlängert, dann ergibt sich die Möglichkeit, daß der Jura normal auf dem an der Straße anstehenden Granit gelegen habe. Aber für die im Liegenden des Kieselkalkes zu erwartenden Schichten des untersten weißen Jura, des Doggers, des Lias und der oberen Trias bleibt nicht Raum genug. Man könnte sich zwar mit der Annahme helfen, daß Lias und Trias hier nicht mehr zum Absatz gelangt waren, aber auch dann bliebe die Tatsache bestehen, daß die wirkliche Auflagerung des Jura auf dem Granit durch keine einzige Beobachtung gestützt werden kann.

Die Kieselkalke des weißen Jura (Bimammatuszone) sind vom Dötter bis Söldenau auf eine Erstreckung von ungefähr 2 km durch eine Reihe von Brüchen erschlossen und in einem der Brüche wurde das Einfallen der Bänke mit 15° nach OSO gemessen. Neben dem Kieselkalk stellen sich gegen Süden noch die Tenuilobatuskalke, an einer Stelle auch etwas Dolomit ein und am Schafbach oberhalb der Rohrner Mühle steht darüber die Kreide an. Marine miocäne Sande bedecken diskordant die ganze Schichtserie.

Die tektonischen Beziehungen des Jura zum Granit bleiben somit zwar bei Söldenau unaufgeklärt, aber wenn man seinen Beziehungen zum Zeitlarner Jurasattel nachforscht, dann erscheint es sehr wohl möglich, daß er dessen südliche Fortsetzung darstellt, die, nachdem sie zwischen Zeitlarn und dem Dötter unter dem Granit verschwunden ist, bei Söldenau wieder zum Vorschein kommt.

3. Der Jura im Hausbachtälchen.

In der Nähe der Lipperthöfe liegen auf der Sohle des Wiesentälchens zwei kleine Kalkbrüche, die schon vor mehr als 60 Jahren aufgelassen wurden und jetzt so verwachsen sind, daß ich Mühe hatte, sie wieder aufzufinden. Man hat den Kieselnierenkalk abgebaut, der von Kreide überlagert war. Etwas unterhalb steht am rechten Talgehänge Granit an, der sich bis Hausbach an der Donau hinzieht und halbwegs ein Marmorlager einschließt. Wahrscheinlich lagen die Juraschichten nicht horizontal, sondern waren steil aufgerichtet, weil es sonst unerklärlich wäre, daß wenige Schritte oberhalb (s. Egger, l. c., S. 11) schon Kreide angetroffen wurde und die tertiären versteinerungsreichen Sande diskordant sowohl auf Kreide als auf Jura lagen.

Die tektonischen Beziehungen des Jura zum Granit haben große Ähnlichkeit mit denen bei Münster und Flintsbach. Jura und Kreide sind dem Granit vorgelagert und fallen von ihm ab.

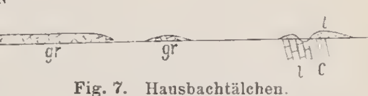


Fig. 7. Hausbachtälchen.

4. Der Jura am Kalchberg bei Unter-Voglarn.

Hier befindet sich in einem großen, noch in Betrieb stehendem Bruche der beste Aufschluß der ganzen Gegend für den Jura und seinen Kontakt mit dem Granit. Der Kontakt ist zwar gegenwärtig nicht mehr aufgeschlossen, aber er war es vor etwa 50 Jahren und wurde von Egger sehr genau beschrieben. Der Bruch ist seit dieser Zeit sehr vergrößert worden, aber man baut den Kalkstein nicht mehr, wie es früher geschah, bis zur Kontaktfläche ab, wohl weil der mürbe Granit in hohen Wänden nicht feststeht und den Bruch durch Abrutschung bedrohen würde.

Die stratigraphischen Verhältnisse sind durch Egger und von Ammon klargelegt worden. Die Kreide liegt im Süden des Bruches an der Talsohle horizontal. Am Südhang des Kalchberges sind die Mergelplatten steil aufgerichtet. Ob diese Aufbiegung eine kontinuierliche ist und wie die Kreide mit dem

Jura in Verbindung tritt, weiß ich nicht. Diese beiden Stellen habe ich deshalb auf der beistehenden Figur weiß gelassen. Die Folge der Juraschichten ist diese:

über 6 m Kieselnierenkalk der Bimammatusstufe,
etwa 3 „ kieselfreier Transversariuskalk,
„ 0,3 „ glaukonitischer Biarmatuskalk,
„ 2,2 „ oolithischer Crinoideenkalk des Kelloway,
„ 0,3 „ rötlicher Quarzsandstein, wahrscheinlich Eisensandstein des unteren Doggers.

Diese Schichten stehen im Bruch teils saiger teils sind sie überkippt und fallen mit 80° nach NO ein. Auf ihren Schichtköpfen liegt diskordant und horizontal ein mächtiges Lager von tertiärem Quarzsand.

Der Granit, von Egger und Gümbel als Gneis bezeichnet, ist heute nicht mehr unmittelbar hinter dem Dogger, sondern erst in einer Entfernung von mehreren Metern am Talgehänge anstehend zu sehen. Egger hat 1856 beobachtet, daß, als man die hinterste Bank des überkippten Juras durchschlug, dahinter ein fein zerriebener mulmiger dunkelbrauner Sand lag, der Butzen und Schnüren von weißem Kalkmulm und Kalkbrocken einschloß und polierte Rutschflächen zeigte. Er betrachtete ihn, wohl mit vollem Recht, als auf einer Verwerfungsspalte liegend, die den Jura von dem Granit trennt, und als durch diese Verwerfung selbst erzeugt. Der Sand mag aus der Zerreibung jener dünnen Sandsteinbank des unteren Doggers hervorgegangen sein, die damals jedoch als anstehend Egger noch nicht bekannt war und erst später aufgeschlossen wurde.

Egger schloß (l. c., S. 9) aus seinen Beobachtungen, daß konstanter Druck von West her Jura und Kreide gegen ihnen entgegenstehende Gneisfelsen emporgedrängt und geschoben habe, und daß dabei die untere Oolithschicht an den härteren Urgebirgsschichten abgerieben wurde.

Seine Zeichnung des Bruches, wie er damals vor einem halben Jahrhundert aussah, ist wegen der Genauigkeit, mit der alle Details eingetragen sind, von dauerndem Wert. Weniger

glücklich war Gümbel[1]) mit den Ansichtszeichnungen, die er 1868 und später in etwas veränderter Form (1891) veröffentlicht hat. Man glaubt eine Mulde von Juraschichten und in deren Mitte als innersten Kern Gneis zu sehen. Da aber dieser zu oberst und alle Juraschichten in verkehrter Reihenfolge darunter liegen, so gibt dies das Bild eines vollständig auf den Kopf gestellten Gewölbes. Um das Irreleitende dieser Zeichnungen aufzuklären, habe ich auf Grund eigener Untersuchungen ein Querschnittprofil entworfen, aus dem man die tatsächlichen Beziehungen des Jura zum Granit leichter erkennen kann. Die Gesteinsbänke streichen durchschnittlich N 60 W, stehen saiger bis überkippt und werden von zahlreichen Klüften in den ver-

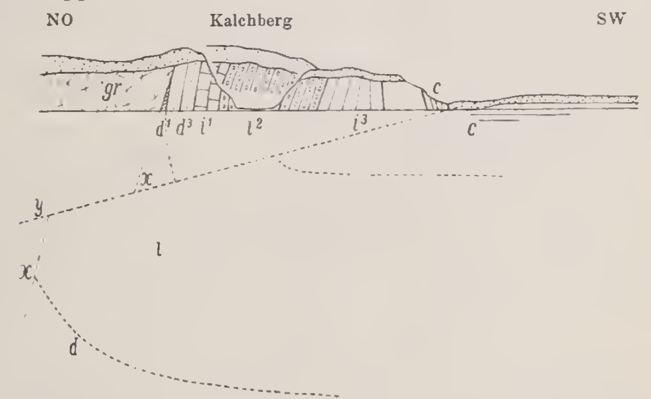


Fig. 8. gr Granit, d¹ Eisensandstein, d³ oberer brauner Jura, i¹ Biarmatus- und Transversariuskalk, i² Kieselnierenkalk, c obere Kreide, x Verwerfungsspalte, y mutmaßliche Überschiebung. 1 : 1000.

schiedensten Richtungen durchsetzt. Ich maß solche mit O—W und N 30° W-Streichen, deren geglättete Oberflächen von teils horizontalen teils bis zu 45° geneigten Rutschstreifen bedeckt waren. Es haben somit Bewegungen der einzelnen Gesteinsschollen in verschiedenen Richtungen stattgefunden, und so erklärt es sich, warum die Regelmäßigkeit der Bankung stellenweise verloren gegangen und eine grobbrecciöse Struktur entstanden ist. Ursächlich hängt dieser Vorgang sicher mit der

---

[1]) Geognostische Beschreibung des ostbayerischen Grenzgebirges, 1868, S. 695 und Geologie Bayerns, Bd. II (1891), S. 371.

Aufrichtung und Überkippung der Schichten zusammen, ebenso wie auch die von Egger auf der Kontaktfläche mit dem Granit beobachtete Mulmschicht.

Die Deutung, welche Gümbel gegeben hat, der darin nur eine lokale, durch große Unterwaschungen erzeugte Überstürzung sehen wollte, bedarf keiner Widerlegung, da, ganz abgesehen von ihrer Unwahrscheinlichkeit, Beweise dafür nicht vorgebracht worden sind. Eggers Deutung hingegen mutet ganz modern an, da die von ihm zu Hilfe genommene Pressung offenbar als eine horizontale gedacht war.

Das in Fig. 8 gegebene Profil beschränkt sich nicht nur auf Darstellung des tatsächlich Beobachteten, sondern versucht durch gestrichelte Linien auch noch die Lagerung der Schichten herab bis 40 m unter der Erdoberfläche zu erraten. Dabei ist es notwendig, gewisse Voraussetzungen zu machen, die nun zunächst besprochen werden sollen.

Der Dogger, soweit er im Steinbruch aufgeschlossen worden ist, kann noch nicht die unterste Lage der Sedimentdecke in dieser Gegend sein, weil er, abgesehen von den 0,3 m Sandstein, frei von klastischem Material ist, also keine Spuren der Meereserosion zeigt, die bei einer Transgression des Doggermeeres über ein granitisches Festland unbedingt hätte in Tätigkeit treten müssen. Da bei Straubing unter dem Jura noch Triasabsätze liegen, so kann die Möglichkeit jedenfalls nicht bestritten werden, daß die Triastransgression auch bis Voglarn gegangen ist. Von Regensburg her wissen wir, daß der Eisensandstein bis 25, der Opalinuston bis 10, der Lias etwa 15 und der Keuper sicher 40 m Mächtigkeit hat. Wir sind dort ebenfalls ganz am Rande des Granitgebirges und somit kann ähnliches auch bei Voglarn der Fall sein. Es ist also möglich, daß unter der horizontal gelagerten Kreide im Süden des Kalchberges außer dem weißen Jura mit 30—40 m noch 90 m ältere Sedimente liegen und erst darunter der Granit folgt. Ob die steilen Kreideplatten am Kalchberg dasselbe Alter wie die an sie anstoßenden horizontalen haben, wissen wir nicht. Möglicherweise sind sie älter — es wäre sehr wünschenswert palä-

ontologische Beweise dafür oder dagegen zu sammeln — dann wäre eine schwach geneigte Überschiebungsfläche zwischen beiden anzunehmen und der Jura unter der horizontalen Kreide könnte in einer bedeutenderen Tiefe liegen. Während der Granit im NO noch mehrere Meter über die Talsohle heraufreicht, würde er in SW danach in einer Tiefe von mindestens 50, vielleicht aber auch von 140 und noch mehr Metern zu suchen sein.

Daraus muß der Schluß gezogen werden, daß die Kontaktfläche die Bedeutung einer echten Sprungfläche hat, auf der die Jurasedimente in die Tiefe gesunken sind. Diese Verwerfungsspalte war damals vielleiht saiger oder nach SW geneigt, und erhielt ihre Neigung nach NO, mit der ich sie ins Profil eingezeichnet habe, erst später als der Granit gegen den Jura gepreßt und dabei die beim Absinken geschleppten Ränder der Juraplatte nun noch stärker umgeschlagen wurden. Da jedoch der Widerstand, den die Juraschichten leisten konnten, an deren Oberfläche sicher geringer war als in der Tiefe, so mag es gekommen sein, daß die Zerreißung auf y und damit eine schnellere und größere Bewegung in den hangenden Schichten eintrat.

5. Schlußfolgerungen.

Die Ergebnisse der vorausgehenden vier Abschnitte lassen sich kurz in einige Sätze zusammenfassen:

1. Das Liegende der Jura- und Kreidevorkommnisse in der Ortenburger Gegend ist unbekannt. Wir wissen nicht, ob der unterste Dogger, der Lias und die Trias daran in ähnlicher Weise teilnehmen, wie dies bei Straubing und Regensburg der Fall ist. Aber es ist wahrscheinlich, daß in einer gewissen Tiefe unter dem oberen Dogger, die zwischen wenigen bis etwa 100 m schwanken kann, der granitische Boden liegt, auf dem die Kreide-, Jura- und Triassedimente zum Absatz gekommen sind.

2. Diese Sedimentplatte ist längs einer südöstlich streichenden Verwerfungsspalte, die sich von Münster über Flintsbach, Lippert bis zum Kalchberg bei Unter-Voglarn verfolgen läßt,

in die Tiefeab gesunken. Soweit als diese Sedimente ursprünglich auch im NO dieser Spalte auf dem Granit des Waldgebirges ausgebreitet waren, sind sie nachträglich wegen ihrer höheren Lage der Erosion zum Opfer gefallen, während sie im Abbruchgebiet erhalten blieben und nur stellenweise die obersten Teile der Kreide oder auch diese ganz und noch oberste Teile des Juras entfernt wurden.

3. Erst nach diesem Abbruch erfolgte ein Gebirgsschub aus NO, der besonders in den oberen Teilen des Gebirges flache Zerreißungsspalten, und auf diesen Überschiebungen des Granites über die eingesunkene Juraplatte erzeugte. Zwischen Söldenau und der Donau läßt sich (s. Taf. II) die Schubweite auf 4 km berechnen. Zugleich wurden die Juraschichten an der älteren Abbruchspalte durch diese Gebirgsbewegung zusammengepreßt, aufgerichtet und sogar überkippt.

4. Nach dieser Überschiebung erfolgte in mittelmiocäner Zeit von SO her eine Transgression des Meeres, das bis über Ortenburg, aber nicht über Pleinting hinaus vordrang und seine Sedimente auf der granitischen Schubdecke und, soweit das basale Jura-Kreidegebirge noch oder wieder frei lag, auch auf diesem seine Sedimente absetzte. Ehe diese Transgression eintrat, muß derjenige Jura, welcher normal auf der granitischen Schubdecke gelegen hat, durch Erosion schon entfernt gewesen sein.

5. Da die Überschiebung jedenfalls erst nach Ablagerung der senonen Kreide, die Meerestransgression aber nicht vor der mittelmiocänen Zeit sich ereignet haben können, so ist damit der Zeitraum umgrenzt, in den jene abtragende Wirkung der Erosion zu verlegen ist.

6. Erst nach dem Rückzug des mittelmiocänen Meeres ist der im Kapitel IV beschriebene Donauabbruch zwischen Pleinting und Regensburg eingetreten und so ist es gekommen, daß die Stirn der granitischen Überschiebungsdecke bei Ortenburg noch im ununterbrochenen Zusammenhang mit dem Rumpf der Schubmasse steht, während sie im Westen von Pleinting sich so weit in die Tiefe gesenkt hat, daß nur noch einige Spitzen derselben bei Künzing und Natternberg aus der Donau-

niederung aufragen, während sie bei Straubing in der Tiefe begraben liegt und erst durch die Unterharthofener Bohrung bei 700 m Tiefe entdeckt werden konnte.

VI. Die Keilberger Randspalte.

Die Abbruchspalte, die wir von Münster bis zum Kalchberg verfolgt haben, begleitet ohne Zweifel gegen Westen den heutigen orographischen Südrand des Waldgebirges bis Tegernheim, biegt dort aber nach Norden um, und läuft über Keilberg nach Regenstauf. Die Gleichartigkeit der tektonischen Verhältnisse, die auf dieser ganzen Strecke herrscht, scheint mir ein genügender Beweis für ihre Zusammengehörigkeit zu sein.

Mit der Teilstrecke Tegernheim-Regenstauf hat sich zuletzt Pompeckj[1]) eingehend beschäftigt. In Ermangelung einer zuverlässigen topographischen Karte mußte er leider darauf verzichten, seinen gründlichen stratigraphischen Feststellungen eine geologische Karte beizugeben und konnte die Erläuterung der Tektonik nur durch Profilzeichnungen geben. Er nahm an, daß die Keilbergspalte bei Tegernheim rechtwinkelig auf die Donauabbruchspalte stößt und daß sie von Tegernheim bis Irlbach rein nördlich, von da aber bis Regenstauf in nordnordwestlicher Richtung verläuft. Er zeigte, daß die Juraschichten im Westen der Spalte bis zum Wutzelhofener Trockental starke Störungen erfahren haben, während sie weiter im Westen flach und nur wenig gestört liegen. Diese Störungen machen sich durch zahlreiche Klüfte bemerkbar, die mit Rutschstreifen bedeckt sind und die ganze Gesteinsmasse oft so zerspalten, daß sie ein breccienartiges Aussehen erlangt wie z. B. besonders am Schnaiterhof, daß Fallwinkel und Streichrichtung der Gesteinsbänke häufig wechseln, der Kalkstein durch ein enges Netzwerk von Bruchflächen zertrümmert (Keilberg) und die darin eingeschlossenen Versteinerungen in einzelne, um etwas auseinander geschobene Teile zerbrochen sind. Die sonst

---

[1]) Die Jura-Ablagerungen zwischen Regensburg und Regenstauf Geognostische Jahreshefte 1901, XV. Jahrgang.

stets mehr oder weniger steil aufgerichteten Schichten sind am Galgenberg bei Regenstauf sogar überkippt und von zahllosen Klüften mit Rutschflächen, meist vertikal zu den Schichtflächen, durchsetzt. Die einzelnen Teile sind um kleine Strecken gegen Südwest verschoben und dabei wurden die Rutschstreifen auf den Kluftflächen erzeugt. Oft stehen diese Verschiebungsklüfte so dicht und parallel nebeneinander, daß es den Eindruck macht, als wäre der harte Werkkalk transversal geschiefert (l. c., S. 165 und 216).

Die Erklärung für diese Störungen sucht Pompeckj als eine Folge des Einsinkens der Juraplatte auf der Keilberg-Randspalte darzustellen. Die Sprunghöhe dieser Verwerfung, obwohl sie „nicht gut festzustellen ist", schätzt er gleichwohl auf 14—1500 m. Er berechnet sie aus der Höhendifferenz zwischen dem Gipfel des Hohen Arber (1458) und der Höhe (320 m), welche am Keilberg die Basisfläche des Jura hat. Das Einsinken eines keilförmigen Rindenstückes um 1500 m, dies muß man zugeben, kann gewiß einen starken horizontalen Druck erzeugen. Pompeckj hält ihn für ausreichend, um am Keilberg (l. c., S. 74, Fig. 5) die Kürzung des 2500 m langen Querschnittes um 200 m zustande zu bringen.

Ich kann dieser Erklärung schon aus dem Grunde nicht zustimmen, weil mir die Sprunghöhe überschätzt zu sein scheint. Der Hohe Arber liegt beinahe 70 km von der Randspalte entfernt, ob über ihm die Juradecke jemals ausgebreitet lag, ist ganz unsicher und auch wenn dies der Fall gewesen sein sollte, so würde dies noch immer nicht beweisen, daß sie zur Zeit des Einbruches überall im Westen noch diese Höhe hatte. Auch wäre es denkbar, daß der Hohe Arber seine heutige Höhenlage erst durch Krustenbewegungen erlangt habe, die nach dem Juraeinbruch stattfanden. Jedenfalls aber steht es fest, daß neben der Keilberg Randspalte das Granitgebirge nirgends die Höhe von 500 m überschreitet und wenn wir die zunächst gelegene Stelle aufsuchen, wo auf diesem Granit die Sedimentdecke noch erhalten ist, dann liegt sie in einer Entfernung von nur 16 km bei Asang südlich von Nittenau in der Bodenwöhrer Bucht in einer Meeres-

höhe von 490 m. Es sind obertriasische Schichten, die in ihren Hangenden den Jura tragen. Die Auflagerungsfläche senkt sich von Asang nordwärts bis Steinberg um 90 m, und wenn wir sie mit dieser Neigung südwärts bis zum Keilberg verlängern, dann würde sie dort eine Höhe von etwa 600 m erreichen. Für die im Westen abgesunkene Juratafel ergäbe das also eine Sprunghöhe von nur ungefähr 400 m. Doch dieser Betrag gilt nur für den Keilberg. Gegen Norden muß er noch geringer werden. Denn schreitet man von Steinberg westwärts bis zur Randspalte, dann läßt sich höchstens noch eine Sprunghöhe von 160 m ausrechnen.

Ein solcher Einbruch war keinenfalls imstande, den Horizontalschub zu erzeugen, der am Keilberg nachgewiesen ist. Es kommen dort aber noch andere Erscheinungen in Betracht, die dagegen sprechen und eine andere Erklärung verlangen.

Das Vorwärtsschreiten des Abbaues in der Tegernheimer Tongrube, die gerade auf der Keilberger Randspalte liegt, hat in neuerer Zeit wichtige Aufschlüsse gebracht, die mir schon bei einem Besuche der Grube im Jahre 1908 die Überzeugung gaben, daß die tektonischen Bewegungen nicht aus einem einfachen Absinken des Jura im Westen der Spalte erklärt werden können. Ich habe deshalb diese Grube am 23. Dezember 1910 nochmals besichtigt und dabei den Grundriß und die Profile entworfen, die in Fig. 9 und 10 wiedergegeben sind. Der Grubenplan soll nur die Situation im allgemeinen geben und macht keinen Anspruch auf besondere Genauigkeit in den Horizontaldimensionen. Denn ich hatte keine anderen Meßinstrumente als den bergmännischen Kompaß bei mir.

Der Eisensandstein ist hier ziemlich mächtig, streicht N 40°—50° W und fällt mit 10—25° nach SW ein. Er liegt konkordant auf dem Opalinuston, der zur Herstellung von Zement gewonnen wird und zur Zeit in einer Mächtigkeit von ungefähr 12 m erschlossen ist. Sein Liegendes ist aber noch nicht erreicht, denn gegen NO, wo dieses zu erwarten wäre, stoßen seine Schichtköpfe an einer senkrechten Wand ab, die aus ganz steil gestellten braunen und zum Teil oolithischen, stark eisen-

haltigen Mergeln aufgebaut ist. Diese Mergel fallen zumeist mit 80⁰ nach SW ein, aber die Grenzfläche gegen den Opalinuston steht saiger und streicht N 40⁰ W. Sie ist also eine wirkliche Verwerfungskluft und das erklärt auch das Fehlen des obersten Lias, nämlich der Zone des Grammoceras Aalense. Die Versteinerungen in dem braunen Mergel verweisen nur auf die tiefere Zone des Coeloceras crassum[1]). Sie haben im Maximum eine Mächtigkeit von 4 m, keilen sich aber im Hintergrund der Grube ganz aus. Etwas oberhalb des Brückenpfeilers war zur Zeit meines Besuches eine weitere Unregelmäßigkeit zu beobachten, die darin bestand, daß der Opalinuston mit einer etwa 15 m breiten Zunge in den Liasmergel vorsprang. Unterhalb der Brücke wurde auf der Ostseite der Grube der Opalinuston gerade an einer Stelle abgebaut, wo er bei einem Streichen von N 40 W mit 45⁰ nach SW einfiel. Aber nach oben legten sich diese Schichten alle etwas flacher, fielen also weniger steil nach SW.

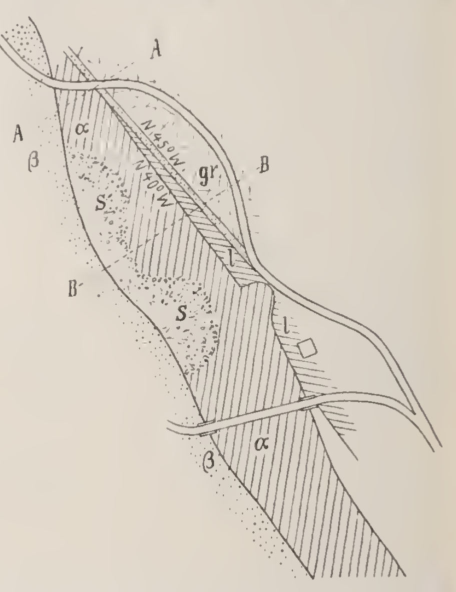


Fig. 9. Grundriß der Tegernheimer Tongrube. 1:2000. gr Granit, l oberer Lias, α Opalinuston und β Eisensandstein des unteren Dogger.

An den braunen Liasmergel legt sich auf dessen NO-Seite eine steile Wand von weißem Quarzsandstein und bunten Letten

[1]) Die vielen Ammonitenarten, die Pompeckj von dort beschrieben hat, wurden seinerzeit nur da gefunden, wo im Norden der Brücke behufs Anlage eines in die Grube führenden Weges das Terrain abgetragen wurde. Seitdem findet man fast nur noch Belemniten, die aber sehr häufig sind.

an, die ich nach ihrer petrographischen Beschaffenheit schon zu Trias stelle. Sie haben zusammen nur eine Mächtigkeit von bis 1 m, stehen ganz vertikal und streichen N 45 W. Im

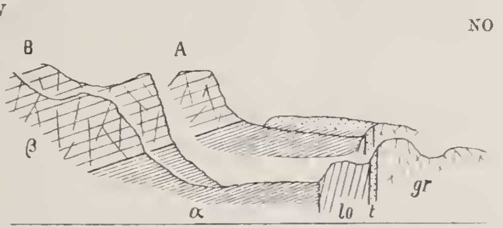


Fig. 10. Zwei Profile durch die Tegernheimer Grube bei AA und BB der Fig. 9. 1 : 2000.

Streichen machen sie mit dem Liasmergel einen spitzen Winkel und das ist die Ursache, weshalb sie diesen im Norden abschneiden und an dem kleinen Fahrweg, der an der Nordkante der Grube vorbei nach Keilberg führt, in unmittelbaren Kontakt mit dem Opalinuston treten.

Diese dünne Triasmasse lehnt sich mit ihrer NO-Seite an den Granit an, der sehr stark zersetzt und bisher merkwürdigerweise in der Literatur als Rotliegendes angeführt worden ist. Durch den Grubenbau ist er in einer ein paar Meter hohen Wand freigelegt, an der noch einige Fetzen des Triassandsteines kleben, die in den stark zersetzten Granit zum Teil sogar hineingepreßt sind. Auch die Grenzfläche zwischen Granit und Trias ist saiger und streicht N 45° W.

Diese Verwerfungsspalten lassen sich über die Grube hinaus mangels Aufschlüsse nicht weiter nachweisen, daß sie aber in dieser Richtung noch eine Strecke von über 200 m weiterziehen, beweisen die zahlreichen Lesestücke von Granit und weißem Quarzsandstein, die am Ausgang eines kleinen Waldtälchens halbwegs zwischen der Grube und den untersten Häusern von Keilberg herumliegen. In dem tief eingeschnittenen alten Hohlwege, der etwa 100 m östlich dieser Stelle durch den Wald in nördlicher Richtung bergauf führt, ist der Granit ebenfalls und zum Teil noch als festes hartes Gestein aufgeschlossen. Es ist von Klüften vielfach durchsetzt und macht den Eindruck eines stark gepreßten Gesteines. Weiter oben, wo sich dieser

Hohlweg gabelt, steht ein eigentümlicher Schiefer an, wobei man im Zweifel bleibt, ob er ein Einschluß im Granit oder ein durch mechanische Kräfte stark beeinflußter schieferiger Granit ist. Die Schieferungsflächen sind nach SW geneigt.

Schlägt man von diesem Schiefer weg den linksseitigen Waldweg ein, so vermißt man zunächst Aufschlüsse, bald aber liegen weiße Quarzsandsteine in Menge herum und damit hat man offenbar die Keilberger Randspalte, die wir am Ausgang jenes kleinen Waldtälchens verlassen hatten, wieder erreicht. Die Stelle liegt von dieser ungefähr 400 m entfernt und zwar gegen Norden, doch konnte ich, da mir die Katasterblätter nicht zur Hand waren, den Punkt auf der Generalstabskarte nicht genau festlegen.

Immerhin ist es sicher, daß die Randspalte, die von Tegernheim aus zuerst eine nordwestliche Richtung hatte, nun in eine ziemlich rein nördliche Richtung umgeschwenkt ist. Von den zwei weiteren Fixpunkten, die ich für die Westgrenze des Granites finden konnte, liegt der eine 150 m östlich von den nördlichsten Häusern Keilbergs da, wo ein Quellschacht einen Aufschluß gab, und der andere unweit Grünthal, wo man nach Lesestücken auf den Feldern suchen muß.

Beide Punkte liegen auf einer NS gerichteten Linie, auf deren südliche Fortsetzung auch die zwei vorher beschriebenen Punkte fallen, während deren nördliche Fortsetzung nach Irlbach führt, zwischen dem dortigen Liassteinbruch und dem östlich davon am Waldgehänge anstehenden Granit hindurch. Von Irlbach zieht sich die Randspalte nach Pompeckj in Richtung N 30 W nach Regenstauf, aber ebenfalls nicht schnurgerade, sondern in einer Zickzacklinie. Von Regenstauf nach Schwandorf ist sie zumeist unter jüngeren Ablagerungen versteckt und wo sie sich an dem Talgehänge im Westen der Naab bei Wieselsdorf wieder bemerkbar zu machen scheint, hat sie an Sprunghöhe bereits bedeutend abgenommen.

Aus all diesen Tatsachen geht unzweifelhaft hervor, daß die Schichtstörungen an der Keilbergspalte nicht der Art sind, daß sie einfach als Schleppungserscheinungen gedeutet werden

könnten, die beim Absinken des Juraplateaus an jener Spalte entstanden wären. In der Tegernheimer Grube liegt der sichtbare Lias vielleicht nur um einige Meter höher als der, welcher das nicht aufgeschlossene Liegende des Opalinustones bildet. Wie aber sollte die geringe Senkung von nur wenigen Metern imstande gewesen sein, dem geschleppten Teil eine senkrechte Schichtstellung zu geben? Warum ferner fehlt in den geschleppten Teilen der mittlere Lias und am Nordende der Grube sogar der ganze Lias? Am Galgenberg bei Regenstauf müßte die Steilstellung der gesamten Jura- und Kreideschichten dann auch als Schleppung aufgefaßt werden, aber die wirklich dort eingetretene Überkippung bliebe dabei ganz unverständlich. Verständlich werden diese in schmalen Streifen aufgerichteten Sedimentschichten zwischen dem Granit im Osten und der Juraplatte im Westen erst durch die Annahme, daß der Granit fest gegen den Jura, nachdem dieser schon abgesunken war, herangepreßt wurde, so daß sich seine Ränder wie bei Regenstauf umstülpten und aufrichteten, und daß sodann der Granit sich auf der Verwerfungsspalte gegen Süden hinschob und dabei Teile der aufgerichteten Schichten abriß und mit sich schleppte. Also nicht als Schleppung bei vertikalem Absinken des Jura, sondern als Schleppung bei horizontaler Verschiebung des Granites auf jener Spalte deute ich diese Störungen längs der Keilberger Randkluft. Damit in voller Übereinstimmung stehen sowohl die drei nordsüd-streichenden Verwerfungen, welche nach Pompeckj im Westen der Randkluft den Keilberg durchschneiden, als auch die horizontalen Rutschstreifen, die Professor Grabau aus New-York auf einer ungefähr NS gerichteten Verwerfungsspalte im Kalk des Keilberger Steinbruches an der Walhallastraße am 28. Oktober 1910 beobachtet hat. Ich hatte ihn, da mir damals schon die Straubinger Bohrergebnisse bekannt waren, gebeten, bei seinem Besuche dieser Gegend auf die Existenz solcher horizontaler Bewegungserscheinungen zu achten und er war so freundlich, mir diesen Fund mitzuteilen, welcher beweist, daß nicht nur auf der Randspalte selbst sondern auch im Gebiet des ganzen Keilberges solche horizontale Schleppungen

stattgefunden haben. Er entdeckte auch in der Tegernheimer Grube selbst auf einer mit Slickenside-Lage bedeckten NW-SO streichenden Kluft im Eisensandstein Rutschstreifen, die zwar nicht ganz horizontal, aber doch nur mit 13° gegen SO geneigt waren.

Es sind also auf der Westseite der Randspalte horizontale Bewegungen durch Rutschstreifen gegen SW am Galgenberg, gegen S und SO am Keilberg sicher nachgewiesen. Sie stehen in Verbindung mit den dortigen Zusammenstauchungen der Juraschichten und mit den Schleppungen auf der Randspalte, und weisen insgesamt auf einen Druck hin, der von dem Granitgebirge auf den Jura ausgeübt worden ist. Die Ursache dieses Druckes wird man wohl in der Bewegung des Granitgebirges suchen müssen, die zu der Überschiebung bei Straubing und Ortenburg führte. Der Widerstand, den die abgesunkene Juraplatte diesem Schub entgegensetzte, war im Süden längs der Donau kein unüberwindlicher und so konnte sich der Granit dort 3—4 km weit über den Jura hinüberschieben. Im Westen hingegen, wo die Randspalte mit der Schubrichtung einen spitzen Winkel bildet, führte dies zu Differenzialbewegungen, deren Richtungen zwischen SO, S, SW und W wechseln. Dem Granit gelang es dabei nicht, den Jura zu überschieben, sondern er schob ihn vor sich her, preßte ihn zu Flexuren zusammen, zerdrückte ihn zu Breccien oder zerriß ihn in Stücke und verschob die einzelnen Teile als solche.

Man kann die Spuren dieser Pressung westwärts noch über den Keilberg hinaus verfolgen. Auf der Westseite des Wurzelhofener Trockentales erheben sich zwischen diesem und dem Regental eine Reihe von Hügel, die aus oberem Jura und Kreide aufgebaut sind. Ihre Schichten sind bei Wurzelhofen nach Pompeckj mit 5° nach WSW geneigt, während sie nach Gümbel bei Sallern mit 10° nach OSO einfallen. Sie haben also die Lage einer flachen Mulde. Man kann somit die Wirkungen des Horizontaldruckes von der Randspalte weg noch in einer Entfernung von ungefähr 5 km deutlich erkennen.

Das Alter der Keilberger Randspalte.

Zur Zeit der Überschiebung war die Randspalte schon vorhanden. Aber man kann Zweifel hegen, ob sie schon vor Ablagerung der jüngeren Kreide oder erst nachher entstanden ist. Eine sichere Entscheidung zu treffen, ist zur Zeit wohl nicht möglich. Doch sprechen verschiedene Tatsachen für ihr vorkretazisches Alter. Die Kreide liegt diskordant auf dem Jura. In der Ortenburger Gegend fehlen von dem weißen Jura meist der größere Teil bis herab zur Bimammatuszone; nur selten sind die Tenuilobatenschichten noch erhalten. Am Keilberg liegt die Kreide direkt auf dem Plumpen-Felsenkalk, in der sog. Bodenwöhrer Bucht sogar auf dem braunen Jura und im Hintergrund dieser Bucht der Reihe nach auf Lias und dann auf der Trias. Vor Ablagerung der oberen Kreide muß die Erosion somit schon große Teile des Jura entfernt haben. Die Trias und Juraschichten können somit zu Beginn der jüngeren Kreideperiode nicht mehr ganz horizontal gelegen und müssen im Osten eine höhere Lage gehabt haben, so daß die Erosion sie abtragen konnte. Die Gegend des Waldgebirges lag wahrscheinlich damals schon höher als das Juraplateau. Es liegt nahe zu vermuten, daß es diese Höhenlage durch den Abbruch des Juraplateaus auf der Randspalte gewonnen hat, daß dieses Einsinken des Jura den vom Gebirge abfließenden Gewässern das nötige Gefälle gab zur Entfaltung einer kräftigen Erosion und daß bei zunehmendem Absinken am Rande des Waldgebirges eine Niederung entstand, deren Oberfläche schließlich tiefer zu liegen kam als der damalige Meeresspiegel. Auf einem noch unbekannten Wege drang dann das Cenomanmeer von Osten oder Nordosten her in diese Niederung ein und lagerte seine Sedimente darin ab. Die durch die Randspalte erzeugte Steilstufe wurde diesem Meere zum Ufer und es konnte nur da auch in das Gebiet des Waldgebirges eindringen, wo dasselbe durch die vorausgegangene Erosion tief genug abgetragen und damit auch die Steilstufe verwischt worden war. Das ist aber am Eingang in die Bodenwöhrer Bucht tatsächlich der Fall, denn es ist noch nicht ge-

lungen, die Keilberger Randspalte bei Schwandorf nachzuweisen, weil dort die Kreideablagerungen über sie hinweggehen und im Osten, anscheinend wenigstens, nicht höher liegen als im Westen, was doch der Fall sein müßte, wenn der Einbruch auf der Randspalte erst nach der Kreidezeit erfolgt wäre.

Für die bisher besprochenen tektonischen Ereignisse läßt sich somit folgende chronologische Reihenfolge mit einiger Wahrscheinlichkeit feststellen: während der älteren Kreidezeit entstand längs der bogenförmig verlaufenden Keilberger Randspalte eine Einsenkung, in die das jüngere Kreidemeer eindrang, nach dem Rückzuge dieses Meeres in der Tertiärzeit erfolgte die Überschiebung des granitischen Waldgebirges; in der mittleren Miocänzeit transgredierte das miocäne Meer von Osten her über den Stirnrand dieser Schubmasse im Süden der Donau nach Westen bis in die Ortenburger Gegend und nach dem Rückzuge dieses Meeres ereignete sich der Donaueinbruch zwischen Pleinting und Regensburg auf einer Verwerfungsspalte, die zwischen Pleinting und Tegernheim ungefähr parallel und dicht neben der Keilbergspalte verlief, aber von Tegernheim an gegen Westen eine andere Richtung einschlug.

VII. Die Randspalten des Oberpfälzer Wald- und des Fichtelgebirges.

Für die Keilberger Randspalte ist die bogenförmige Umbiegung am Keilberg sehr charakteristisch. Der östliche Arm des Bogens ist bis Voglarn zwar stellenweise nachweisbar, wie aus den vorausgehenden Kapiteln hervorgeht, aber sein genauer Verlauf ist unbekannt und ebenso seine Fortsetzung über Voglarn hinaus. Im allgemeinen hat er jedoch eine nordwestliche Richtung. Bei Tegernheim beginnt die Umbiegung nach Norden. Der nördliche Arm ist kurz und wird bald undeutlich. Er kann sich nicht weit über Schwandorf hinaus fortsetzen, weil er dort auf einen anderen Bogen stößt, den er nicht durchsetzt und der eine ihm so ähnliche Gestalt zeigt, daß ein ursächlicher und zeitlicher Zusammenhang beider kaum bezweifelt werden kann. Ich nenne letzteren den Freudenberger Bogen, weil seine der

Keilberger analoge knieförmige Umbiegung bei Freudenberg, im Nordosten von Amberg, liegt. Die Jura- und Triasschichten auf der Außenseite des Bogens sind eingesunken und fallen gegen den Granit und das Rotliegende auf der Innenseite ein, die jenen gegenüber gehoben erscheinen. Der südöstliche Arm des Freudenberger Bogens läuft mit dem des Keilberger Bogens parallel über Schwarzenfeld und Taxöldern in den Bayerischen Wald hinein und trifft dort auf den gleichgerichteten, in seiner Entstehung noch immer rätselhaften Pfahl, der somit die östliche Fortsetzung dieses Bogens darstellt. Der nördliche Arm ist bis zum Blauen Berg noch sehr deutlich, verliert sich aber in dem Keuper bei Schnaittenbach in ähnlicher Weise wie der Nordarm des Keilberger Bogens bei Schwandorf. Und ebenso stößt er im Norden auf einen neuen, den Freyunger Bogen. Auf dem Freudenberger Granit liegt nicht nur Rotliegendes sondern auch der Keuper, der in der orographischen Schnaittenbacher Bucht zwischen dem Freyunger und Freudenberger Bogen ebenso liegt wie wir dies von der Bodenwöhrer Bucht wissen.

Auf der Innenseite des Freyunger Bogens erhebt sich das Rotliegende, aber der tiefere Granit tritt nicht mehr zutage. Auch orographisch ist dieser Bogen als Höhenzug viel bescheidener als der Freudenberger markiert. Tektonisch sind jedoch beide ganz gleich. Auf der Außenseite fällt Trias und Jura gegen das höher liegende Rotliegende ein, das auf seiner Nordseite normal von Keuper überdeckt ist, analog wie in der Schnaittenbacher Bucht. Der südöstliche Ast dieses Bogens tritt von Freyung bis Wernberg an der Naab deutlich hervor, von dort aber verliert er sich in dem Oberpfälzer Wald. Der Nordast teilt das Schicksal der Nordäste der zwei anderen Bögen und entzieht sich bald der Beobachtung unter jüngeren Deckmassen. Gleichwohl scheint es, daß auch er auf einen weiteren, vierten, den Bogen von Grafenwöhr stößt, der sich durch das Emportauchen des Buntsandsteines bei Grafenwöhr und Eschenbach inmitten einer flachen Keuperlandschaft auszeichnet. Hier ist es also selbst dem tieferen Rotliegenden nicht mehr gelungen, an die Tagesoberfläche zu kommen. Die konvexe Stelle

dieses Bogens liegt an der Eichleite westlich von Eschenbach, der südöstliche Ast zieht sich nach Grafenwöhr. Von da ab bleibt die Fortsetzung verborgen. Vielleicht folgt sie der Heide Naab bis zum Rotliegenden bei Mantel. Es könnte aber auch sein, daß sie einen mehr westlichen Weg nach Weiden hin einschlägt. Der nördliche Ast ist deutlich nur bis zum Muschelkalk von Tremersdorf.

Bei Weiden löst sich aus dem Oberpfälzer Waldgebirge eine letzte Bogenlinie als Randspalte des Fichtelgebirges los. Sie setzt ohne Unterbrechung gegen NW fort über Kronach hinaus bis an die Landesgrenze in der Nähe von Sonneberg. In ihrem Verlauf unterscheidet sie sich wohl von den vier anderen Randspalten, aber doch ist sie niemals geradlinig, sondern aus größeren und kleineren Bogenstücken zusammengesetzt, die alle ihre konvexe Seite nach SW kehren. Auf der Innenseite liegen Granit und paläozoische Sedimente auf den Höhen, auf der Außenseite, die meist durch eine orographische Steilstufe deutlich gekennzeichnet ist, breiten sich in der Niederung die Triassedimente aus. Wie der Jura am Keilberg, so erscheint hier die Trias auf der Randspalte an den paläozoischen Massen abgesunken zu sein. Aber die Spalte selbst zeigt Verschiedenheiten. Nach den älteren Aufnahmen der geognostischen Landesuntersuchung muß man vermuten, daß die Randspalte nicht saiger steht, sondern nach NO, wenn auch ziemlich steil geneigt ist. Fast immer, wenn die Spaltenlinie auf der Karte zwei Täler quert, beschreibt sie einen gegen SW konvexen Bogen, was auf eine Neigung der Fläche in entgegengesetzter Richtung schließen läßt. Da die geologischen Karten aber keine Höhenkurven haben und auch im Maßstab viel zu klein sind, läßt sich der Fallwinkel leider nicht berechnen. Glücklicherweise hat Thürach seinerzeit an einer Stelle eine Messung vornehmen können (s. Gümbel, Frankenjura, S. 611) und schreibt darüber: „Bei Döltsch unfern Altenparkstein erscheint die Randspalte 65—70° gegen NO einfallend und der angrenzende, höher aufragende Gneis geradezu überschoben.“ Der nördlichsten und längsten Randspalte dürfte somit der

Charakter einer steilen Überschiebung als wahrscheinlich zuerkannt werden. Für die anderen Bögen liegen nach dieser Richtung entscheidende Beobachtungen nicht vor mit Ausnahme der Keilbergspalte, die wenigstens bei Tegernheim sicher ganz saiger steht.

Sämtliche Randbögen haben, wie es mir scheint, dasselbe Alter und sind das Ergebnis ein und desselben tektonischen Ereignisses, das das ganze östliche Grenzgebiet des Frankenjura während der älteren Kreidezeit betroffen hat und das zur Folge hatte, daß das jüngere Kreidemeer buchtenförmig in das Festland vordringen konnte und damit das bayerische Grenzgebirge von dem fränkischen Tafellande schied.

VIII. Die tangentialen Verwerfungsspalten.

Es ist eine merkwürdige Eigentümlichkeit, daß von den beschriebenen vier südlichen Randbögen jeweils besondere Verwerfungsspalten in ziemlich gerader Richtung nach NW da abgehen, wo der Bogen seine stärkste Krümmung macht. Sie liegen wie Tangenten an der Außenseite der Bögen und zwei derselben verlängern sich auch nach SW, ohne dabei mit den Bögen zusammenzutreten.

Die südlichste dieser Verwerfungen ist die schon beschriebene Donauabbruchspalte. Die nächste führt den Namen der Amberger Spalte. Ihre östlichsten Spuren beginnen schon in der Bodenwöhrer Bucht in geringem Abstand südlich der Pfahllinie, der sie bis zu deren Umbiegung bei Högling folgt, um dann geradeaus nach Amberg weiter zu ziehen. Von da ist sie bis hinüber zum Staffelstein am Main verfolgt worden. Die Auerbacher Spalte trennt sich von dem Freudenberger Bogen am Blauen Berg und läuft zunächst in einer mehrmals gekrümmten Linie über Vilseck und Auerbach und soll bis Lichtenfels am Main reichen. Bei Ehenfeld zweigt sich von dem Freihunger Bogen die Kirchenthurmbacher Spalte ab, die am Kutschenrain undeutlich wird. Die Bayreuther Spalte nähert sich ihr zwar von Norden her, scheint aber nicht als ihre nördliche

Fortsetzung gelten zu können, weil auf ihr die Schichten im Osten, bei der Kirchthurmbacher Spalte im Westen abgesunken sind. Die Kulmbacher Spalte endlich stößt bei Tremersdorf an den Graferwöhrer Bogen an.

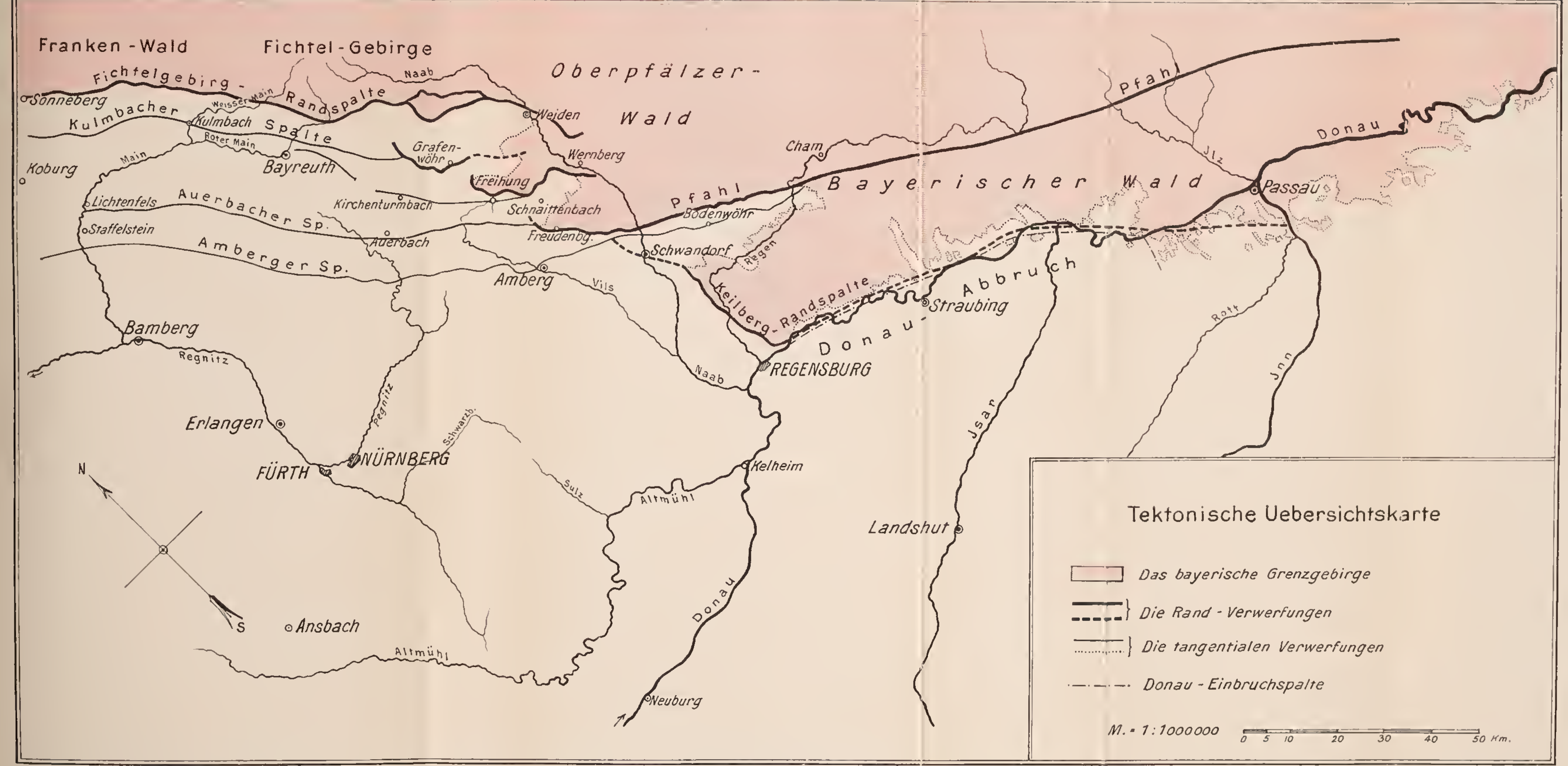
Für die drei südlichen dieser fünf tangentialen Spalten ist ein postkretazisches Alter sicher, für die zwei nördlichen nur wahrscheinlich. Die Donauabbruchspalte ist, wie wir schon gesehen haben, jungmiocän und jedenfalls jünger als die Straubinger Überschiebung, der ein alttertiäres Alter zukommt. Für die vier anderen tangentialen Spalten läßt sich zur Zeit eine genauere Altersbestimmung nicht durchführen, doch könnte es ganz wohl sein, daß sie mit der Überschiebung in zeitlicher und ursächlicher Beziehung stehen.

Die Überschiebung hat in der Donaugegend nicht nur eine horizontale Massenverschiebung sondern gleichzeitig auch eine vertikale Hebung des ostbayerischen Grenzgebirges hervorgebracht. Wenn man annehmen dürfte, daß der Betrag der horizontalen Bewegung gegen NW abnahm, derjenige der vertikalen aber nicht, dann würde auf den tangentialen Spalten diese vertikale Hebung erfolgt sein ohne bedeutende horizontale Pressung oder Überschiebung, und der Keilberg mit seiner starken horizontalen Pressung bei fehlender Überschiebung würde entsprechend seiner geographischen Zwischenstellung auch für die tektonischen Bewegungen eine Übergangszone darstellen.

Inhaltsverzeichnis.

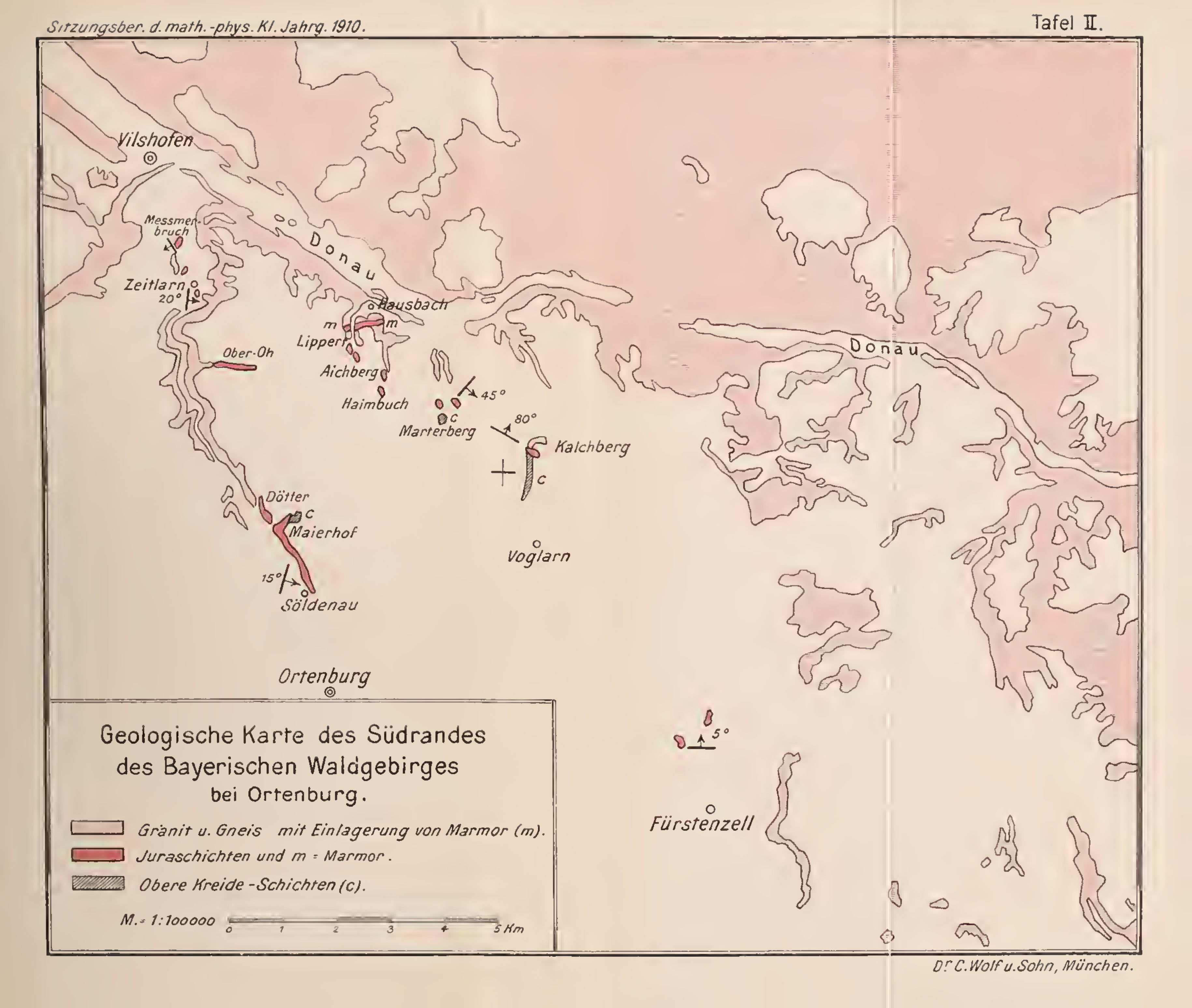
*





Dr. C. Wolf u. Sohn, Mch





Dr. C. Wolf u. Sohn, München.



Wie fallen Stäbe und Scheiben in einer reibenden Flüssigkeit?

Von **R. Gans.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 6. Mai 1911.

Bewegt sich eine Kugel unter dem Einflusse einer nach Größe und Richtung konstanten Kraft F in einer reibenden Flüssigkeit, so wird im stationären Endzustande die Geschwindigkeit V die Richtung der Kraft haben und ihr proportional sein, es wird also die Gleichung

$$V = \gamma F \tag{1}$$

gelten, und wir können γ als Beweglichkeit der Kugel in der betreffenden Flüssigkeit bezeichnen. Die Geschwindigkeit wird dadurch charakterisiert sein, daß die von der wirkenden Kraft geleistete Arbeit gleich der in der Flüssigkeit durch die Strömung entwickelten Reibungswärme ist. Nach (1) muß also

$$F \cdot V = \frac{V^2}{\gamma} \tag{2}$$

die in der Zeiteinheit in der Flüssigkeit erzeugte Wärme sein.

Durch Integration der dieses Problem beherrschenden Differentialgleichungen der Hydrodynamik fand Stokes,[1]) daß

$$\gamma = \frac{1}{6\pi\mu a} \tag{3}$$

---

[1]) Stokes, Cambr. Trans. 9, 1851 oder Scientific Papers 3, p. 1; siehe auch H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch v. J. Friedel. Leipzig und Berlin 1897, § 325, p. 682.

ist, wenn a den Radius der Kugel, μ den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit bedeutet. Hierbei ist vorausgesetzt, daß $\frac{V a s'}{\mu}$ eine gegen die Einheit kleine Zahl ist, unter s' das spezifische Gewicht der Flüssigkeit verstanden.

Ist die wirkende Kraft F die Schwerkraft, also

$$F = \frac{4\pi}{3} a^3 g (s - s'), \tag{4}$$

wo s das mittlere spezifische Gewicht der Kugel bezeichnet, so bestimmt sich aus der Fallgeschwindigkeit bei bekanntem Reibungskoeffizienten μ der Kugelradius nach (1), (3) und (4) zu

$$a = 3\sqrt{\frac{\mu V}{2 g (s - s')}}. \tag{5}$$

Diese Theorie von Stokes hat neuerdings dadurch an Bedeutung gewonnen, weil man sie zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums herangezogen hat. Das Prinzip dieser Messung besteht darin, daß man ein mit der Elektrizitätsmenge e geladenes Teilchen einmal einfach unter dem Einfluß der Schwere fallen läßt, wobei sich die Fallgeschwindigkeit V_1 nach (1), (3) und (4) aus der Formel

$$\frac{4\pi}{3} a^3 g (s - s') = 6 \pi \mu a V_1 \tag{6}$$

ergibt, und dann dem Schwerefeld ein gleich (oder entgegengesetzt) gerichtetes elektrisches Feld der Intensität $\mathfrak{E}$ überlagert, wobei eine Fallgeschwindigkeit V_2 resultiert, die sich aus

$$\frac{4\pi}{3} a^3 g (s - s') + e \mathfrak{E} = 6 \pi \mu a V_2 \tag{7}$$

berechnet.

Aus (6) und (7) folgt sowohl der Radius des Teilchens als auch seine elektrische Ladung, nämlich

$$a = 3\sqrt{\frac{\mu V_1}{2(s - s')g}}$$

$$e\mathfrak{E} = 9\pi(V_2 - V_1)\sqrt{\frac{2\mu^3 V_1}{(s - s')g}}. \tag{8}$$

Auf der vorjährigen Naturforscherversammlung in Königsberg berichtete nun Herr Ehrenhaft[1]) über seine Bestimmungen des elektrischen Elementarquantums, und es schien aus seinen Versuchen hervorzugehen, daß das Elementarquantum keine Konstante ist, sondern daß einige Teilchen eine größere, andere eine kleinere Ladung besitzen, als sich nach anderen Methoden ergeben hatte.

Die Diskussion, die sich an diesen Vortrag knüpfte, beschäftigte sich mit der Frage, welche Gründe wohl die Schwankungen der Resultate veranlaßt haben könnten, und so wurden unter anderem auch die Voraussetzungen der Stokesschen Theorie erörtert.

Vor allem wies Herr Sommerfeld[2]) darauf hin, daß eine Vorbedingung für die Verwendung der Stokesschen Formel die Kugelgestalt der fallenden Teilchen ist, und daß scheiben- oder stäbchenförmige Teilchen bei Verwendung der für die Kugel gültigen Formel zu kleine Werte für e ergeben würden.

In einem Privatgespräch mit einigen Kollegen nach der betreffenden Sitzung stellte ich die Frage „Wie fallen eigentlich Platten oder Stäbchen in einer reibenden Flüssigkeit?", und ich erhielt von dem einen die Antwort „Eine Platte fällt schmalseit". Als Grund für seine Behauptung gab er an, jeder Körper falle so, wie er den geringsten Widerstand von seiten der umgebenden Flüssigkeit erfahre. Andere dagegen meinten: „Nein, eine Platte fällt breitseit" und ließen zur Erhärtung ihrer Aussage Visitenkarten etc. fallen, die in der Tat breitseit ohne Störung herunterfielen, während sie, wenn sie anfänglich schmalseit fielen, ehe sie den Boden erreicht hatten,

[1]) Ehrenhaft, Phys. Zs. 11, 1910, p. 940.
[2]) A. Sommerfeld, Phys. Zs. 11, 1910, p. 949.

sich mehrfach überschlugen, Erscheinungen, die ja in der Aviatik ganz bekannt sind. Schließlich erwähnte noch einer, er erinnere sich aus seiner Knabenzeit, daß er beim Baden nach Tellern getaucht habe, die stets aufrecht, d. h. so, wie sie auf dem Tische stehen, also auch breitseit gesunken seien.

Da sonach die Meinungen über die Frage, wie eine Platte oder ein Stäbchen in einer reibenden Flüssigkeit fällt, geteilt waren, sei es mir gestattet, im folgenden auf dies Problem einzugehen, vollkommen losgelöst von der Diskussion über die Ehrenhaftschen Versuche, die inzwischen ganz andere Bahnen eingeschlagen hat.

Zunächst sei bemerkt, daß es ein Minimalprinzip des Widerstandes in dem oben benutzten Sinne für die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit nicht gibt. Es wird hier wohl eine Verwechslung mit einem Theorem von Helmholtz[1]) vorgelegen haben, welches aussagt, daß unter gegebenen Oberflächenbedingungen die Wärmeentwicklung bei stationärer Strömung geringer ist als bei irgend einer anderen Flüssigkeitsbewegung. Sodann beweisen die Experimente der fallenden Visitenkarten für unser Problem nichts, da wir uns nur mit dem von Stokes behandelten Grenzfalle unendlich kleiner Geschwindigkeiten beschäftigen, bei dem die von der Trägheit der Flüssigkeit abhängigen Glieder vernachlässigt werden können. Das ist der Fall, wenn $\frac{Vls'}{\mu}$ klein gegen Eins ist, unter l eine Lineardimension des fallenden Körpers verstanden. Diese Bedingung war nun bei den Versuchen keineswegs erfüllt, denn da für Luft $s' = 0{,}00129$, $\mu = 0{,}00017$ ist, hätte V noch klein gegen 0,01 cm/sec sein müssen.

Schließlich müssen wir auch eine Folgerung aus der Art des Sinkens von Tellern im Wasser abweisen, da hier erstens die Stabilität der aufrechten Lage schon durch die gewölbte Form des Körpers, d. h. durch den Tellerrand, gewährleistet ist (wegen der Unsymmetrie von oben und unten fällt der

1) H. v. Helmholtz, Wiss. Abh. 1, p. 223.

Teller im Wasser nur in der aufrechten Lage), zweitens ist aber auch hier die Fallgeschwindigkeit viel zu groß, als daß man berechtigt wäre, von der Trägheit der Flüssigkeit abzusehen, denn für Wasser ist $s' = 1$; $\mu = 0{,}018$, so daß V klein gegen 0,001 cm/sec hätte sein müssen.

Da also die angestellten Experimente für die von uns aufgeworfene Frage nicht in Betracht kommen und auch nur schwer entscheidende Versuche anzustellen sein werden, so wollen wir jetzt ermitteln, wie die Theorie unser Problem löst.

Anstatt die Geschwindigkeit und den Druck zu suchen, die an jeder Stelle der Flüssigkeit herrschen, wenn man dem in ihr befindlichen festen Körper eine Bewegung von konstanter Geschwindigkeit erteilt, können wir uns fragen, wie ein konstantes Strömungsfeld durch einen in ihr ruhenden festen Körper modifiziert wird, und welche Kräfte und Drehmomente man aufwenden muß, um den Körper in dieser Strömung in Ruhe zu halten.

Dieses Problem wird durch die Differentialgleichungen beherrscht[1])

$$\mu \Delta v_x = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\mu \Delta v_y = \frac{\partial p}{\partial y} \tag{9}$$

$$\mu \Delta v_z = \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{10}$$

wenn an der Oberfläche des festen Körpers

$$v_x = 0; \quad v_y = 0; \quad v_z = 0 \tag{11}$$

ist und im Unendlichen etwa die Bedingung

$$v_x = U; \quad v_y = 0; \quad v_z = 0 \tag{12a}$$

---

[1]) Vgl. z. B. H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von J. Friedel. Leipzig und Berlin 1907, § 324.

oder

$$v_x = 0; \quad v_y = V; \quad v_z = 0 \tag{12b}$$

oder

$$v_x = 0; \quad v_y = 0; \quad v_z = W \tag{12c}$$

gilt.

Die Druckkräfte ergeben sich ferner aus den Formeln[1])

$$\begin{aligned}
p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}; & p_{yz} &= p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}; & p_{zx} &= p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\
p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; & p_{xy} &= p_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

Die Differentialgleichungen, die Grenzbedingungen und die Drucke sind, wie man aus den Gleichungen (9) bis (13) ersieht, linear in den Geschwindigkeitskomponenten, d. h. die Superposition zweier Lösungssysteme (Teilbewegungen) gibt wieder ein mögliches Lösungssystem (resultierende Bewegung).

Deshalb gilt ohne weiteres der Satz:

Die Komponenten der Kraft und des Drehmoments, die nötig sind, um den festen Körper bei der resultierenden Bewegung in Ruhe zu halten, sind einfach die Summe der entsprechenden Komponenten. die bei den Teilbewegungen erforderlich sind.

Insbesondere: Befindet sich ein Körper mit drei aufeinander senkrechten Symmetrieebenen, deren Schnittlinien, die „Hauptachsen“, den Koordinatenachsen parallel liegen mögen, in der Flüssigkeit, und hat die Geschwindigkeit im Unendlichen die Komponenten U, V, W, so setzt sich die Lösung aus den drei Teilbewegungen zusammen, die wir erhalten, wenn wir als Bedingung im Unendlichen erstens die Gleichung (12a), zweitens (12b), drittens (12c) einführen.

Bei keiner dieser Teilbewegungen. die dadurch charakterisiert sind, daß der Körper mit einer seiner Hauptachsen

[1]) H. Lamb, l. c, p. 662, § 314.

parallel dem ungestörten Strömungsfelde liegt, ist nun aus Symmetriegründen ein Drehmoment erforderlich, um den Körper in seiner Lage zu halten, also ist bei der resultierenden Bewegung, bei der der Körper eine ganz beliebige Orientierung zum Strömungsfelde hat, auch kein Drehmoment nötig oder, wenn wir wieder zu dem Falle übergehen, daß die Flüssigkeit im Unendlichen ruht, der Körper aber geradlinig in derselben bewegt wird, so gilt der Satz:

Auf den bewegten Körper wirkt kein Drehmoment infolge der Druckkräfte der Flüssigkeit. Scheiben oder Stäbchen, die drei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen besitzen, haben also nicht die Tendenz, beim langsamen Fallen in einer Flüssigkeit sich irgendwie einzustellen.

Während die bisherigen Resultate einzig und allein aus der Linearität der Gleichungen und den Symmetrieeigenschaften des Körpers folgten, müssen wir, um den Bewegungsvorgang in seinen Einzelheiten angeben zu können, die Körperform genauer präzisieren.

Wir wollen also annehmen, daß eine Scheibe ein abgeplattetes, ein Stäbchen ein verlängertes Rotationsellipsoid ist; die große Halbachse möge a, die kleine c heißen. Die für die stationäre Bewegung maßgebenden Formeln sind von Oberbeck[1]) aufgestellt worden.

Aus diesen Formeln folgt, daß die Beweglichkeit γ, d. h. das Verhältnis der Körpergeschwindigkeit zur wirkenden Kraft sich aus der Gleichung

$$\gamma_a = \frac{1}{6\,\pi\,\mu\,a}\,\delta_a \tag{14}$$

resp.

$$\gamma_c = \frac{1}{6\,\pi\,\mu\,a}\,\delta_c \tag{15}$$

berechnet, je nachdem die Bewegung in Richtung der großen oder der kleinen Achse des Ellipsoids stattfindet.

[1]) Oberbeck, Crelles Journal 81, 1876, p. 62; s. auch H. Lamb. l. c., § 326.

Hierbei ist[1]) für Scheiben, bei denen $a = b > c$ ist,

$$\delta_a = a\,\frac{3}{8}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{c^2+\lambda}}\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{a^2}{(a^2+\lambda)^2}\right) \tag{16}$$

$$\delta_c = a\,\frac{3}{8}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{c^2+\lambda}}\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{c^2}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\right) \tag{17}$$

und für Stäbchen, bei denen $a > b = c$ ist,

$$\delta_a = a\,\frac{3}{8}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{a^2+\lambda}}\left(\frac{1}{c^2+\lambda}+\frac{a^2}{(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)}\right) \tag{18}$$

$$\delta_c = a\,\frac{3}{8}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{a^2+\lambda}}\left(\frac{1}{c^2+\lambda}+\frac{c^2}{(c^2+\lambda)^2}\right). \tag{19}$$

Die Ausführung der Quadraturen ergibt für Scheiben

$$\delta_a = \frac{3}{4}\left[\frac{1-2\frac{c^2}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}^{\,3}}\arccos\frac{c}{a}+\frac{\frac{c}{a}}{1-\frac{c^2}{a^2}}\right] \tag{16'}$$

$$\delta_c = \frac{3}{8}\left[\frac{3-2\frac{c^2}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}^{\,3}}\arccos\frac{c}{a}-\frac{\frac{c}{a}}{1-\frac{c^2}{a^2}}\right], \tag{17'}$$

und zwar gilt (16′), wenn die Bewegung schmalseit, (17′), wenn sie breitseit erfolgt.

Ist die Scheibe so abgeplattet, daß die zweiten Potenzen von $\frac{c}{a}$ vernachlässigt werden können, so gehen (16′) und (17′) in

$$\delta_a = \frac{9\pi}{16}\left(1-\frac{8}{3\pi}\frac{c}{a}\right) \tag{16''}$$

$$\delta_c = \frac{3\pi}{8} \tag{17''}$$

[1]) H. Lamb, l. c., § 326, Formeln (6), (7), (14), (15).

über. Weicht andererseits das abgeplattete Rotationsellipsoid so wenig von der Kugelform ab, daß $1-\frac{c}{a}$ sehr klein ist, so wird

$$\delta_a = 1 + \frac{2}{5}\left(1-\frac{c}{a}\right) \tag{16'''}$$

$$\delta_c = 1 + \frac{1}{5}\left(1-\frac{c}{a}\right). \tag{17'''}$$

Für Stäbchen lassen sich ganz analoge Rechnungen anstellen. Die Ausführung der in (18) und (19) geforderten Quadraturen ergibt

$$\delta_a = \frac{3}{8}\left[\frac{2-\frac{c^2}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}^{\,3}} \lg \frac{1+\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}} - \frac{2}{1-\frac{c^2}{a^2}}\right] \tag{18'}$$

$$\delta_c = \frac{3}{16}\left[\frac{2-3\frac{c^2}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}^{\,3}} \lg \frac{1+\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}} + \frac{2}{1-\frac{c^2}{a^2}}\right], \tag{19'}$$

und zwar kommen (18′) und (19′) für Bewegungen des Stabes parallel resp. senkrecht zu seiner Achse in Betracht.

Für kleine Werte von $\frac{c}{a}$ ist

$$\delta_a = \frac{3}{4}\left\{2 \lg \frac{2a}{c} - 1\right\} \tag{18''}$$

$$\delta_c = \frac{3}{8}\left\{2 \lg \frac{2a}{c} + 1\right\} \tag{19''}$$

und für kleine Werte von $1-\frac{c}{a}$

$$\delta_a = 1 + \frac{4}{5}\left(1-\frac{c}{a}\right) \tag{18'''}$$

$$\delta_c = 1 + \frac{3}{5}\left(1-\frac{c}{a}\right). \tag{19'''}$$

In der folgenden Tabelle 1 sind für verschiedene Achsenverhältnisse nach (16′), (17′) und (18′), (19′) die Werte von δ_a und δ_c für Platten und Stäbchen berechnet.

Tabelle I.

$\frac{c}{a}$	Für Platten		Für Stäbchen	
	δ_a	δ_c	δ_a	δ_c
0.0	1.767	1.178	∞	∞
0.1	1.631	1.174	3.764	2.617
0.2	1.516	1.160	2.799	2.108
0.3	1.418	1.145	2.267	2.815
0.4	1.335	1.125	1.914	1.606
0.5	1.261	1.105	1.662	1.451
0.6	1.196	1.084	1.467	1.326
0.7	1.139	1.063	1.314	1.224
0.8	1.088	1.041	1.191	1.138
0.9	1.041	1.019	1.091	1.063
1.0	1.000	1.000	1.000	1.000

Bildet die Kraft $\mathfrak{F}$ mit der Platten- (resp. Stab-) Achse den Winkel ϑ, so wird der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ mit der Achse einen Winkel φ einschließen (die Figur bezieht sich auf Platten), und zwar ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_a &= \gamma_a \mathfrak{F}_a \\ \mathfrak{v}_c &= \gamma_c \mathfrak{F}_c \end{aligned} \tag{20}$$

oder

$$\begin{aligned} v \sin\varphi &= \gamma_a F \sin\vartheta \\ v \cos\varphi &= \gamma_c F \cos\vartheta\,. \end{aligned} \tag{20′}$$

Durch Division der beiden Gleichungen (20′) ergibt sich

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\gamma_a}{\gamma_c}\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\delta_a}{\delta_c}\operatorname{tg}\vartheta\,. \tag{21}$$

Daraus folgt, daß für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ die Richtung der Geschwindigkeit mit der der Kraft zusammenfällt.

Die maximale Abweichung zwischen der Geschwindigkeits- und der Kraftrichtung findet nach (21) statt, wenn

$$\varphi - \vartheta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\delta_a}{\delta_c}\operatorname{tg}\vartheta\right) - \vartheta$$

ein Maximum ist. (Bei Stäben ist $\vartheta - \varphi$ positiv), und zwar ist dann

$$\operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{\frac{\delta_c}{\delta_a}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{\delta_a}{\delta_c}}, \tag{22}$$

d. h. ϑ und φ ergänzen sich zu 90°. (Für Stäbe ist ϑ mit φ zu vertauschen.)

In der folgenden Tabelle 2 sind für verschiedene Achsenverhältnisse $\frac{c}{a}$ die Winkel ϑ, für die $\varphi - \vartheta$ für Platten resp. $\vartheta - \varphi$ für Stäbchen den größten Wert hat, und diese Werte $\varphi - \vartheta$ resp. $\vartheta - \varphi$ selbst, d. h. die Abweichungen zwischen der Geschwindigkeits- und Kraftrichtung angegeben.

Tabelle 2.

$\frac{c}{a}$	Für Platten ϑ	Für Platten $\varphi - \vartheta$	Für Stäbchen ϑ	Für Stäbchen $\vartheta - \varphi$
0.0	39° 41′	11° 32′	54° 44′	19° 28′
0.1	40 18	9 24	50 11	10 22
0.2	41 11	7 38	49 03	8 06
0.3	41 56	6 08	48 11	6 22
0.4	42 33	4 54	47 31	5 02
0.5	43 06	3 48	46 57	3 54
0.6	43 35	2 50	46 27	2 54
0.7	44 01	1 58	46 01	2 02
0.8	44 22	1 16	45 39	1 18
0.9	44 41	0 38	45 22	0 44
1.0	45 00	0 00	45 00	0 00

In Tabelle 3 ist schließlich für ganz flache Scheiben und ganz gestreckte Stäbe $\left(\frac{c}{a} = 0\right)$, für die $\frac{\delta_a}{\delta_c} = 1{,}5$ (resp. 2) ist. $\varphi - \vartheta$ (resp. $\vartheta - \varphi$) als Funktion von ϑ berechnet.

Tabelle 3.

ϑ	Für Platten $\varphi - \vartheta$	Für Stäbchen $\vartheta - \varphi$
0°	0° 00′	0° 00′
10	4 49	4 58
20	8 38	9 41
30	10 54	13 54
40	11 32	17 14
50	10 47	19 12
60	8 57	19 06
70	6 21	16 04
80	3 18	9 26
90	0 00	0 00

Aus Tabelle 2 ersieht man, daß man aus dem nicht senkrechten Fall von Teilchen in einer Flüssigkeit einen Schluß auf ihre Abweichung von der Kugelgestalt ziehen kann, doch ist, worauf mich Herr Sommerfeld gelegentlich eines Briefwechsels über diese Frage aufmerksam gemacht hat, dies Kriterium nicht besonders scharf, da im äußersten Falle die Abweichung von der Vertikalen bei Platten 11° 32′, bei Stäbchen 19° 28′ beträgt.

Die für die Bestimmung des Elementarquantums maßgebenden Gleichungen (6) und (7) nehmen für Plattenform die Gestalt an

$$\frac{4\pi}{3} a^2 c g (s - s') = \frac{6\pi\mu a V_1}{\delta} \tag{6'}$$

$$\frac{4\pi}{3} a^2 c g (s - s') + e\mathfrak{E} = \frac{6\pi\mu a V_2}{\delta}, \tag{7'}$$

und aus ihnen folgt

$$\left.\begin{aligned} a &= 3\sqrt{\frac{\mu V_1}{2(s-s')g}}\,\frac{1}{\sqrt{\delta\frac{c}{a}}} \\ e\mathfrak{E} &= 9\pi(V_2 - V_1)\sqrt{\frac{2\mu^3 V_1}{(s-s')g}}\,\frac{1}{\sqrt{\delta^3\frac{c}{a}}} \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

anstatt der Gleichungen (8), und zwar sind für δ die Werte δ_a und δ_c zu nehmen, je nachdem die Platte schmalseit oder breitseit fällt.

Für Stäbe ergibt sich in analoger Weise

$$a = 3\sqrt{\frac{\mu V_1}{2(s-s')g}}\,\frac{1}{\sqrt{\delta\frac{c^2}{a^2}}}$$

$$e\mathfrak{E} = 9\pi(V_2 - V_1)\sqrt{\frac{2\mu^3 V_1}{(s-s')g}}\,\frac{1}{\sqrt{\delta^3\frac{c^2}{a^2}}}, \tag{8''}$$

wenn in diesen Formeln die für Stäbe gültigen δ-Werte substituiert werden.

Sommerfeld gab in der Diskussion an, daß die von Ehrenhaft berechneten Werte von e, falls die Teilchen sehr dünne Platten wären, mit $\sqrt{\frac{a}{c}}$, falls sie sehr gestreckte Stäbchen wären, mit $\frac{\frac{a}{c}}{\lg\frac{a}{c}}$ zu multiplizieren seien. Wie wir aus den Formeln (8′) und (8″) sowie aus den asymptotischen Werten für δ (Formeln (16″), (17″), (18″), (19″)) ersehen, stimmt dies Resultat, ganz gleichgültig, wie das Teilchen gegen die Vertikale orientiert ist.

Tübingen, Physikalisches Institut
30. März 1911.



Einige Konvergenz- und Divergenzkriterien für alternierende Kettenbrüche.

Von **Oskar Perron.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 6. Mai 1911.

Als alternierende Kettenbrüche bezeichnet man die Kettenbrüche der Form

$$b_0 - \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} - + \cdots,$$

wobei die a_ν, b_ν positive Zahlen sind. Herr Gmeiner hat sich in zwei Noten mit der Konvergenz dieser Kettenbrüche beschäftigt.[1]) Ich werde im folgenden auf sehr einfache Weise ein Kriterium herleiten, das alle Gmeinerschen als Spezialfälle enthält (Satz 4). Durch Spezialisierung ergeben sich sogar Kriterien, die immer noch allgemeiner sind als gewisse Gmeinersche, und trotzdem von einfacherer Form.

§ 1.

Wir benötigen für unsere Untersuchungen die bekannten Kriterien für Kettenbrüche mit positiven Elementen. Sei

$$d_0 + \frac{c_1|}{|d_1} + \frac{c_2|}{|d_2} + \frac{c_3|}{|d_3} + \cdots$$

[1]) Konvergenzsätze für alternierende unendliche Kettenbrüche. Monatshefte für Mathematik und Physik, 14. Jahrgang (1903). Zitiert als Gmeiner I. — Kriterien der Divergenz und Konvergenz von alternierenden unendlichen Kettenbrüchen. Sitzungsber. der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, math.-naturw. Klasse, Bd. 117, Abt. IIa (1908). Zitiert als Gmeiner II.

ein solcher; also $c_\nu > 0$, $d_\nu > 0$. Nach Seidel und Stern besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für seine Konvergenz darin, daß wenigstens eine der beiden Reihen

$$\sum \frac{c_1 c_3 \ldots c_{2\nu-1}}{c_2 c_4 \ldots c_{2\nu}} d_{2\nu}, \qquad \sum \frac{c_2 c_4 \ldots c_{2\nu}}{c_3 c_5 \ldots c_{2\nu+1}} d_{2\nu+1}$$

divergiert.[1]) Dazu ist zu bemerken, daß dieser Satz noch richtig bleibt, wenn für die d_ν auch die Null zugelassen wird, sofern dann nur nicht alle d_ν mit ungeradem Index verschwinden. Den Beweis übergehe ich, da er in ganz gleicher Weise geführt werden kann, wie etwa der von Stern gegebene.

Wenn dagegen alle d_ν mit ungeradem Index verschwinden, so ist der Kettenbruch stets divergent, weil jeder Näherungsbruch ungerader Ordnung sinnlos ist (d. h. den Nenner Null hat). Dies ergibt sich ohne weiteres aus der Rekursionsformel für die Näherungsnenner.

Weiter benötigen wir das von Herrn Pringsheim[2]) aus dem Seidel-Sternschen hergeleitete Kriterium: „Der Kettenbruch konvergiert, wenn die Reihe $\sum \sqrt{\frac{d_\nu d_{\nu+1}}{c_{\nu+1}}}$ divergiert.“ Auch hierbei ist zulässig, daß die d_ν teilweise verschwinden; die Möglichkeit, daß alle d_ν mit ungeradem Index verschwinden, kann hier aber gar nicht vorliegen, weil sonst die Reihe $\sum \sqrt{\frac{d_\nu d_{\nu+1}}{c_{\nu+1}}}$ lauter verschwindende Glieder hätte, also nicht divergieren würde.

§ 2.

Wir betrachten jetzt zunächst alternierende Kettenbrüche der speziellen Form

---

[1]) Seidel, Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der Kettenbrüche. Habilitationsschrift, München 1846. — Stern, Über die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbruches. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 37 (1848).

[2]) Über ein Konvergenzkriterium für Kettenbrüche mit positiven Gliedern. Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften, Bd. 29 (1899).

$$(1) \qquad b_0 - \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_4|}{|1} - + \cdots$$

Sind A_ν, B_ν die Näherungszähler und -nenner, so gelten die Rekursionsformeln

$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = b_0, \quad A_\nu = A_{\nu-1} + (-1)^\nu a_\nu A_{\nu-2} \qquad (\nu \geqq 1)$$
$$B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1, \quad B_\nu = B_{\nu-1} + (-1)^\nu a_\nu B_{\nu-2} \qquad (\nu \geqq 1).$$

Also insbesondere auch

$$\begin{array}{l|c} A_{2\nu+1} = A_{2\nu} - a_{2\nu+1} A_{2\nu-1} & 1 \\ A_{2\nu} = A_{2\nu-1} + a_{2\nu} A_{2\nu-2} & 1 \\ A_{2\nu-1} = A_{2\nu-2} - a_{2\nu-1} A_{2\nu-3} & -a_{2\nu}. \end{array}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit den beigeschriebenen Faktoren und addiert dann, so kommt

$$A_{2\nu+1} = (1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1}) A_{2\nu-1} + a_{2\nu-1} a_{2\nu} A_{2\nu-3} \qquad (\nu \geqq 1).$$

Die gleiche Formel gilt für die B_ν. Da außerdem $A_1 = b_0 - a_1$, $B_1 = 1$ ist, so gewinnt man das Formelsystem

$$A_{-1}=1,\ A_1=b_0-a_1,\ A_{2\nu+1}=(1+a_{2\nu}-a_{2\nu+1})A_{2\nu-1}+a_{2\nu-1}a_{2\nu}A_{2\nu-3} \quad (\nu\geqq 1)$$
$$B_{-1}=0,\ B_1=1,\qquad B_{2\nu+1}=(1+a_{2\nu}-a_{2\nu+1})B_{2\nu-1}+a_{2\nu-1}a_{2\nu}B_{2\nu-3} \quad (\nu\geqq 1).$$

Dieses besagt aber nichts anderes, als daß die Brüche

$$(2) \qquad \frac{A_1}{B_1},\ \frac{A_3}{B_3},\ \frac{A_5}{B_5},\ \frac{A_7}{B_7},\ \cdots$$

der Reihe nach die Näherungsbrüche des folgenden Kettenbruches sind:

$$(3) \quad b_0 - a_1 + \frac{a_1 a_2|}{|1 + a_2 - a_3} + \frac{a_3 a_4|}{|1 + a_4 - a_5} + \frac{a_5 a_6|}{|1 + a_6 - a_7} + \cdots$$

Daher ist offenbar die Konvergenz von (3) notwendig für die Konvergenz von (1). Wir setzen jetzt noch

$$(4) \qquad 1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1} \geqq 0 \qquad (\nu \geqq 1)$$

voraus. Dann läßt sich zeigen, daß die Konvergenz von (3) auch hinreicht für die Konvergenz von (1).

In der Tat ist, da der Kettenbruch (3) die Näherungsbrüche (2) hat:

$$(5)\qquad \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} = b_0 - a_1 + \frac{a_1 a_2|}{|1+a_2-a_3} + \frac{a_3 a_4|}{|1+a_4-a_5} + \cdots + \frac{a_{2\nu-1} a_{2\nu}|}{|1+a_{2\nu}-a_{2\nu+1}},$$

und wenn (3) konvergiert, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} = \xi.$$

Wir haben dann nur zu zeigen, daß auch $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = \xi$ ist. Nun geht aber $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ aus $\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}$ hervor, indem man $a_{2\nu+1} = 0$ setzt; also ergibt sich aus (5):

$$(6)\qquad \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = b_0 - a_1 + \frac{a_1 a_2|}{|1+a_2-a_3} + \cdots + \frac{a_{2\nu-3} a_{2\nu-2}|}{|1+a_{2\nu-2}-a_{2\nu-1}} + \frac{a_{2\nu-1} a_{2\nu}|}{|1+a_{2\nu}}.$$

Dies ist ein endlicher Kettenbruch, der nach (4) lauter positive Elemente hat (eventuell einige verschwindende Teilnenner). Sein Wert liegt daher zwischen seinen beiden vorletzten Näherungsbrüchen, also zwischen $\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$ und $\frac{A_{2\nu-3}}{B_{2\nu-3}}$. Da diese aber dem Grenzwert ξ zustreben, so hat in der Tat auch $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ den Grenzwert ξ, womit die Konvergenz von (1) bewiesen ist.

Wenden wir nun auf den Kettenbruch (3) das Seidel-Sternsche Kriterium an (§ 1), so ergibt sich

Satz 1. Die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_4|}{|1} - + \cdots$$

mögen den Ungleichungen genügen:

$$1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1} \geqq 0 \qquad (\nu \geqq 1).$$

Wenn hiebei für alle ungeraden ν Gleichheit statt-

hat, so divergiert der Kettenbruch. Wenn aber mindestens für ein ungerades ν wirklich Ungleichheit statthat, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches darin, daß mindestens eine der beiden Reihen

$$\sum \frac{a_1 a_2}{a_3 a_4} \frac{a_5 a_6}{a_7 a_8} \cdots \frac{a_{4\nu-3} a_{4\nu-2}}{a_{4\nu-1} a_{4\nu}} (1 + a_{4\nu} - a_{4\nu+1})$$

$$\sum \frac{a_3 a_4}{a_5 a_6} \frac{a_7 a_8}{a_9 a_{10}} \cdots \frac{a_{4\nu-1} a_{4\nu}}{a_{4\nu+1} a_{4\nu+2}} (1 + a_{4\nu+2} - a_{4\nu+3})$$

divergiert.

Aus dem Pringsheimschen Kriterium (§ 1) ergibt sich spezieller:

Satz 2. Wenn die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_4|}{|1} - + \cdots$$

den Ungleichungen genügen:

$$1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1} \geq 0 \qquad (\nu \geq 1),$$

und wenn außerdem die Reihe

$$\sum \sqrt{\frac{(1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1})(1 + a_{2\nu+2} - a_{2\nu+3})}{a_{2\nu+1} a_{2\nu+2}}}$$

divergiert, so konvergiert der Kettenbruch.

Wenn für $\nu \geq 1$ durchweg $a_{2\nu+1} \leq 1$ ist, so hat jede der beiden Reihen

$$\sum \sqrt{\frac{a_{2\nu} a_{2\nu+2}}{a_{2\nu+1} a_{2\nu+2}}}, \qquad \sum \sqrt{\frac{(1 - a_{2\nu+1}) a_{2\nu+2}}{a_{2\nu+1} a_{2\nu+2}}}$$

kleinere Glieder als die in Satz 2 auftretende Reihe. Daher kommt a fortiori

Satz 3. Wenn die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_4|}{|1} - + \cdots$$

den Ungeichungen $a_{2\nu+1} < 1$ für $\nu > 1$ genügen, und wenn außerdem wenigstens eine der beiden Reihen

$$\sum \sqrt{\frac{a_{2\nu}}{a_{2\nu+1}}}, \quad \sum \sqrt{\left(\frac{1}{a_{2\nu+1}} - 1\right)}$$

divergiert, so konvergiert der Kettenbruch.

§ 3.

Wir wenden uns jetzt zu dem allgemeinen alternierenden Kettenbruch

$$b_0 - \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} - + \cdots \tag{7}$$

Dieser ist äquivalent mit

$$b_0 - \frac{\frac{a_1}{b_1}\Big|}{|1} + \frac{\frac{a_2}{b_1 b_2}\Big|}{|1} - \frac{\frac{a_3}{b_2 b_3}\Big|}{|1} + \frac{\frac{a_4}{b_3 b_4}\Big|}{|1} - \cdots; \tag{8}$$

die Konvergenzbedingungen von (7) und (8) sind also die gleichen. Man erhält daher Kriterien für den Kettenbruch (7), wenn man die Sätze 1, 2, 3 auf den Kettenbruch (8) anwendet. Speziell aus Satz 1 folgt, indem man die Glieder der entstehenden Reihen in eine etwas bequemere Form bringt:

Satz 4. Die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} - + \cdots$$

mögen den Ungleichungen genügen:

$$b_{2\nu-1}\, b_{2\nu}\, b_{2\nu+1} + a_{2\nu}\, b_{2\nu+1} - a_{2\nu+1}\, b_{2\nu-1} \geq 0 \qquad (\nu \geq 1).$$

Wenn dabei für alle ungeraden ν Gleichheit statthat, so divergiert der Kettenbruch. Wenn aber für

mindestens ein ungerades ν wirklich Ungleichheit statthat, so setze man zur Abkürzung

$$c_\nu = a_{2\nu-1}\, a_{2\nu}\, b_{2\nu-3}\, b_{2\nu+1},$$
$$d_\nu = b_{2\nu-1}\, b_{2\nu}\, b_{2\nu+1} + a_{2\nu}\, b_{2\nu+1} - a_{2\nu+1}\, b_{2\nu-1};$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches besteht dann darin, daß von den beiden Reihen

$$\sum \frac{c_3\, c_5 \ldots c_{2\nu-1}}{c_4\, c_6 \ldots c_{2\nu}}\, d_{2\nu}, \qquad \sum \frac{c_2\, c_4 \ldots c_{2\nu}}{c_3\, c_5 \ldots c_{2\nu+1}}\, d_{2\nu+1}$$

mindestens eine divergiert.

Aus Satz 3 folgt spezieller

Satz 5. Wenn die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} - \cdots$$

den Bedingungen genügen:

$$a_{2\nu+1} < b_{2\nu}\, b_{2\nu+1} \qquad (\nu \geqq 1),$$

und wenn von den beiden Reihen

$$\sum \sqrt{\frac{a_{2\nu}\, b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}\, b_{2\nu-1}}}, \qquad \sum \sqrt{\left(\frac{b_{2\nu}\, b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}} - 1\right)}$$

wenigstens eine divergiert, so konvergiert der Kettenbruch.

A fortiori wird also unter der Bedingung $a_{2\nu+1} \leqq b_{2\nu}\, b_{2\nu+1}$ die Divergenz der Reihe

$$\sum \frac{a_{2\nu}\, b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}\, b_{2\nu-1}} \tag{9}$$

oder auch der Reihe

$$\sum \left(\frac{b_{2\nu}\, b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}} - 1\right) \tag{10}$$

die Konvergenz des Kettenbruches nach sich ziehen. Die Reihe (10) findet sich im 8. Satz von Gmeiner I, der damit neu bewiesen ist. Im 4. Satz von Gmeiner I steht dagegen die Reihe

$$\sum \frac{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}}{a_3 a_5 \ldots a_{2\nu+1}} b_{2\nu+1}. \tag{11}$$

Obwohl deren Bildungsgesetz komplizierter ist als das der Reihe (9), ist doch dieses Gmeinersche Kriterium in dem unseren vollkommen enthalten, indem die Divergenz von (11) stets die von (9) nach sich zieht, aber nicht umgekehrt. In der Tat, bezeichnet man die Reihe (11) mit $\sum c_\nu$, so geht (9) über in $\sum \frac{c_\nu}{c_{\nu-1}}$. Aus der Divergenz von $\sum c_\nu$ folgt aber stets die von $\sum \frac{c_\nu}{c_{\nu-1}}$; denn würde letztere Reihe konvergieren, so müßte $\frac{c_\nu}{c_{\nu-1}}$ beliebig klein werden, also $\sum c_\nu$ erst recht konvergieren.

Endlich findet sich bei Gmeiner II im 9. Satz die Reihe

$$\sum \frac{a_{2\nu}}{b_{2\nu-1} b_{2\nu}}. \tag{12}$$

Da aber $a_{2\nu+1} \leqq b_{2\nu} b_{2\nu+1}$ vorausgesetzt ist, so hat (12) kleinere Glieder als (9), so daß unser Kriterium wiederum weniger verlangt als das Gmeinersche.

§ 4.

Es sollen jetzt auch einige Divergenzkriterien hergeleitet werden. Seien zunächst die Zahlen $a_{2\nu}$, $a_{2\nu+1}$, $b_{2\nu+1}$ monoton wachsend, das heißt

$$a_{2\nu+2} \geqq a_{2\nu}, \quad a_{2\nu+1} \geqq a_{2\nu-1}, \quad b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1}.$$

Dann sind die in Satz 4 auftretenden Zahlen c_ν ebenfalls monoton wachsend, so daß die Glieder der in Satz 4 auftretenden Reihen höchstens gleich $d_{2\nu}$ bzw. $d_{2\nu+1}$ sind. Folglich

zieht die Konvergenz der Reihe $\sum d_\nu$ a fortiori die Konvergenz jener beiden Reihen und daher die Divergenz des Kettenbruches nach sich. Man erhält also

Satz 6. Wenn die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} - + \cdots$$

den Ungleichungen genügen:

$$a_{2\nu+2} > a_{2\nu}, \quad a_{2\nu+1} \geqq a_{2\nu-1}, \quad b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1},$$

und wenn die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [b_{2\nu-1} b_{2\nu} b_{2\nu+1} + a_{2\nu} b_{2\nu+1} - a_{2\nu+1} b_{2\nu-1}]$$

keine negativen Glieder hat und konvergiert, so ist der Kettenbruch divergent.

Sind speziell alle $a_\nu = 1$, so ist die Konvergenz der vorigen Reihe wegen $b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1}$ gleichbedeutend mit der Konvergenz der beiden Reihen

$$\sum b_{2\nu-1} b_{2\nu} b_{2\nu+1}, \quad \sum (b_{2\nu+1} - b_{2\nu-1}).$$

Die Konvergenz der zweiten besagt aber, daß die $b_{2\nu+1}$ einen endlichen Grenzwert haben, und infolgedessen ist die Konvergenz der ersten gleichbedeutend mit der Konvergenz von $\sum b_{2\nu}$. So kommt das folgende Kriterium, welches sich mit dem zweiten Satz von Gmeiner II deckt:

Satz 7. Wenn die Teilnenner des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} - \frac{1|}{|b_3} + \frac{1|}{|b_4} - + \cdots$$

so beschaffen sind, daß erstens die $b_{2\nu+1}$ monoton wachsen, aber einen endlichen Grenzwert haben, und daß zweitens die Reihe $\sum b_{2\nu}$ konvergiert, so divergiert der Kettenbruch.

Weitere Kriterien knüpfen wir wieder an den speziellen Kettenbruch

$$b_0 - \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_4|}{|1} - + \cdots$$

an. Wir setzen voraus, daß die Reihe

$$\sum \frac{a_{2\nu} - a_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}} \tag{13}$$

absolut konvergiere. Dann ist bekanntlich auch das Produkt $\Pi \frac{a_{2\nu}}{a_{2\nu+1}}$ unbedingt konvergent, so daß insbesondere auch jedes beliebig herausgegriffene Teilprodukt konvergiert. Insbesondere werden daher die folgenden vier Produkte konvergieren:

$$\Pi \frac{a_{4\nu-2}}{a_{4\nu-1}}, \quad \Pi \frac{a_{4\nu+1}}{a_{4\nu}}, \quad \Pi \frac{a_{4\nu}}{a_{4\nu+1}}, \quad \Pi \frac{a_{4\nu+3}}{a_{4\nu+2}}.$$

Infolgedessen sind die in Satz 1 auftretenden Reihen dann und nur dann beide konvergent, wenn das gleiche von den Reihen

$$\sum \frac{1 + a_{4\nu} - a_{4\nu+1}}{a_{4\nu+1}}, \qquad \sum \frac{1 + a_{4\nu+2} - a_{4\nu+3}}{a_{4\nu+3}},$$

also schließlich von der Reihe

$$\sum \frac{1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}},$$

deren Glieder bei den Voraussetzungen von Satz 1 ja ≥ 0 sind, gilt. Wegen der absoluten Konvergenz von (13) ist dies aber gleichbedeutend mit der Konvergenz der Reihe $\sum \frac{1}{a_{2\nu+1}}$. Also kommt

Satz 8. Wenn die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_4|}{|1} - + \cdots$$

so beschaffen sind, daß

$$1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1} \geqq 0 \qquad (\nu \geqq 1)$$

ist, und daß die Reihe

$$\sum \frac{a_{2\nu} - a_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}}$$

absolut konvergiert, so divergiert der Kettenbruch, wenn für alle ungeraden $\nu : 1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1} = 0$ ist. Andernfalls ist der Kettenbruch konvergent oder divergent, je nachdem die Reihe $\sum \frac{1}{a_{2\nu+1}}$ divergiert oder konvergiert.

Der auf die Konvergenz der Reihe bezügliche Teil dieses Satzes deckt sich mit dem vierten Satz von Gmeiner II; nur ist dort noch die unnötige Einschränkung $a_{2\nu} \geqq a_{2\nu+1}$ gemacht.

Es hat keine Schwierigkeit, den Satz 8 auf die allgemeineren Kettenbrüche der Form (7) zu übertragen. wobei dann auch der dritte Satz von Gmeiner II als Spezialfall erscheint. Doch wollen wir von der Formulierung absehen. Der elfte Satz bei Gmeiner II lautet:

Satz 9. Wenn die Elemente des alternierenden Kettenbruches

$$b_0 - \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} + \frac{a_4|}{|1} - + - \cdots$$

den drei Bedingungen genügen:

A) $$1 + a_{2\nu} - a_{2\nu+1} \geqq 0 \qquad (\nu \geqq 1)$$

B) $$\frac{a_3 a_5 \ldots a_{2\nu+1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} > \delta > 0, \text{ wo } \delta \text{ von } \nu \text{ nicht abhängt}$$

C) $$\sum \frac{1}{a_{2\nu}} \text{ konvergent,}$$

so divergiert der Kettenbruch.

Auch dieser Satz ist lediglich eine Folge von unserem Satz 8. Denn aus der Bedingung A) folgt zunächst

D) $$\frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}} \leq 1 + \frac{1}{a_{2\nu}}.$$

Wir untersuchen jetzt die unendliche Reihe

E) $$\sum \left(\frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}} - 1\right).$$

Wegen C) und D) bilden jedenfalls ihre positiven Glieder für sich eine konvergente Reihe. Wäre nun die Reihe der negativen Glieder nicht ebenfalls konvergent, so würde die Gesamtreihe E) gegen $-\infty$ divergieren. Also würde das Produkt mit dem allgemeinen Glied $\frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}}$ gegen Null divergieren, weil ja bekanntlich

$$\frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}} < e^{\frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}} - 1}$$

ist. Dies würde aber der Bedingung B) widersprechen. Von der Reihe E) müssen daher die Teilreihe der positiven Glieder und die der negativen Glieder je für sich konvergieren, so daß die Reihe E) selbst absolut konvergiert. Infolgedessen ist aber $\lim \frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}} = 1$, so daß die Reihe

$$\sum \frac{a_{2\nu+1} - a_{2\nu}}{a_{2\nu+1}} = \sum \left(\frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}} - 1\right) \frac{a_{2\nu}}{a_{2\nu+1}}$$

ebenfalls absolut konvergiert. Außerdem ist wegen der Bedingung C) und wegen $\lim \frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu}} = 1$ auch die Reihe $\sum \frac{1}{a_{2\nu+1}}$ konvergent. Nach Satz 8 genügt dies aber für die Divergenz des Kettenbruches.

Damit sind alle Gmeinerschen Kriterien als Spezialfälle der unsrigen nachgewiesen. Denn diejenigen, welche wir nicht ausdrücklich erwähnt haben, sind bei Herrn Gmeiner selbst nur Spezialfälle der erwähnten.

Über Periodizität sommergrüner Bäume Mitteleuropas im Gebirgsklima Ceylons.

Von **Hermann Dingler.**

Vorgelegt von K. v. Goebel in der Sitzung am 6. Mai 1911.

Für das Periodizitätsproblem bei den Holzgewächsen, speziell bei unseren europäischen Laubhölzern, schien mir deren Verhalten im gleichmäßigen tropischen Klima von nicht geringer Wichtigkeit zu sein. Ich hatte daher die Absicht, auf meiner Tropenreise den Anpflanzungen solcher Bäume meine besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden und durch genaue Feststellung ihres momentanen Zustandes und ergänzende Erkundigungen möglichst zuverlässige Anhaltspunkte für ihr Verhalten zu gewinnen. Durch widrige Zufälle wurde meine Arbeitszeit sehr beschränkt, doch gelang es mir über das Verhalten mehrerer im Gebirgsklima Ceylons angepflanzter heimatlicher Holzarten einige Erfahrungen zu sammeln, über welche ich in folgenden Zeilen berichten will. Soweit mir die einschlägige Literatur bekannt wurde, ist bis jetzt nur wenig Eingehenderes über die Materie veröffentlicht worden. Dies wenige datiert zumeist aus älterer Zeit.

Askenasy beklagt (1877), „daß Heers und Hartungs Beobachtungen noch immer die einzigen genauen und ausführlichen Angaben bilden, die wir über den Verlauf der Vegetation in der Nähe der Tropen besitzen“,[1]) und wenn wir nicht

---

[1]) Askenasy, „Über die jährliche Periode der Knospen“. Bot. Zeit. 1877, p. 833. — Heer, „Über die periodischen Erscheinungen der Pflanzenwelt auf Madeira“, in Verh. Schweiz. Naturf. Ges. Glarus 1851. — Hartung, „Die Azoren in ihrer äußeren Erscheinung und nach ihrer geognostischen Natur geschildert“, Leipzig 1860 und „Geologische Beschreibung von Madeira“, Leipzig 1864. — Askenasy behandelt die Frage der phänologischen Erscheinungen und der Periodizität in dieser Abhand-

auf noch bedeutend ältere Literatur zurückgreifen wollen, so finden wir wirklich fast nur gelegentliche Einzelbeobachtungen und kürzere Mitteilungen. Bis heute existieren keine umfassenderen Studien über den Gegenstand. Wirklich wertvolle neue Nachrichten, welche auf eigener Beobachtung beruhen, haben aber neuerdings Reiche[1]) und namentlich Schimper[2]) geliefert, von denen letzterer mit den in seiner Pflanzengeographie niedergelegten Beobachtungen und Deutungen überhaupt den kräftigsten Anstoß zu erneutem Aufgreifen des Problems der Jahresperiodizität in den warmen Klimaten gab.

Meine Beobachtungen können entsprechend der allzu kurzen Zeit, welche mir zur Verfügung stand, die Sache leider bei weitem nicht so klären, wie ich es gewünscht hätte, aber ich hoffe, daß sie durch Beibringung einiger neuen Tatsachen etwas zur zukünftigen Klärung beitragen und gleichzeitig zur weiteren Ausfüllung der Lücken unseres Wissens anregen werden. Wieweit im feuchtheißen tropischen Tiefland unsere europäischen Laubbäume wirklich gedeihen, darüber ist mir außer einigen älteren Literaturnotizen, auf die ich aber nicht näher eingehe, nichts Sicheres bekannt geworden.[3]) In Gebirgslagen gedeihen

---

lung in bemerkenswert unbefangener Weise und kommt auf Grund der damals vorliegenden Beobachtungen aus Makaronesien zu teilweise richtigen hypothetischen Schlußfolgerungen über das vermutliche Verhalten unserer Hölzer im gleichmäßigen tropischen Klima. Er läßt dabei freilich mehr nur die äußeren klimatischen Einflüsse in direkter Wirkung gelten, wogegen sich Pfeffer in seiner „Pflanzenphysiologie", 2. Aufl., II. Bd., p. 271 wendet.

[1]) „Zur Kenntnis der Lebenstätigkeit einiger chilenischer Holzgewächse." Pringsheims Jahrb. 1897.

[2]) „Pflanzengeographie auf physiologischer Grundlage." Jena 1898. — Volkens in „Der Laubwechsel tropischer Bäume" (S.-A. aus „Gartenflora" 1903) geht auf das Verhalten europäischer Bäume in den Tropen nicht ein. — Holtermann berührt in seinem 1907 erschienenen Werk „Der Einfluß des Klimas auf den Bau der Pflanzengewebe" (Leipzig, Engelmann) die Frage des Laubwechsels europäischer Bäume in den Tropen nur kurz (p. 165 u. 166).

[3]) Nur ein Beispiel: R. Schomburgk, „Reisen in Britisch-Guiana in den Jahren 1840—1844" (Bd. I, p. 45) gibt an, daß man in Guiana

sie, wenigstens zum Teil. So wurden in Nuwara Eliya und Hakgala auf Ceylon schon vor Jahren mitteleuropäische Bäume angebaut, von welchen sich nicht wenige bis heute lebend erhalten haben. Schimper erwähnt solche Kulturen in dem Abschnitt „Periodizität in der vegetativen Sphäre“ in seiner Pflanzengeographie. Etwas eingehender spricht er über ähnliche Anpflanzungen im Berggarten von Tjibodas auf Java. Schimper erkannte die Bedeutung der Studien, welche das Verhalten solcher in die Tropen verpflanzter europäischer Baumkolonien zum Gegenstande haben. Die Verpflanzung, richtig vorgenommen mit Festlegung aller Umstände, und mit einer nicht zu kleinen Zahl von Exemplaren, stellt ein sehr wertvolles physiologisches Experiment dar. Auch der umgekehrte Versuch, welcher bisher meines Wissens noch nicht gemacht wurde, Individuen, welche längere Zeit in den Tropen vegetiert hatten oder Ableger bzw. Sämlinge von ihnen wieder in die Heimat zurückzuversetzen, könnte manche Aufschlüsse gewähren.

Die meisten derartigen Anpflanzungen kranken an dem Fehler, daß die Zahl der Individuen eine zu geringe ist. Öfter sind es nur einzelne. Eine Ausnahme bilden aber die zu Nutzzwecken angelegten Kulturen europäischer Obstbäume in Nuwara Eliya und die Anpflanzungen zweier Eichenarten im Botanischen Garten von Hakgala. Letztere bieten die interessantesten Verhältnisse. Sie erheischten eine möglichst genaue Untersuchung.

Am 18. und 19. Oktober und nochmals Ende November 1909 machte ich meine Aufzeichnungen und erhielt nach meiner Rückkehr durch die Freundlichkeit des Herrn Direktor Dr. Willis, dem ich dafür sehr zu Dank verpflichtet bin, noch Frühlingsmaterial nach Europa gesandt.

---

versucht habe, Reben von Madeira, vom Kap und vom Rhein anzupflanzen, aber keine Früchte geerntet habe. „Dasselbe ist mit den Äpfel-, Birn-, Pfirsich- und Aprikosenbäumen der Fall, die ungeheuer wuchern, selten zur Blüte gelangen und niemals Früchte tragen. Ebensowenig habe ich Feigen, Erd-, Johannis-, Stachel- und Himbeeren gesehen.“

Bevor ich zur Schilderung meiner Beobachtungen übergehe, schicke ich einige kurze Angaben über die lokalen und klimatischen Verhältnisse von Hakgala und Nuwara Eliya („Nurelia“) an der Hand des offiziellen „Report on the Colombo Observatory and the Meteorology of Ceylon for 1908“ voraus. Die englischen Maße habe ich umgerechnet in Zentigrade und Millimeter.

Beide Orte liegen in dem zentralen Gebirgsstock der Insel, ersteres, ein isolierter botanischer Garten und Versuchsstation, am Ostabhang in 1701 m Meereshöhe, letzteres, die bekannte kleine Villenstadt und Gesundheitsstation, mit einem kleinen botanischen Garten in öffentlichem Park und sehr zahlreichen Privatgärten, in einem von Waldbergen umkränzten weiten Hochtal bei 1886 m. Beide Orte sind einander benachbart, zeigen gleiche Bodenunterlage (Gneis) und in Bezug auf Temperaturen, Regenmengen, Zahl der Regentage, Wolkenbedeckung und Luftfeuchtigkeit nach vieljährigen Beobachtungen sehr ähnliche Verhältnisse. Die mittlere Jahrestemperatur im Schatten beträgt für H. 15,13° C., für N. 14,61° C. Das niedrigste Monatsmittel (Januar) für H. 14,1°, für N. 13,67°, das höchste (Mai) für H. 17,3°, für N. 16,01°. In H. sind die Temperaturen, entsprechend der etwas tieferen Lage, meist ein wenig höher. Die absolut niedrigste beobachtete Temperatur ist für H. 2,93°, für N. — 2,11°, die absolut höchste für H. 26,1°, für N. 27,66°. Die mittlere Regenhöhe ist in H. 2324 mm, in N. 2398 mm. Die monatlichen Regenmengen sinken nur im Februar und März stärker herab, aber der trockenste Monat, der Februar, hat in N. noch sechs Regentage und für sieben Monate schwankt deren Zahl um 20 herum. In H. sind die Regentage gleichmäßiger verteilt und der Februar hat immer noch acht. Das Jahresmittel der Regentage ist in H. 199 und in N. 201. Die mittlere relative Luftfeuchtigkeit beträgt in H. 85, in N. 87. Nur die von Galle mit 88 übertrifft sie. Die mittlere Bewölkung beträgt in N. 5,7, in H. sogar 6,6. Natürlich ist dabei zu beachten, daß bei unbewölktem Himmel die direkte Sonnenwirkung der nahezu äquatorialen Lage entspricht.

Das Klima der beiden Orte ist also ein ausgesprochen gleichmäßiges und feuchtes. Der kälteste Monat (Januar) entspricht etwa dem kältesten des südlichen Mittelmeergebietes, und der wärmste, der Mai, etwa dem wärmsten Monat Südschwedens, dem Juli. Die Vegetation ist in keinem Monat gehemmt und die sehr vereinzelten schwachen Fröste in Nuwara Eliya, welche leichten heimatlichen Maifrösten zu vergleichen sind, können den kultivierten Europäern keinen Schaden tun. Dagegen bringt die Banane ihre Früchte nicht mehr zur Reife, noch weniger die Papaya. Von Palmen sieht man nur einige eingeführte Formen der warm gemäßigten Klimate.

Quercus pedunculata.

Die ältesten Stieleichen, welche in einigen Exemplaren im Botanischen Garten in Hakgala sich finden, sind nach brieflicher Mitteilung von Herrn Nock sen., dem früheren Superintendenten des Gartens, „über 30 Jahre alt". Sie wurden aus englischen Eicheln in Hakgala erzogen und haben einigemal keimfähige Samen getragen, aus denen Herr Nock Pflanzen erzog. Die mittelgroßen Bäume waren am 18. Oktober und 29. November grün und schienen von unten betrachtet gut belaubt. Zu genauerer Untersuchung eigneten sich die höher angesetzten Kronen aber nicht, wenigstens war ich zunächst nicht in der Lage, eine solche vorzunehmen. Später war sie mir überhaupt nicht mehr möglich.

Eine bequem zugängliche größere Zahl von Stieleichen steht in einer lichten Anpflanzung dicht neben dem Laboratorium am gegen Osten geneigten Hang. Die Pflanzen stammen von 1888 ausgesäten englischen Eicheln und wurden 1891 ausgepflanzt. Manche wurden in früheren Jahren mehrfach von weidendem Vieh und Wild geschädigt. Sie sehen daher sehr ungleich aus. Daß eine Beeinflussung ihres jetzigen periodischen Verhaltens durch diese übrigens seit einer längeren Reihe von Jahren nicht mehr stattgehabte Schädigung vorliege, wäre zwar nicht ganz unmöglich, aber einstweilen weder zu beweisen

noch ganz sicher zu verneinen. Jedenfalls zeigen die zu besprechenden Verschiedenheiten keine Beziehungen zu Wuchs- oder Größenverhältnissen. Auch sonstige Erfahrungen beweisen nichts, denn nicht nur können bei manchen tropischen Bäumen die Individuen der gleichen Art — wie die einzelnen Zweige des nämlichen Baumes — unter vollkommen gleichen Bedingungen sich sehr verschieden verhalten, sondern es nehmen auch Bäume gemäßigter Klimate (darunter auch Stieleichen, Pirus-Arten etc.) im tropischen Gebirgsklima Javas, wie es scheint, ohne eine solche schädigende Veranlassung ähnliches Verhalten an.[1]) Andererseits hat Herbert Wright gewisse Beeinflussungen der Periodizität nach Verstümmelungen sowie bei abnorm schwacher Entwicklung beobachtet.[2]) Einfluß von etwa verschiedener Saatzeit auf die Ausbildung ungleicher Ausschlagszeiten der einzelnen Individuen, an den man auch vielleicht denken könnte, ist bei der doch nicht allzu großen Zahl — einige Dutzend — und der regelmäßigen Pflanzung nicht wahrscheinlich, um so weniger, da ganz ungleich sich verhaltende Individuen bunt durcheinandergewürfelt sind. Bei der nachher zu besprechenden Q. Cerris, deren Zahl in Hakgala sicher einige Hundert beträgt und die zu mehreren Tausend ausgesät wurde, könnte man eher an ungleiche Saatzeit denken, aber gerade hier trifft das Gegenteil vom Verhalten von Q. pedunculata zu: Vollkommene Gleichheit. Im übrigen ist, wie wir sehen werden, die Ungleichheit im Verhalten der Stieleichen bei alledem nicht so groß, daß nicht doch eine einheitliche große Jahresperiodizität alle Individuen umfassen würde. In diese fällt eine einzelne, im Park von Nuwara Eliya stehende jüngere, intakte Pflanze herein, von der besonders zu sprechen sein wird.

Der erste Anblick der Eichenpflanzung war überraschend. Die sehr große Mehrzahl der Pflanzen war belaubt, dabei sah jedes Individuum anders aus, genau wie Schimper die Verhältnisse in Tjibodas schildert. Auf einer und derselben Pflanze

[1]) Schimper, „Pflanzengeographie", p. 266 und 267.

[2]) „Foliar periodicity of endemic and indigenous trees in Ceylon." Ann. Roy. Bot. Gard. Peradeniya 1905, p. 429.

waren gewissermaßen alle Jahreszeiten vereinigt. Nach der ersten Besichtigung kam mir aber doch die Vermutung, daß sich vielleicht eine gewisse Regel im Verhalten herausstellen könnte. Dazu mußte eine größere Zahl von Individuen genau untersucht werden. Um nicht beim Herausgreifen einzelner Pflanzen Täuschungen zu unterliegen, ging ich vom Südende der Pflanzung aus reihenweise vor und nahm am 18. und 19. Oktober 29 Exemplare, vielleicht etwas über die Hälfte der ganzen Pflanzung, auf.[1]) Der Rest, der nicht mehr gleich sorgfältig untersucht werden konnte, würde, nach späterer kürzerer Besichtigung, das Resultat nicht wesentlich geändert haben.

Sämtliche Exemplare hatten strauchigen Wuchs und etwa zwischen 1 und 6 m Höhe. Nur zum kleineren Teil besaßen sie einen kräftigeren, die übrigen überragenden Trieb. An den starken Exemplaren waren Spuren von Schädigungen nicht zu bemerken. Ich werde keine Einzelbeschreibung geben, sondern gruppenweise nach der Ähnlichkeit im Verhalten charakterisieren und dabei, um die Mischung dieses Verhaltens zu zeigen, die Nummern der Reihenfolge nach meiner Aufschreibung beifügen. Es ließen sich nach der Knospen-, Trieb- und Blattentwicklung, der Be- und Entblätterung, sowie dem Alter der Blätter am 18. bzw. 19. Oktober 1909 folgende 5 Gruppen unterscheiden:

I. Die Pflanzen trugen nur alte braunfleckige, halb- oder ganz dürre Blätter, meist in sehr geringer Zahl. Sämtliche Knospen ruhten. 6 Pflanzen gehörten hierher, 2 schwache (Nr. 1 und 3), 3 mittelstarke (2, 5, 18), 1 starke (7). Letztere Pflanze war sehr stark, mit einem die übrigen überragenden 5 m hohen Trieb von 5 cm Durchmesser in Brusthöhe (bei 130 cm). Sie besaß noch einige wenige, fast ganz gebräunte Blätter nahe den Triebspitzen. Ähnlich verhielt sich Nr. 18. Die Pflanzen 1, 2 und 3 waren ganz oder fast ganz blattlos. Nur Nr. 5 war noch einigermaßen reichlicher beblättert. Die Pflanzen boten durchaus das Bild unserer heimischen Stieleichen

[1]) Photographische Aufnahmen gingen leider infolge einer unmittelbar anschließenden Erkrankung zu Grunde.

im November. Der Wiederaustrieb würde nach Angabe von Herrn Nock jun. wohl in 3—4 Wochen beginnen. Mein wiederholter Besuch in Hakgala am 29. November bestätigte diese Vermutung. Bei allen Exemplaren hatte eine Anzahl Knospen getrieben, die meisten Triebe waren noch sehr kurz, nur einzelne bis 7 cm lang. Bei Nr. 5 waren wenige Knospen im ersten Auswachsen, die alten Blätter waren aber fast sämtlich gefallen.

II. Die Mehrzahl der Zweige befand sich in ähnlichem Zustand wie die ganzen Individuen der I. Gruppe. Die Knospen dieser Zweige ruhten. Eine kleine Zahl von Zweigen, die kahl oder fast kahl waren, besaß aber neben meist ruhenden Knospen einige in verschiedenen Stufen der Entwicklung, bis zur Stufe der Blattentfaltung befindliche Jungtriebe. 7 Pflanzen: 3 schwache (Nr. 4, 9, 24), 2 mittelstarke (6, 10, 26), 1 starke (13). Letztere, die stärkste der ganzen Pflanzung, besaß einen besonders starken Trieb von zirka $6^1/_2$ m. Der Austrieb hatte hier seit etwa 10—14 Tagen begonnen.

III. Ein kleinerer Teil der Alttriebe, etwa ein Drittel, trug noch eine geringere Zahl von im Absterben begriffenen Blättern; ihre Knospen waren meist in ruhendem Zustand, einzelne aber im ersten Auswachsen begriffen. Die übrigen Alttriebe, die ganz entblättert waren, trugen ausnahmslos Jungtriebe in allen Entwicklungsstadien bis zu solchen mit gerade ausgewachsenen, noch ganz weichen Blättern. Ein nicht unbedeutender Teil der Knospen aber, auch der obersten, verharrte in Ruhe. 8 Pflanzen: 3 schwache (Nr. 14, 22, 27), 2 mittelstarke (15, 16), 3 starke (11, 17, 21). Nr. 21 besaß neben einer Anzahl schwächerer Äste 2 annähernd gleiche, stärkere und vielfach verzweigte, die sich einigermaßen verschieden verhielten. Der eine neigte in seiner Ausbildung fast mehr zur II. Gruppe. Nr. 16 trug mehrere weibliche Blütenkätzchen, welche kaum verblüht waren. Die ältesten Jungtriebe waren etwa vier Wochen alt.

IV. Wenige Alttriebe trugen noch einige absterbende oder auch schon vertrocknete Blätter und ruhende Knospen. Die große Mehrzahl aber war blattlos und hatte Jungtriebe in allen Entwicklungsstadien erzeugt. Die vollständig gestreckten Jung-

triebe mit ausgewachsenen jungen Blättern bildeten die Mehrzahl. Zahlreiche Knospen, auch in der oberen Region der Zweige, hatten hier ebenfalls nicht ausgetrieben.

6 Pflanzen: 1 schwach (Nr. 28), 2 mittelstark (20, 23), 3 stark (12, 19, 32). Nr. 32 trug ziemlich zahlreiche verblühte weibliche Kätzchen. Von männlichen war nichts zu bemerken, auch am Fuß der Pflanze fanden sich keine Reste davon. Die ältesten Jungtriebe waren vielleicht vier bis fünf Wochen alt.

V. Alle Alttriebe waren blattlos und trugen Jungtriebe in verschiedenen Entwicklungszuständen, die meisten der letzteren waren ausgewachsen und mochten etwa 6 Wochen alt sein. 2 Pflanzen: 1 schwach (Nr. 31), 1 mittelstark (30). Letztere trug einige weibliche Kätzchen, die verblüht waren.

Die 5 Gruppen gingen ineinander über. Gewissermaßen gegensätzlich war aber das Verhalten von I und V, und bis zu einem gewissen Grade auch von II und IV. — Ich füge hier gleich noch die Schilderung der schon erwähnten einzelnen, gut entwickelten jungen Stieleiche an, welche ich am 29. November 1909 im Park von Nuwara Eliya notierte, wo sie frei in einem Blumenrondell steht. Das gut entwickelte, etwas pyramidal gewachsene Bäumchen von zirka 5 m Höhe soll nach Angabe des Gärtners vor 6 Jahren als mehrjährige Pflanze von England gekommen und damals an die Stelle gepflanzt worden sein. Der obere Teil war dicht grün und trug abgeschlossene, höchstens zwei bis zweieinhalb Monate alte Jungtriebe mit ausgewachsenen Blättern, wogegen der untere Teil vielfach noch das alte, dem Absterben nahe oder auch schon abgestorbene Laub besaß und seine Knospen meist ruhten. Dazwischen befanden sich einzelne ganz oder fast ganz entblätterte Zweige mit ganz jungen, noch nicht ausgewachsenen Trieben und Blättern in verschiedenen Entwicklungsstufen, die übrigens in sehr kleiner Zahl auch der mittleren Zone des Baumes nicht fehlten. Die Pflanze würde sich der III. Gruppe der Hakgala-Eichen angereiht haben, außer daß sich hier eine dort nicht vorhandene auffallende Regelmäßigkeit in der Anordnung der

verschiedenalterigen Triebe zeigte. Der obere Teil des Baumes war dem unteren um etwa zwei bis zweieinhalb Monate in der Entwicklung voraus. Es ist zu beachten, daß diese Eiche nicht in Ceylon aus Samen erzogen wurde, sondern daß ihre europäische Periodizität bereits einige Jahre bestanden hatte, bevor das tropische Klima zur Wirkung kam.

Es bleibt mir nun noch übrig, auf den Zustand des Materials einzugehen, welches am 8. Mai 1910 von den geschilderten Hakgala-Eichen geschnitten und mir nach Europa geschickt wurde. Ich bemerke dabei ausdrücklich, daß der Sammler, Plantkollektor Miguel vom Peradeniya-Garten, mit mir in Hakgala gewesen war und wußte, worauf es ankam. Die Zweige hatten das gleiche Aussehen wie im Herbst. Ein Teil der Alttriebe war blattlos oder fast blattlos mit wenigen alten halbabgestorbenen Blättern, mit ruhenden oder in den verschiedensten Zuständen der Entwicklung befindlichen Knospen und jungen Trieben. Ein Teil der letzteren war ausgewachsen und abgeschlossen, aber keiner älter als höchstens 5—6 Wochen. Ein kleiner Unterschied zeigte sich darin, daß auch einige noch gut beblätterte Alttriebe bereits ausgetrieben hatten, was ich im Herbst nicht gesehen hatte, was aber in einer etwas früheren Zeitperiode des Herbstes öfter ähnlich zu sehen gewesen sein dürfte.

Im Frühjahr waren also, ebenso wie am 18. Oktober, nur alte Triebe mit Blättern von 6—7monatlichem Alter und ganz junge von höchstens 6 Wochen vorhanden. Zwischenstufen fehlten. Nach Herrn Nock jun. werden die Blätter der Stieleichen in Hakgala 6—7 Monate alt, was der Lebensdauer der Eichenblätter in Mitteleuropa überraschend gut entspricht. Die Wachstumsintensität der Eichentriebe einer Ausschlagsperiode kommt ebenso, trotz der Nähe des Äquators, in Hakgala und Nuwara Eliya unserer mitteleuropäischen recht nahe. Die häufige und starke Bewölkung muß bei der Kürze des tropischen Tages ihre Wirkung äußern. Die Ausschlagszeiten der geschilderten Stieleichen sind zwar sehr unregelmäßig sowohl nach Individuen als nach Zweigen der nämlichen Pflanze, und umfassen längere Zeiträume, aber sie drängen sich deutlich

in zwei getrennten Perioden zusammen, in einer Herbst- und einer Frühjahrsperiode. Die erstere dauert von September bis Dezember, die letztere von März bis Mai. Eine kleine Anzahl von Individuen macht eine wenn auch nur kurze blattlose Ruheperiode durch, die aber individuell nach Zeiten etwas verschieden ist. Die erste der geschilderten fünf Gruppen beweist dies. Ein Teil der Individuen der IV. und V. Gruppe dürfte im Frühling kurze Zeit kahl oder fast kahl stehen. Die relativ trockene Periode der beiden trockensten Monate des Jahres, des Februar und März, könnte dies möglicherweise etwas begünstigen. Herr Nock sen. schrieb mir: „Quercus pedunculata läßt ihre Blätter fallen einmal im Jahre, aber die Bäume sind nur sehr kurze Zeit kahl.“ Plantkollektor Miguel, dem ich einen Fragebogen zur Ausfüllung übersandte, meldete mir: „Die Stieleichen werden nie kahl; wenn das neue Laub im Frühling erscheint, ist das alte noch am Leben.“ Nach meinen eigenen Aufnahmen und dem Zustand des Frühlingsmaterials vom 8. Mai, zusammengehalten mit den verschiedenen Angaben, kann über das Verhalten der jüngeren Stieleichen-Anlage von Hakgala, wenigstens zur Zeit, kein Zweifel mehr bestehen. Es wäre aber immerhin möglich, daß bedeutendere Schwankungen in verschiedenen Jahren vorkommen, aber darüber könnten nur jahrelang sorgfältig für jedes Individuum geführte Aufzeichnungen Auskunft geben. Nach allen meinen Feststellungen ist die große Mehrzahl der Pflanzen nie ganz ohne lebende Blätter. Eine kleine Zahl verliert dagegen für kurze Zeit ihr Laub völlig oder fast völlig, davon die einen im Herbst, die anderen im Frühling. Der Unterschied zwischen den Angaben der Beobachter beruht ohne Zweifel auf der etwas verschiedenen Anwendung des Begriffs „kahl“. Alle Pflanzen sind aber „zweifach“ oder „doppelt sommergrün“.[1]) Die Knospenentwicklung an den Stieleichen in Ceylon war im Herbst auffallend stark. Die Knospen waren durchweg

[1]) Was einer zweifachen Sommerperiode entspricht und das meist in anderem Sinn gebrauchte „immergrün“ vielleicht entbehrlich machen könnte. Der Terminus ist mangelhaft, doch weiß ich keinen besseren.

länger und spitzer als man sie an unseren Stieleichen zu sehen gewöhnt ist, sie glichen damit denen der Traubeneiche. Auch unentwickelt gebliebene zwischen ausgetriebenen waren so gestaltet. Übrigens sah man nicht selten, ähnlich wie bei uns, wiederholtes Anschwellen und Wiederabschwellen der Seitenknospen am nämlichen Trieb, so daß z. B. einmal die 5., 9., 14. Seitenknospe die übrigen an Größe übertraf. Die im Winter gebildeten Knospen an dem übersandten Frühlingsmaterial (von den gleichen Pflanzen) waren kürzer und stumpfer und damit unseren heimatlichen Stieleichenknospen ähnlicher.

Wie das regelmäßige Erscheinen von Johannistrieben bei unseren Stieleichen, die unter günstigen Umständen zweimal auftreten können (ähnlich wie bei den Traubeneichen), beweist, findet bei ihnen leicht wiederholtes Austreiben statt. Diese Neigung oder Begabung trägt vielleicht zu ihrer bereits genügend erwiesenen Anpassungsfähigkeit an das tropische Gebirgsklima bei. Die Eiche befindet sich da in einem gewissen Gegensatz zur Rotbuche und auch zur Birke, wovon später zu sprechen sein wird.

Das unregelmäßige Austreiben der ceyloneser Eichen ist übrigens keineswegs mit Johannistriebbildung in Beziehung zu bringen, dagegen kann man die zweite Triebperiode im Herbst damit vergleichen. Echte Johannistriebe aus Knospen, die in der gleichen Triebperiode gebildet worden waren, scheinen im Gegenteil selten zu sein. Die Triebkraft bei jeder einzelnen der beiden Ausschlagsperioden ist eher eine schwächere als im wärmeren Mitteleuropa, wenigstens beim herbstlichen Ausschlagen. Jeder Trieb bildet einmal End- und Seitenknospen[1]) und schließt damit für ein halbes Jahr sein Längenwachstum ab. Die Blätter werden dabei nicht älter als bei uns.[2])

[1]) Wie die große Mehrzahl der Bäume, auch der tropischen. Vgl. Volkens, „Der Laubwechsel tropischer Bäume". S.-A. aus „Gartenflora" 1903, p. 594. — Eine einzige johannistriebähnliche Bildung fand ich an einem der übersandten Zweige, nämlich Achselverzweigung eines noch nicht ganz ausgewachsenen Jungtriebs. Solche Dinge kommen als Seltenheit hie und da auch bei uns vor.

[2]) Die verschiedenen Angaben über bedeutend verlängerte Lebens-

Quercus Cerris.

Etwas unterhalb des Laboratoriums in Hakgala steht ein kleiner Hain von Zerreichen. Sein unterer (Süd-) Rand ist frei, sein oberer reicht bis auf eine kaum merkbare Anschwellung, welche oben trockener und steiniger wird. Während der untere Bestand rein ist, sind auf dem Hügel einige australische Eukalypten eingemischt, welche, wesentlich höher wie die Eichen, trotz ihrer lichten Kronen sie doch beschatten und ihnen auch Wurzelkonkurrenz machen. Im unteren tiefgründigen Boden und im vollen Licht des Randes hatten die stärksten Exemplare zirka 8—9 m Höhe und zirka 13—15 cm Durchmesser in Brusthöhe, wogegen die oberen sehr viel schwächer, nur etwa halb so stark und noch schwächer waren. Trotz dieser Verschiedenheit waren am 19. Oktober 1909 alle Individuen ohne Ausnahme im gleichen Zustand. Sie trugen gleichzeitig zwei Blattgenerationen. Eine alte, von der vorigen Triebperiode stammend, mit noch grünen, aber ganz harten und zum Teil trockenfleckigen Blättern, und eine junge mit noch nicht ganz abgeschlossenem Wachstum. Als ich am 29. November 1909 Hakgala nochmals besuchte, waren die alten Blätter fast sämtlich abgefallen, die jüngere (Herbst-) Generation dagegen ausgewachsen und die Triebe abgeschlossen. Diese Generation hält aus bis im nächsten Frühjahr nach Erscheinen der Frühlingsblätter. Herr Nock sen. schrieb mir: „Q. Cerris war zu keiner Jahreszeit blattlos.“ Er teilte mir auch mit, daß die Pflanzen aus einer 1895 gemachten Saat von mehreren tausend Stück stammen und „1897 oder 1898 ausgepflanzt wurden“. Auffallend ist hier gegenüber der Stieleiche die vollkommene Gleichheit im Verhalten aller Individuen, deren Zahl wohl einige hundert betragen dürfte und zwar sowohl der stärksten wie der schwächsten. Es scheint danach, daß

dauer von Blättern sommergrüner Europäer in warmen Gegenden erheischen erneute Prüfung. Manches davon dürfte sich nicht bestätigen. anderes übertrieben sein, z. B. die „mehrjährige“ Dauer der Blätter von Ligustrum vulgare.

die Zerreiche anders auf den Reiz des tropischen Gebirgsklimas reagiert als die Stieleiche. Ein Grund dafür ist zunächst nicht ersichtlich, man müßte denn an ihre südlichere Heimat denken. Über Blühen und Fruchten der Zerreichen konnte ich nichts in Erfahrung bringen. Blüten zu finden gelang mir auch nicht. Vegetativ gedeiht jedenfalls die Art vortrefflich in Hakgala.

Außer den Eichen sollten mehrere andere europäische Laubhölzer, insbesondere Rotbuchen, in Kultur sein. Das Ergebnis meiner Nachfrage war, daß sie in den letzten Jahren eingegangen seien, dagegen würden neuerdings eine Anzahl im Botanischen Garten in Nuwara Eliya gezogen. Am 29. November, also $1^1/_3$ Monate nach meinen ersten Beobachtungen in Hakgala, war es mir möglich, diese Pflanzen zu untersuchen. Wie mir ein jüngerer Gärtner mitteilte, sind alle dreijährig aus England gekommen und seit fünf Jahren an ihrem jetzigen Platze eingepflanzt. Es waren einzelne Exemplare von Rotbuchenformen, von eßbarer Kastanie, Flaumbirke, Pyramidenpappel und Platane. Eine kleine strauchige Ulme befand sich gerade im Absterben.

Fagus silvatica.

Ein mannshohes Bäumchen mit kleinen Blättern (kaum $^2/_3$ so groß als unsere gewöhnlichen Buchenblätter) an kurzen Zweigen sitzend. Ein größerer Teil derselben im Vertrocknen oder bereits vertrocknet. Eine Anzahl Knospen haben neu ausgetrieben und zum Teil bereits vollkommen ausgebildete Blätter an kurzen Trieben entwickelt, an deren Stielbasen noch die Nebenblätter haften. Ein anderer Teil der Knospen zerstreut zwischen jungen ausgewachsenen Trieben, oder auch am oberen entblätterten Ende von Alttrieben, verharrt noch ruhend oder beginnt gerade auszutreiben. Dies war das Bild. Die Pflanze sah kümmerlich aus, und nachdem verschiedene früher hier und in Hakgala kultivierte Exemplare schon eingegangen sind, ist bei der sichtbar schwachen Blattentwicklung resp. Triebneigung kaum auf längeres Gedeihen zu rechnen. Es wurde

mir gesagt, die Pflanze „verliere im Sommer für einen Monat ihre Blätter“. Ich konnte das nicht weiter kontrollieren. Es schien mir aber nach der ganzen Entwicklung, daß die Pflanze sich wahrscheinlich ähnlich wie die Stieleichen verhalten dürfte.

An dem offenbar schlechten Gedeihen der Buche in Nuwara Eliya und Hakgala könnten verschiedene Ursachen beteiligt sein. Man könnte zunächst an ihre geringe Ausschlagsfähigkeit[1]) denken, indessen besteht für unsere jetzigen Kenntnisse eine irgendwie zu begründende Beziehung zwischen diesen beiden Dingen nicht. Manchmal bietet die Buche innerhalb ihrer europäischen Heimat unerwartete Kulturschwierigkeiten, für die man mehrfach lokal fehlende Bedingungen für Mycorrhiza-Bildung als Grund anzunehmen geneigt ist. Schließlich könnte vielleicht Kalkmangel im Gneisboden von Hakgala und Nuwara Eliya der oder ein Grund des Nichtgedeihens sein — indessen konnte ich über den Kalkgehalt der dortigen Böden nichts in Erfahrung bringen.

Ähnlich wie diese typische Rotbuchenform verhielten sich je ein niedriges strauchförmiges Exemplar der Blutbuche (var. purpurea Ait.) und der schlitzblättrigen Buche (var. heterophylla Ait.).

Castanea vesca.

Das einzige Exemplar, ein zirka 2 m hohes Bäumchen, war gesund und kräftig und besaß wohlbeblätterte Triebe von einem einzigen sichtlich gleichalterigen Schub mit abgeschlossenem Wachstum. Nach Angabe des Gärtners soll die Kastanie „immergrün“ sein. Vermutlich hat sie danach, ähnlich wie die Zerreiche, zwei Austriebsperioden, ist also nach der hier gewählten Bezeichnungsweise „zweifach sommergrün“.

[1]) Gelegentlich in der Literatur zu findende Angaben über besonders starke Neigung der Rotbuche zu Johannistriebbildung, z. B. Büsgen, „Bau und Leben unserer Bäume“, p. 8, stimmen mit Erfahrungen in Unterfranken nicht überein, wenigstens nicht für normalwüchsige Buchen. Nur in abnorm feuchten Jahren sieht man an diesen Johannistriebe auftreten. Bei meinen früheren Schneidelungsversuchen zeigte Fagus sehr geringe Triebkraft (Ber. D. B. G. 1905, S. 468).

„Betula alba."

(Betula pubescens Ehrh. v. odorata Bechst. ?)

Ein lichtes, schwach beblättertes Bäumchen von zirka $2^1/_2$ m Höhe, dessen sparsame Zweige (Langtriebe) im Begriff waren, ihre Blätter fallen zu lassen. Etwa die Hälfte war bereits abgefallen. Ziemlich zahlreich waren fruchtbare alte Kurztriebe mit fast fruchtreifen weiblichen aufgerichteten Kätzchen und 1—3 Blättern, welche aber noch festsaßen. Ein großer Teil der Zweige hatte ruhende oder gerade sich öffnende Knospen, von denen ein Teil junge weibliche Blütenkätzchen, meist ohne basale Laubblätter (selten mit einem einzelnen minimalen grünen Blättchen), gerade völlig herausgeschoben hatte. Männliche Kätzchen fehlten vollständig.

Das Bäumchen bot ein sehr auffallendes Bild. Vermutlich werden zur Zeit des ersten Austriebs mit den weiblichen auch männliche Kätzchen gebildet, indessen konnte ich keinen Anhaltspunkt dafür gewinnen, auch keine Auskunft erhalten. Die Früchte der älteren Kätzchen waren, soweit ich sie untersuchen konnte, taub. Ob und wieweit hier regelmäßige Austriebsperioden auftreten, blieb mir unklar, auch über die Dauer der Blätter konnte ich nichts in Erfahrung bringen. Die älteren Kätzchen konnten nicht wohl älter als drei Monate sein. Ob diese Birke das tropische Klima lange ertragen wird, dürfte sehr zweifelhaft sein. Jedenfalls kümmert sie und damit hängt vielleicht auch das abnorm gesteigerte Blühen zusammen.[1])

Populus pyramidalis.

Das Exemplar stellte ein zirka 4 m hohes, offenbar recht gut gedeihendes, gut beblättertes Bäumchen dar. Die Langtriebe der Pyramidenpappeln wachsen bei uns bekanntlich (wie die der Weiden) ununterbrochen weiter bis gegen das Ende

[1]) Die Birke hat wie die Rotbuche ein sehr mäßiges Ausschlagsvermögen. An geschneidelten (entasteten und entknospten) Bäumen bildet sich nur wenig und kümmerlicher Ausschlag, wie frühere Versuche zeigten. Die Natur dieser Bäume ist eine sozusagen „starre".

der Vegetationsperiode. Inmitten solchen Wachstums befand sich die Pflanze. Nach der Versicherung des Gärtners erhält sie sich das ganze Jahr über grün, indem zu jeder Zeit sich Triebe im Wachstum und Blatterzeugung befinden.

Die Triebe hatten alle zeitweilig mit Knospe abgeschlossen, wie man sofort erkennen konnte, aber offenbar treiben die Knospen sehr rasch wieder aus. Blätter befanden sich ausschließlich an den letzten Trieben und nicht ein einziger von diesen war zur Zeit blattlos. Auch die längsten Langtriebe waren von sehr mäßiger Länge, nicht ein Drittel so lang als bei normalen kräftigen Pflanzen gleicher Größe in Mitteleuropa. Augenscheinlich hatte im Herbst ein Blattwechsel stattgefunden, die alten Blätter hatten, wenn die Angaben, welche mir gemacht wurden, richtig sind, die Entstehung der ersten neuen überlebt und waren dann sämtlich abgefallen. Offenbar findet hier zweimaliger Blattschub im Jahre statt, im Frühjahr und im Herbst. Die Blätter waren ziemlich klein, im Durchschnitt etwa $^1/_2$ bis $^2/_3$ so groß wie bei normalen Pflanzen gleicher Größe in Mitteleuropa.

Platanus „acerifolia" (W. ?).

Das zirka 4 m hohe Bäumchen war gut beblättert und in vollem Wachstum seiner Langtriebe, während kürzere Triebe mit nur 1—3 Blättern, welche an den unteren Teilen der vollständig entblätterten Alttriebe saßen, augenscheinlich ihr Längenwachstum abgeschlossen hatten. Nach Angabe des Gärtners soll die Pflanze „eine Zeitlang" kahl stehen. Wann? konnte ich nicht erfahren.

Wahrscheinlich findet auch hier regelmäßiger zweimaliger Blattschub im Jahre statt, im Frühjahr und Herbst und zu einer dieser Zeiten, nicht unwahrscheinlich im Frühjahr, vermutlich Laubfall vor der Neubildung.

Mitteleuropäische Obstbäume.

Soweit mir die Literatur zugänglich war, liegen nur sehr knappe oder ungenaue Angaben über das Verhalten der Obstbäume gemäßigter Klimate, welche in Ceylon eingeführt sind, vor. Mitteleuropäisches Obst sieht man allgemein in den Gärten von Nuwara Eliya kultiviert, am häufigsten Birnen und Pfirsiche, weit seltener Kirschen, Pflaumen und Äpfel und nur ganz ausnahmsweise sah ich Weinstock und Maulbeere. Von südeuropäischen Obstarten Granaten und Feigen und eine Pflanze, welche im Mittelmeergebiet freilich nur krautig ist und ein Gemüse liefert, hier aber einen hochwüchsigen verholzten Strauch mit säuerlichen Obstfrüchten bildet: Solanum melongena L. („Aubergine"), die „Eierfrucht" oder „Brignols" der Engländer. Man möchte freilich kaum glauben, daß die beiderlei Formen wirklich zusammengehören, wie angegeben wird.

Ich habe mich soweit irgend möglich über das Verhalten dieser Arten zu unterrichten gesucht, besonders über die erstgenannten fünf. Es ist merkwürdig, daß man die größte Mühe hat, etwas Sicheres über diese Dinge zu erfahren, sogar von Leuten, welche sich selbst mit Obstbaumzucht abgeben. Mehrfach ergaben sich neben offenbaren Irrtümern und Ungenauigkeiten wenigstens scheinbare Widersprüche. Ich habe alle mir zugänglichen Exemplare, auch in einigen Privatgärten, untersucht. Ferner ließ ich mir durch den auch gärtnerisch wohlunterrichteten Plantkollektor von Peradeniya Gardens, Miguel de Silva, im Frühjahr 1910, wie von den Eichen, Zweige aller zugänglichen Obstarten sammeln und gleichzeitig einen Fragebogen über ihr Verhalten in den einzelnen Monaten auf Grund nochmals an Ort und Stelle eingeholter Erkundigungen und Sichtnahme ausfüllen.

Das Gesamtresultat dieser Nachforschungen geht nun dahin, daß die genannten fünf europäischen Obstarten sich alle annähernd ähnlich, um nicht zu sagen gleich verhalten. Sie entwickeln zweimal im Laufe von zwölf Monaten Blätter, Blüten und — unter Umständen vielleicht auch — Früchte, d. h. letztere

werden in der Regel nur einmal im Jahre ausgebildet, wogegen die Blüten der jedesmaligen anderen (2. oder 1.) Periode unfruchtbar bleiben. Über den Blattfall liegen zum Teil gegensätzliche Behauptungen vor, auch von Leuten, welche hinreichend vertrauenswürdig waren, so daß ohne Zweifel die verschiedenen Individuen ähnlich wie bei den Stieleichen sich etwas verschieden verhalten. Auch ist es nicht ausgeschlossen, daß die gleiche Pflanze in den verschiedenen Jahren sich ein wenig verschieden verhalten kann. Meist tritt aber auch hier eine deutliche Periodizität hervor, welche sich an die der Stieleichen mehr oder weniger nahe anschließt.

Für Pirus communis L., und zwar die Kulturform unserer gewöhnlichen Birne, für welche ich am meisten Daten erhielt und deren Verhalten ich selbst am besten kontrollieren konnte, ergab sich folgendes: Laubwechsel, Blühen und Fruchten erfolgt zweimal im Jahre und zwar der erstere jedesmal nach der Fruchtreife, die ihrerseits mit Schluß je einer Blütezeit noch zusammenfällt oder unmittelbar darauf folgt. Die beiden Blütezeiten dauern etwa drei Monate, von Mai bis Juli und von Oktober bis Dezember. Die Früchte der ersteren Blütezeit reifen Ende Dezember oder Januar, eventuell noch im Februar, die der letzteren im Juni oder Juli. Die Angaben über Kahlstehen der Bäume beim Blattwechsel gehen auseinander und es ist kaum zu zweifeln, daß beides, dauernde Belaubung und zeitweiliges Kahlstehen, vorkommt. Namentlich im Februar oder März scheint starke oder völlige Entblätterung für einige Wochen häufiger zu sein als über die Neubelaubung hinausreichende Bewahrung des alten Laubes.

Im Garten des Zivilhospitals von Nuwara Eliya, in Bakers Ward, wo ich mich einige Zeit aufhalten mußte, waren die Birnbäume, mehrere sehr kräftige alte „Zwergbäume“, Ende November voll belaubt mit jüngeren Blättern und trugen neben ziemlich zahlreichen noch unreifen Früchten von zirka $3^1/_2$—5 cm Länge eine kleinere Zahl von Blütenständen. Es wurde mir mitgeteilt, daß die Früchte von Juliblüten stammen und im Januar reifen. Die gleichzeitig vorhandenen Herbstblüten da-

gegen pflegten abzufallen, ohne Frucht anzusetzen. Im Frühjahr, im Februar und in den März hinein, würden die Bäume kahl stehen. Ganz ähnliches sah ich am 1. Dezember 1909 in dem kleinen Botanischen Garten und in dem großen Obstgarten des Bungalow „Lake view".

Die Birnzweige, welche ich getrocknet aus dem Botanischen Garten von Hakgala erhielt, waren wie die Eichenzweige am 8. Mai 1910 gesammelt worden und trugen ebenfalls gleichzeitig Blüten und Früchte und zwar die letzteren in einem annähernd ähnlichen, vielleicht etwas jüngeren Entwicklungsstadium wie die Ende November in Nurelia beobachteten. Sie mußten in 1½ bis 2 Monaten ausreifen. So ist kein Zweifel, daß die Bäume in der Regel einmal jährlich Frucht bringen, entweder von der ersten oder von der zweiten Blüte, und daß die Blüten der anderen Blütezeit unentwickelt abfallen.

Ganz ähnlich sollen sich nach der Beantwortung meines Fragebogens durch Plantkollektor Miguel die übrigen europäischen Obstarten verhalten. Was die Pfirsiche (Prunus persica) betrifft, so kann es wirklich nicht anders sein, denn die Angaben stimmen mit dem, was ich selbst gesehen habe. Am 1. Dezember 1909 trugen die zahlreichen Pfirsichbäume von „Lake view" mäßig zahlreiche, ziemlich große, noch unreife Früchte, die in 1—1½ Monaten reif werden sollten. Andererseits erhielt ich von Hakgala Zweige vom 8. Mai mit etwa ebenso großen Früchten und gleichzeitig Resten von Blüten, welche nicht angesetzt hatten. Blüten und minimale Fruchtansätze sah ich am 18. Oktober in Hakgala und am 3. Dezember in Nuwara Eliya. Mit dem Blattwechsel steht es ähnlich wie bei Pirus communis. Ich sah im Oktober, Ende November und Anfang Dezember nur beblätterte Bäume, aber nach verschiedenen Angaben scheint im Frühjahr (Februar), wenigstens individuell, ein mehrwöchentliches Kahlstehen vor dem neuen Laubausbruch vorzukommen, ebenso wie im September.

Selbst sah ich übrigens am 19. Oktober in Hakgala die Belaubungsverhältnisse der Pfirsiche ähnlich wie man sie bei

uns etwa um $1^1/_2$ Monate früher zu sehen pflegt, bevor das Längenwachstum der Langtriebe zum Stillstand gekommen ist — freilich mit einem sehr wesentlichen Unterschied: am unteren, bereits entblätterten Teil des Triebes waren aus den Achselknospen Blüten hervorgebrochen. Einige von diesen waren geöffnet, einige andere bereits verblüht und hatten jungen Fruchtansatz. Auch oberhalb dieser blütentragenden Langtriebregion waren ein kleines Stück weit die Blätter abgefallen, aber ihre Knospen hatten, wie bei uns, zwei- oder dreiblättrige, mit Knospe abgeschlossene Kurztriebe gebildet, deren Blätter lebten. Noch etwas höher oben waren auch die deckenden Laubblätter dieser Kurztriebe noch erhalten und darüber waren scheinbar ruhende Knospen in den Achseln der ausgewachsenen Blätter gebildet, während die noch in Streckung befindliche Triebspitze ganz junge und jüngste Blätter trug. Die Triebe waren in deutlichem Längenwachstum begriffen. Eine kleinere Zahl von Langtrieben, welche bis zur Spitze entblättert waren, trugen seitlich einzelne oder sparsame ältere Kurztriebe mit älteren Blattrosetten an der Spitze, oder einzelne sonst entblätterte Langtriebe hatten sich unter Verkürzung ihrer obersten Internodien in Blattrosetten tragende Kurztriebe umgewandelt. Die Bäume trugen im Gegensatz zu jenen von Lake view keine in der Entwicklung vorgeschritteneren Früchte.

Nach diesem Befund konnten die Bäume im September nicht kahl gestanden haben, denn die älteren Blätter reichten ohne Zweifel in den Frühling zurück. Andererseits boten auch die Zweige vom 8. Mai 1910 ein ähnliches, um nicht zu sagen gleiches Bild — abgesehen natürlich von den weit vorgeschritteneren Früchten —, so daß auch bei diesen Bäumen nicht von einer kurz vorher stattgehabten vollkommenen Entblätterung die Rede sein konnte. Der Pfirsich ist wohl auch zum Teil dauernd belaubt und „zweifach sommergrün“. Im ganzen hatte ich von den gesehenen Bäumen den Eindruck einer ziemlich dürftigen Beblätterung und eines bescheidenen Fruchtansatzes, die sich nicht mit den Verhältnissen der in unseren milderen Gegenden kultivierten Pfirsiche messen können. Die

Früchte werden aber nach übereinstimmendem Bericht gut reif und sehr wohlschmeckend.

Von der Kirsche, „Cherry“ (eigentlich Sauerkirsche, Prunus Cerasus — wenigstens geht die Pflanze unter diesem Namen), sieht man da und dort Exemplare, zum Teil starke Bäume, wie man sie bei uns von Pr. avium, aber nie von Pr. Cerasus zu Gesicht bekommt. Die Diagnose stimmt sonst im allgemeinen auf den angegebenen Namen, nur haben, soweit ich nach eigener Beobachtung reden kann, die Bäume auffallend große und sehr lang spitz ausgezogene Blätter sowie rosenrote Blüten. Nur ein kleines Bäumchen in Lake view hatte weiße — ich konnte gerade dieses Exemplar leider nicht genauer untersuchen. — Ich sah in den ersten Tagen des Dezember nur Blüten, aber keine Früchte. Diese sollten nach einigen Angaben reifen, rot gefärbt und eßbar sein. Die Beblätterung war Anfang Dezember eine sehr dichte. Eine genaue Untersuchung der Kronen war mir leider nicht möglich. Zweige aus dem Botanischen Garten in Hakgala vom 8. Mai 1910 blühten nicht und waren ebenfalls gut beblättert und zwar bestanden sie ausschließlich aus Alttrieben, die mit Knospen abgeschlossen hatten und alte lederige, aber noch ganz gesunde Blätter trugen. Gegen die Angabe, daß die Kirschen fruchten sollten, war ich mißtrauisch, da ich nirgends einen Fruchtansatz, sondern nur Abfall von abgeblühten Blüten gesehen hatte. Neuestens teilt mir Miguel nach wiederholtem Aufenthalt in Nuwara Eliya unter Korrektur seiner ersten Angaben mit, daß die Kirsche dort in der Tat keine Früchte trage.[1]) Die Bäume sollen nach seinen neuesten Erkundigungen nach dem Blattfall eine Zeitlang kahl stehen, doch gibt er keine Zeit an und hat es nicht selbst gesehen.

---

[1]) In der früher angeführten Abhandlung Askenasys (p. 841) ist zu lesen, daß nach Decandolle, „Geographie botanique“ I, S. 391 der Kirschbaum in Ceylon immergrün geworden sei und keine Früchte ansetze. Tatsächlich gibt aber Decandolle nur das erstere an, vom Nichtfruchten der Kirschbäume auf Ceylon sagt er an der angegebenen Stelle kein Wort. In Schomburgks Reisen in Britisch-Guyana, welche Askenasy auch anführt, steht nichts von Kirschen. (Vgl. Anmerkung 3, S. 219.)

Bei Prunus insititia L. stimmt dagegen meine eigene Erfahrung, einerseits weit vorgeschrittene Früchte am 1. Dezember in Lake view an beblätterten Bäumchen, andererseits ebensolche (daneben auch noch etwas jüngere) an von Hakgala vom 8. Mai 1910 erhaltenen, ebenfalls beblätterten Zweigen mit den Angaben Plantkollektor Miguels. Die letzteren Zweige trugen meist ältere Blätter. Vereinzelte Triebe waren im ersten Wachstum begriffen und besaßen neue Blätter in ganz jugendlichen Entwicklungszuständen. Blüten fehlten. Auch an den Bäumchen in Lake view waren keine zu sehen. Die Früchte reifen nach übereinstimmenden Angaben aus, woran nach meinen Befunden nicht zu zweifeln ist. Sie sollen sehr wohlschmeckend werden. — Die Art ist übrigens, wie es scheint, nicht häufig in Kultur.

Unseren Kulturapfel (Malus paradisiaca Med.) sieht man ebenfalls nicht häufig. Am 1. Dezember sah ich in Lake view einige fast blattlose Zwergbäumchen mit sparsamen, zirka 4 cm Durchmesser haltenden unreifen Früchten. Diese sollen reif bis faustgroß und wohlschmeckend sauersüß werden. Nach ihrem Entwicklungsstand konnten die Früchte Ende Januar oder Anfang Februar ihre Reife erreichen. Zweige vom 8. Mai, von Hakgala, hatten vor einiger Zeit verblüht und einige kleine Fruchtansätze von zirka 1½ cm waren vorhanden. Vorgerückte Früchte fehlten. Die Zweige trugen zum Teil noch alte Blätter, gleichzeitig waren aber auch im Wachstum begriffene Langtriebe mit jungen Blättern in verschiedenen Entwicklungszuständen vorhanden. Vielleicht treten danach doch manchmal stärkere Verschiebungen der Entwicklungsperioden ein. Nach Miguels Angaben verhält sich aber der Apfel im allgemeinen wie die Birne.

Über die sonst noch genannten Fruchtbäume habe ich keine Erfahrungen, nur will ich erwähnen, daß ich am 3. Dezember einen kleinen Baum von Morus nigra in voller Frucht und gleichzeitig in Blüte sah. Die Früchte bzw. Fruchtstände waren rot gefärbt, angenehm sauer und jedenfalls in höchstens 3—4 Wochen reif. Mittlere Zustände zwischen Blüte und aus-

gewachsener Frucht fehlten wie gewöhnlich. Auch dieser Baum dürfte danach ähnliche Entwicklungsperioden haben wie die früher genannten.

Das einzige obsttragende Holzgewächs, welches in den Gebirgslagen Ceylons gleichzeitig alle Zustände von der Blüte bis zur reifen Frucht an den voll beblätterten Zweigen aufwies, war das in der ersten Aufzählung erwähnte Solanum Melongena L. Ich habe es nur an zwei Orten gesehen, im Garten von Bakers Ward Ende November ein paar kleine blühende Sträucher ohne Früchte und am 1. Dezember im Garten des Grand Hotel, wo ein zirka 2½ m hohes Gebüsch mit Früchten in allen Entwicklungsstadien (neben Blüten und Blütenknospen) überladen war. Die einer Riesenpflaume ähnelnden dunkelviolettroten bereiften Früchte („Beeren") sind säuerlich von Geschmack und liefern vorzügliches Kompott.[1])

Von unserem Weinstock sah ich nur ein einziges Exemplar am 1. Dezember im Obstgarten von Lake view, eine Spalierpflanze von etwa 2 m Höhe an einer gegen Ost gerichteten Mauer. Der Stock war kräftig und gut belaubt, die Lotten in vollem Trieb. Blüten oder Spuren von Früchten fehlten vollständig. Sicheres über Blühen und Fruchten konnte ich aber nicht erfahren. Trotz gegenteiliger Behauptung eines Gärtners habe ich Verdacht, daß er steril bleibt.[2])

Aus dem Vorgetragenen ergibt sich, abgesehen von wenigen Ausnahmen und einzelnen nicht genügend geklärten Vorkommnissen, deutliche Periodizität einer Anzahl aus gemäßigtem Klima

[1]) Wenn die im Mittelmeergebiet allgemein angebaute einjährige krautige Form, die „Aubergine", wirklich nur eine Kulturrasse der ceyloneser (oder ostindischen?) „Brignols" mit holzigem Strauchstamm darstellt, so hätten wir in der ersteren eine rein klimatische Anpassung, ähnlich wie bei dem einjährigen Ricinus unserer Gärten. R. wird bekanntlich schon in den wärmeren Mittelmeerländern zum kleinen Baum.

[2]) Nach nicht zu bezweifelnder Angabe trägt der Weinstock im trockenheißen tropischen Klima Nordceylons wie der peruanischen Westküste Südamerikas Frucht.

stammender sommergrüner Bäume im tropischen Gebirgsklima Ceylons. Der in Europa einmalige Kreis ihrer Lebensfunktionen wird, abgesehen vom Fruchten, in Ceylon zweimal im Jahre durchlaufen. Die Bäume werden von „sommergrünen“, d. h. einfach sommergrünen, zu „zweifach sommergrünen“.

Perennierende höhere Gewächse ganz ohne Periodizität sind auch in den klimatisch gleichmäßigsten Gebieten der Erde Ausnahmen. Freilich in absolutem Sinn gleichmäßiges Klima existiert überhaupt nicht. Alljährlich oder auch halbjährig um die gleiche Zeit eintretende Temperatur- oder Feuchtigkeitsänderungen, wie sie auch den gleichmäßigeren Tropenklimaten nicht ganz fehlen, müssen einen gewissen Eindruck auf die sensibeln pflanzlichen Organismen machen und sie nötigen, sich auf die gegebenen Verhältnisse „einzustellen“. Äußere Beeinflussungen werden die meist mehr oder weniger labilen Lebenstätigkeiten begünstigen, also beschleunigen oder hemmen und damit verzögern. So wird allmählich der für die nicht wanderfähige Pflanze günstigste Zustand in der Betätigung ihrer Lebensfunktionen durch eine Art „Einstellung“ erreicht werden können, wenn nicht zu geringe Elastizität oder sogar völlige Starrheit im Wege steht.

Perennierende Pflanzen gemäßigter Klimate, welche in einem halben Jahre alle Phasen ihrer Lebensfunktionen absolvieren können und müssen, und plötzlich in ein Klima versetzt werden, in welchem ihnen während des ganzen Jahres, also der doppelten Zeit, die gleichen oder sehr ähnliche Bedingungen wie in der Heimat geboten werden, würden sich demnach am leichtesten in die neuen Verhältnisse, in denen die ununterbrochen einwirkenden Lebensreize sie nicht zur Ruhe kommen lassen, einpassen, indem sie den ganzen Kreislauf ihrer Funktionen, den sie nicht ohne weiteres verlängern können, zweimal durchlaufen und dabei nach dem Ökonomieprinzip das am mindesten benötigte — bzw. den dazu nötigen Aufwand — einsparen. Im Klima von Nuwara Eliya und Hakgala schließen sich an die feuchtkühleren Monate Dezember und Januar direkt der trockenkühlere Februar und der zwar

wärmere, aber auch trocknere März an und stellen so immer noch ein gewisses Analogon zu unserem Winter dar. Diese Zeit bedeutet kein Hindernis für die Lebensfunktionen unserer mitteleuropäischen Hölzer, aber sie dürfte doch relativ etwas hemmen und vielleicht im Februar und März den Fall der gealterten Blätter etwas begünstigen. Damit begünstigt sie aber die von den Bäumen in der Anlage mitgebrachte Periodizität mit dem mehr oder weniger festgelegten alljährlichen Frühlingsaustrieb. Im Herbst folgt anstatt der Winterruhe eine zweite, in der Winterhälfte vielleicht etwas trägere Wiederholung des Tätigkeitskreises, welche im Frühling abläuft.

Reiche[1]) gibt an, daß die aus Mitteleuropa in Chile eingeführten Obstbäume sich vollständig an die veränderte Verteilung der Jahreszeiten gewöhnt haben, nur die Pfirsichbäume sollen in sehr geschützter Lage immergrün geworden sein. Ähnliches berichtet Herbert Wright[2]) von in Johannisburg in Südafrika angepflanzten englischen Eichen. Sie lassen danach gegen Ende Mai ihre Blätter fallen und bleiben kahl bis Ende August, um welche Zeit die neuen Blätter erscheinen. Im Anschluß an diese folgt die Blüte und um Weihnachten reifen die Früchte. Dabei scheint vielleicht nur die lange Lebenszeit der Blätter auffallend und mir nicht recht wahrscheinlich. Indessen könnte sich diese bei näherer Kenntnis sehr wohl wie bei uns und in Ceylon auf eine annähernd siebenmonatliche reduzieren, indem Johannistriebe gebildet werden oder mehrere Blattschübe zu verschiedenen Zeiten stattfinden könnten. Zum herbstlichen Blühen kommen, wie wir sahen, auch manche Individuen auf Ceylon. Damit ist aber eine direkte Überleitung zu dem Verhalten in Südafrika gegeben. Es ist auch gar nicht ausgeschlossen, daß bei uns Johannistriebe im Hochsommer

---

[1]) l. c., p. 98.

[2]) Herbert Wright, „Tropical timbers and their rings of growth". S.-A. aus „The Edinburgh Press", Calcutta. 10 S. kl. 8⁰. (Jahr?) Ich verdanke den letzteren Abdruck der Freundlichkeit des Herrn Kurator Macmillan in Paradeniya Gardens. Der Aufsatz ist im Justschen Jahresbericht nicht erwähnt.

zum Blühen kommen könnten, indessen ist mir kein Beispiel zur Kenntnis gekommen. Es sind übrigens zahlreiche ähnliche Periodenverschiebungen längst bekannt, nur weiß man nicht, ob sie plötzlich oder langsam eingetreten sind.

Einen höchst interessanten Fall von allmählich gesteigerter klimatischer Beeinflussung der Periodizität einer Baumart berichtet Herbert Wright (l. c.) nach Dr. Watt. Nachdem er, wie es scheint, bisher in der deutschen Literatur nicht beachtet wurde, führe ich ihn seiner Wichtigkeit halber wörtlich an: „In den Nilagiris angepflanzte Bäume von Acacia dealbata Link, welche in Neusüdwales, Victoria und Tasmania zu Hause ist, haben vollständig gewechselt. Sie blühten 1845 und bis etwa 1850 im Oktober, was mit ihrer Blütezeit in Australien übereinstimmt, aber um 1860 wurde bemerkt, daß sie im September blühten; 1870 blühten sie im August; 1878 im Juli und 1882 begannen sie im Juni zu blühen, der in den Nilagiris der Frühlingsmonat ist und dem Oktober in Australien entspricht. Demnach brauchte die Pflanze nahezu 40 Jahre, ihre alte Gewohnheit, im Frühling zu blühen, zurückzugewinnen, d. h. sich vollständig zu akklimatisieren (Ind. For. VIII, 26)."

Damit wäre eine ganz allmähliche Anpassungsfähigkeit systematisch hochstehender pflanzlicher Individuen erwiesen, welche, vorausgesetzt daß der Bericht zuverlässig ist, weittragende Folgerungen zu ziehen gestatten würde. Leider existieren über den Verlauf solcher „Gewohnheits"-Änderungen sonst fast gar keine genaueren oder hinreichend zuverlässigen Berichte und gerade auf den Verlauf käme es an, ebenso wie auf das Verhalten von Sämlingen umgeschlagener Bäume.

Schimper scheint ähnliches erfahren zu haben. Wenigstens bemerkt er (l. c.): „Die Unabhängigkeit von der Jahreszeit in der rhythmischen Abwechselung von Belaubung und Entlaubung, die Selbständigkeit der einzelnen Sproßsysteme eines Baumes bei den in die Tropen verpflanzten jungen Bäumen treten erst im Lauf der Jahre auf; der bereits erlittene Einfluß der Jahreszeit auf die periodischen Erscheinungen macht sich noch lange als Nachwirkung geltend, um erst allmählich

durch ungleiche Verschiebungen in den verschiedenen Zweigen verloren zu gehen." Leider bringt Schimper keine genaueren Angaben.

Darin muß sich nach meinen Beobachtungen aber Quercus Cerris sehr verschieden verhalten von Q. pedunculata. Bei letzterer sahen wir an einem ganz jungen normalwüchsigen Bäumchen (im Park von Nuwara Eliya) bereits große Unterschiede in der Entwicklung der Triebe, obschon es erst wenige Jahre früher aus Europa eingeführt worden war und in der Heimat bereits die nordische Periodizität angenommen hatte, aber es war, ganz ähnlich wie Schimper es (l. c.) für einen Strauch von Rhus succedanea in Tjibodas schildert, die Verschiedenheit des Entwicklungszustandes gewissermaßen noch regionenweise geregelt, indem die obere und untere Hälfte der Pflanze sich gegensätzlich verhielten. Bei den Stieleichen von Hakgala sahen wir dagegen eine vollkommene Mischung der Entwicklungszustände über die ganzen Pflanzen. Diese Eichen hatten ein Alter von 21 Jahren und es hatte von ihrer Keimung an nur das tropische Klima auf sie eingewirkt. Leider existieren keine genaueren Angaben über das frühere Verhalten. Man könnte auf den Gedanken kommen, daß der Zustand der einzelnen aus Europa herübergebrachten Eiche in Nuwara Eliya ein Übergangszustand zum Zustand der völligen Mischung der Entwicklungszustände, zur Selbständigwerdung der einzelnen Zweigsysteme sei. Für die Hakgala-Stieleichen wäre es auch nicht ganz ausgeschlossen, daß die früher erlebten Verstümmelungen die Umwandlung der ererbten strafferen Periodizität in den immer noch allgemein periodischen, aber doch schon sehr gelockerten Zustand begünstigt hätten. Man könnte sogar daran denken, daß bei ihnen ein weiteres Fortschreiten bis zu gänzlich aperiodischem Zustand im Austreiben stattfinden könnte. Dazu müßte man vor allem wissen, wie sich die ältesten, über 30 Jahre alten Stieleichen in Hakgala verhalten. Ich konnte nichts Sicheres darüber in Erfahrung bringen.

Um so überraschender ist der Gegensatz im Verhalten von Q. Cerris mit ihren regelmäßigen halbjährigen Ausschlags-

perioden, wo doch die Pflanzen unter dem Einflusse des tropischen Klimas gekeimt, sich entwickelt und bereits das 15. Jahr erreicht hatten. Vielleicht widersteht diese Art dem tropischen Klima länger, so daß ihre Austriebsperioden erst später ins Schwanken geraten, oder sie beharrt überhaupt auf ihrer Austriebsregel. Weniger wahrscheinlich erscheint, daß sie durch Schwankungen zu ihrer jetzigen Regelmäßigkeit gelangt sei, obschon auch diese Möglichkeit nicht ganz ausgeschlossen ist. Leider existieren auch über Quercus Cerris keine Aufzeichnungen.

Mit dem Wegfall des eigentlichen Winters, welcher durch seine lange dauernde Hemmung der Lebensvorgänge die Gewächse zwingt, ihre Tätigkeit in einen verhältnismäßig kurzen Zeitraum zusammenzudrängen, was zu dessen Ausnützung eine einheitlich geregelte Ordnung der Funktionen für alle Organe des Individuums bedingt, wird leicht eine gewisse Disziplinlosigkeit der einzelnen Zweigsysteme, wenn man so sagen darf, einreißen. Es braucht das um so weniger wunderzunehmen, als einerseits die Wasserbahnen der Äste unserer Holzgewächse unabhängig voneinander verlaufen und andererseits die Ablagerung größerer Mengen von Reservestoffen im Holzkörper (besonders in Markstrahlen und Mark), welche in den gemäßigten Klimaten eine so große Rolle spielt, weniger wichtig wird. Fast das ganze Jahr über muß ja die Assimilation weitergehen und die Wurzeltätigkeit erleidet keine Unterbrechung.

Nachdem wir nun aber andererseits wieder bei sehr vielen Bäumen der feuchtheißen Gebiete mit denkbar gleichmäßigstem Klima die Erfahrung machen, daß sie trotz dieses Klimas einer wohlgeordneten Periodizität huldigen, so scheint es nicht ganz ausgeschlossen, daß die Unregelmäßigkeit der neuen Einwanderer aus dem Norden nur eine Akklimatisationskrankheit darstellt und allmählich wieder verschwindet, indem sie einer neu angepaßten Periodizität Platz macht.

Was die naheliegende oben gestreifte Frage, wie es sich mit der Ablagerung der Reservestoffe bei den in den Tropen kultivierten Bäumen gemäßigter Klimate verhält, und manche

anderen sich anreihenden Fragen angeht, so ist Tatsächliches darüber bis jetzt sehr wenig bekannt.

Im übrigen ergibt sich, daß das gemilderte tropische Klima höherer Gebirgslagen Ceylons auf die verschiedenen Lebenstätigkeiten der sommergrünen Bäume gemäßigter Klimate sehr verschieden einwirkt. Nicht günstig wirkt es auf die reproduktive Tätigkeit. Die Früchte vieler Arten reifen, aber die Fruchtproduktion ist relativ gering im Vergleich mit der Heimat. Dies ist von praktischer Bedeutung beim Anbau von Obstbäumen, welche ausschließlich ihrer Früchte wegen kultiviert werden. Auch bei den mitteleuropäischen Waldbäumen scheint die Reproduktionskraft relativ geschwächt zu sein. Vegetativ dagegen gedeihen einige der Waldbäume (Eichen) sowie verschiedene Obstbäume (Birnen, Kirschen, so ziemlich auch die Pfirsiche) gut und übertreffen infolge ihrer ununterbrochenen oder fast ununterbrochenen Belaubung in jährlich zweimaligen Vegetationsperioden ihre Artgenossen in Europa nicht unwesentlich an Raschheit des Wuchses.[1]) Einige europäische Waldbäume (Rotbuche und Birke) leiden vegetativ, indessen ist über die unmittelbare Ursache zunächst nichts Sicheres auszusagen. Möglicherweise spielt eine gewisse Starrheit ihrer Organisation die Hauptrolle. Das auffallende, in kurzen Zwischenräumen wiederholte Blühen der Birke dürfte vielleicht als Schwächeerscheinung, als sogenanntes „Sichtotblühen“ aufzufassen sein. Ob die Schwächung der reproduktiven Kraft verschiedener im Gebirgsklima Ceylons vegetativ sehr gut gedeihender Bäume auf der das ganze Jahr über dauernden vegetativen Tätigkeit beruht, wie vielleicht angenommen werden könnte,[2]) bleibt zu untersuchen. Ich war leider auch nicht in der Lage, verfolgen zu können, warum die Blüten der unfruchtbaren Blüteperioden der Obstbäume nicht ansetzen.

---

[1]) Auf Zuwachsverhältnisse einiger in Ceylon angebauter europäischer Hölzer werde ich besonders eingehen.

[2]) Vgl. Möbius, „Beiträge zur Lehre von der Fortpflanzung der Gewächse“, p. 108 ff.

Wir sind in der Kenntnis des Verlaufs der Anpassung von Bäumen gemäßigter Himmelsstriche an tropisches Klima noch sehr wenig weit gekommen. Wir kennen eigentlich nur eine Anzahl von Einzeltatsachen, von denen noch nicht einmal sicher ist, ob sie dauernde Geltung haben. Nur längere Jahre hindurch fortgesetzte Beobachtungen zahlreicherer Individuen können mit der Zeit den nötigen Einblick bringen. Die Beobachtung muß unmittelbar mit der Einführung der Versuchspflanzen bzw. mit ihrer Keimung einsetzen. Die Durchführung dürfte aber nur möglich sein, wenn die Beobachtungen unabhängig von etwaigem Personenwechsel nach vorher festgelegtem Plane geschehen.



Die Ameisen des K. Zoologischen Museums in München.

Von **A. Forel.**

Vorgelegt von R. v. Hertwig in der Sitzung am 10. Juni 1911.

Von Herrn Professor Doflein habe ich die Ameisen der K. Zoologischen Sammlung in München zur Bestimmung erhalten. Meine dort angestellte Tochter und frühere Sekretärin Frau Martha Brauns hat die Sammlung geordnet und mir alles Unsichere zur Bestimmung übergeben. Interessant waren besonders Typen von Bates aus Ostindien und Brasilien, deren Bestimmung offenbar von Fr. Smith ursprünglich stammt. Leider waren vielfach sowohl Fundorts- als Namensetiketten früher vertauscht worden — so waren *Polyrhachis* aus „*Amazonas*“ u. dgl. mehr verzeichnet. Trotzdem glaube ich, zum großen Teil wenigstens diese Irrtümer richtig korrigiert und das Ursprüngliche hergestellt zu haben, wobei einige neue Feststellungen über bisherige Smithsche Rätsel zutage gefördert wurden. Zuerst mögen Guérinsche Typen erläutert werden.

I. Guérinsche Typen.

aus der Sammlung des K. Museums München.

1 *Eciton* (*Labidus*) *obscurum Guérin.* Dieser Typus ist von Guérin niemals beschrieben worden, somit in litt. Nach der Etikette stammt er aus Patagonien. Es ist eine var. oder subsp. von *Spinolae* Westw, die, wie folgt, sich von ihm unterscheidet:

Eciton Spinolae Westw subsp. ***obscurum*** n. subsp. (Guérin in litt.). L. 11,5 mm. Ganz schwarz. Abstehende Behaarung an Fühlerschaft und Beinen länger und fast ganz abstehend. Die anliegende Pubeszenz sehr reichlich, graugelblich und nicht goldig wie bei *Spinolae* i. sp. Schwächer punktiert. Flügel heller, nur leicht schwärzlich angeraucht. Der horizontale hintere Dorsalteil des Stielchens etwas kürzer; sein Pubeszenspelz, sowie der des Hinterleibes grau silbrig statt goldig.

Patagonien (nach Etikette!).

Eciton Pertyi Shuck ♂. L. 13—14 mm. Es sind zwei Typen vorhanden (der eine ohne Hinterleib), die als *Latreillei* Jurine bezeichnet sind und unter den Pertyschen Typen waren. Diese Typen sind etwas kleine Stücke von *Eciton Fonscolombei* Westw. Wenn die Echtheit der Typen sicher feststeht, ist *E. Fonscolombei* Westw = *Pertyi* Shuck. Mit Pertys Beschreibung ist rein nichts anzufangen.

Die anderen Typen Guérins bieten nichts Neues und sind bereits längst festgestellt.

II. Die allgemeine Sammlung.

Ich lasse alles beiseite, was bereits bekannt ist, wenn es kein besonderes Interesse bietet.

1. Subf. Ponerinae.

Anochetus tyrannicus Smith ☿. Menado, Celebes (Coll. Bates) = *Odontomachus tyrannicus* Smith. Journ. proc. Linn. soc. Zool. VI, 1861, no. 3, p. 14, Pl. I, Fig. 4 (nec III, 1858, p. 144) = *Odontomachus Smithi* Roger, Verzeichnis B. E. Z., 1863, p. 21 und 47 = *Stenomyrmex gladiator* Smith und Mayr. Nicht zu verwechseln also mit *Odontomachus tyrannicus* Smith aus Aru.

Diese Art ist ein echter *Anochetus*, aber mit einer eindornigen Schuppe, wie die *Odontomachus*-Arten. Dieses Merkmal zusammen mit der zweizähnigen Schuppe amerikanischer Arten als Kennzeichen einer Gattung *Stenomyrmex* zu betrachten,

wie es Mayr tat, geht nicht an, denn die Schuppe variiert zu stark bei *Anochetus*. Das Mesonotum bildet bei *tyrannicus* eine stark erhabene Querkante, was Smith und Mayr anzugeben vergaßen.

Odontomachus angulatus Mayr subsp. ***praefectus*** n. subsp. ☿. L. 13,5 mm. Kopf braun; Kiefer, Fühler und Beine gelblich; Thorax, Stielchen und Hinterleib rötlich bis bräunlichgelb. Innenrand der Kiefer 8 bis 9 zähnig. Das Stielchen hat einen nicht ganz winklig abgesetzten Vorderteil: der Winkel ist gerundet, und von ihm aus steigt das Stielchen schief nach hinten. Des Stigma liegt aber direkt unter dem Winkel, nicht weiter hinten, wie bei *imperator* Emery. Der Dorn geht ferner nicht direkt in die Hinterfläche des Stielchens über; letztere biegt oben zuerst nach vorn rasch um, so daß der Dorn über diese Biegung abgesetzt erscheint. Ein Zahn unter dem Hinterleibstielchengelenk und ein Zahn vorn unten am Stielchen. Der ganze glänzende Thorax ziemlich grob und ziemlich oberflächlich quergestreift. Fühlergrube vorn ziemlich glatt, hinten aber schief gestreift; Stirn längsgestreift. Entspricht übrigens der Beschreibung Mayrs.

Neuguinea (Coll. Bates).

Unterscheidet sich von *Saevissimus-papuanus* Emery fast nur durch die Form des Stielchens.

Odontomachus haematodes L. subsp. *laticeps* Rog. Ich besitze in meiner Sammlung aus Retaluleu (Guatemala) von Prof. Stoll gesammelte, sehr typische Stücke dieser Unterart. Sie sind 11—12 mm lang und haben einen auffallend großen, hinten wie vorn 2,6 mm breiten (ohne Kiefer 3,5 mm langen) Kopf. Der Kopf und auch oft der Thorax sind dunkel rötlich, während Stücke aus Costarica ganz schwarzbraun sind und einen relativ etwas längeren Körper haben.

Odontomachus haematodes L. subsp. *opaciventris* Forel ♀. Ecuador; Costarica.

Odontomachus ruficeps Smith subsp. *cephalotes* Smith. Ternate und Neuguinea (Coll. H. W. Bates).

Emery hatte eine Form aus Queensland als *cephalotes* Sm. bezeichnet. Smiths Typus war aus Ceram. Um ins klare zu kommen, schrieb ich nach England und sandte einen Emeryschen Typus an Prof. Poulton in Oxford, der die Güte hatte, ihn mit Smiths Typus sorgfältig zu vergleichen. Smiths Typus aus Ceram hat, wie mir Prof. Poulton schreibt, plumpere Kiefer, mit stumpferen Zähnen als Emerys Typus, ist aber sonst gleich. Dagegen hatte Smith ein Stück des *O. haematodes* aus Sula ebenfalls als *cephalotes* bestimmt.

Nachdem dieses nun feststeht, akzeptiere ich Emerys Bestimmung. Daraus ergibt sich, daß die Batesschen Exemplare aus Ternate und Neuguinea wirklich *cephalotes* sind. Allerdings haben die ersten hinten einen schmäleren Kopf, der feiner gestreift ist (var. **ternatensis** n. var.), während das Stück aus Neuguinea genau den Kopf von *cephalotes*, dafür einen quergestreiften Hinterleib besitzt. Doch variiert die Streifung ungemein.

Ferner ergibt sich, daß die var. *ajax* Forel des *O. Turneri* Forel zu *cephalotes* und nicht zu *Turneri* gehört. Es ist eine Varietät, bei welcher der Hinterleib punktiert-genetzt statt gestreift ist. Der Kopf ist aber genau wie bei *cephalotes*. *Turneri* selbst ist ziemlich verschieden, mit fast glattem Hinterleib, viel feiner gestreiftem Kopf und eine mehr konische Spitze der Schuppe. Auch *acutidens* Forel bildet eine eigene Subspezies mit schmalen, spitzen Kieferzähnen. Ich betrachte alle diese Formen: *cephalotes* Sm., *coriarius* Mayr, *Turneri* For., *acutidens* For. als Subspezies des *ruficeps* Smith, der eine ungemein variable Gruppe bildet.

Myrmecia forceps Roger ☿. Australien. Ein ganz typisches Exemplar, mit stark nach außen konvexen Kiefern. Sehr eigentümlich (Coll. Bates).

Leptogenys (*Lobopelta*) *Kitteli* Mayr var. *minor* Forel ☿. Cambodja (Coll. Bates).

Leptogenys (*Lobopelta*) *Kitteli* Mayr var. *purpurea* Em. ☿. Neuguinea (Coll. Bates).

Leptogenys (*Lobopelta*) *Kitteli* Mayr subsp. *levis* Emery. Hochland, Nordostsumatra (Morin).

Ich besitze aus Sarawak Exemplare, die den Übergang der subsp. *levis* typica zur var. *foveolata* Em. bilden. Die Skulptur des Kopfes ist wie bei der var. *foveolata*, aber die Längsrinne des Pronotums und die Grube des Epinotums fehlen. Die Körperlänge ist die der typischen *levis*. Ich nenne sie var. ***transiens*** n. var.

Diacamma intricatum Sm. Zentralborneo.

Trapeziopelta maligna Smith ☿. Menado, Celebes (Coll. Bates).

Neoponera (*Eumecopone*) *agilis* Forel ☿. Paraguay (Fiebrig).

Pachycondyla (*Bothroponera*) *tridentata* Smith subsp. *debilior* Forel. Hochland von Nordostsumatra (Morin).

Pachycondyla (*Bothroponera*) *tridentata* Smith, var. ***exasperans*** n. var. ☿. L. 14 mm. Kaum größer als die subsp. *debilior*. Aber das Stielchen ist noch länger als beim Arttypus, mindestens so lang als breit, mit drei Dornen, die kürzer sind als beim Arttypus, aber länger als bei *debilior*. Kopfform und Behaarung wie beim Arttypus. Skulptur etwas schärfer, weniger genetzt, indem die Netzmaschen, wenn auch weniger als bei *debilior*, so doch mehr grübchenartig werden als beim Arttypus. Kiefer mehr glatt und glänzend zwischen den Punkten.

Pahang, Malakka (R. Martin), in meiner Sammlung.

Pachycondyla (*Ectomomyrmex*) *astuta* Sm. subsp. ***cambodjana*** n. subsp. ☿. L. 11 mm. Unterscheidet sich vom Arttypus durch den viel schmäleren Kopf, mit viel weniger konvexen Rändern. Der Kopf ist überhaupt viel kleiner, sonst aber hinten und seitlich gleich scharf gestutzt. Er ist ferner viel weniger längsgerunzelt, mehr runzlig punktiert-genetzt. Hinterleib dicht punktiert-genetzt und matt (glänzend bei *javana*). Stutzfläche des Kopfes hinten seicht gerunzelt und nicht scharf gestreift wie bei *japonica* Emery und wie zum Teil beim Arttypus. Die Kopfgröße und Form ist ungefähr wie bei *japonica*, aber die Kopfseiten jener letzten Art sind durchaus nicht scharf gerandet wie bei *astuta* und subsp. *cam-*

bodjana. Im übrigen ist alles (Stielchen, Clypeus etc.) wie beim Arttypus.

Cambodja (Coll. Bates), 1 ☿.

Pachycondyla striata Sm. ☿. Mit der Etikette Queensland (!). Stammt aus dem südlichen Brasilien.

Cylindromyrmex Godmani Forel. Ecuador 500! (Rosenberg).

Ectatomma (*Holcoponera*) *striatulum* Mayr subsp. *obscurum* Em. var. *angustiloba* Forel ☿♀. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig). ♀. L. 5 mm. Pronotum vorn quer-, hinten längsgestreift. Mesopleure wie beim ☿. Flügel bräunlich. Übrigens wie der ☿.

Ectatomma (*Gnamptogenys*) *regularis* Mayr ☿. Ecuador.

Ectatomma (*Rhytidoponera*) *araneoides* Le Guillou ☿. Ceram (Coll. Bates).

Ectatomma (*Stictoponera*) *menadense* Mayr ☿. Menado, Celebes (Coll. Bates). Unter dem Namen *Ponera rugosa* von Smith bestimmt! Entspricht aber gar nicht der Artbeschreibung, da der Hinterleib glatt, zerstreut grob punktiert ist!

2. Subf. Dorylinae.

√ *Dorylus* (*Anomma*) *Kohli* Wasm. ☿. Altkalabar (Coll. Bates).

√ *Dorylus depilis* Emery ☿. Altkalabar (Coll. Bates). Ein ☿ aus Altkalabar scheint mir dieser Art anzugehören. Er unterscheidet sich kaum vom ☿ des *D. affinis* Shuck (*brevinodosus* Mayr); nur der Stielchenknoten ist noch etwas kürzer und breiter, viel breiter als lang. Aus jener Gegend erhalte ich den *depilis* viel häufiger als der mehr ostafrikanische *affinis*. Sowieso sind beide Arten so nahe verwandt, daß *depilis* eher als Unterart gelten sollte.

√ *Dorylus affinis* Shuck subsp. *Löwyi* Forel ♂. Erythräa.

√ *Dorylus moestus* Emery subsp. *Schereri* n. subsp. ♂. L. 20 mm. Unterscheidet sich vom Arttypus durch den sowohl oben als vorn stärker gewölbten Kopf. Die Fühlergrube ist kürzer. Die Stirnwölbung zwischen Ocellen und Augen ist stärker und breiter; auch oben, von einem Auge zum anderen, ist die Wölbung stärker. Ferner sind die Flügel etwas kürzer

und ebenso schwarz wie bei *atratus*, nicht so braun wie beim Arttypus. *Atratus* ist aber viel größer und hat einen noch flacheren Kopf als *moestus* sens strict. Das zweite Geißelglied ist bei *Schereri* unten pubeszent. Länge eines Oberflügels knapp 14 mm (bei *moestus* i. sp. fast 16 mm). Sonst wie der typische *moestus*.

Liberia (Scherer).

Aenictus Martini Forel ☿. Hochland, Nordostsumatra. (Morin). Sonst aus Malakka.

Aenictus Eugenii Emery ☿. Bothaville, Südafrika.

Aenictus currax Emery ☿. Menado, Celebes (Coll. Bates). Nach Emerys Beschreibung zu urteilen dürfte das Stück aus Menado etwas stämmiger, mit etwas kürzeren Geißelgliedern und Stielchenknoten sein.

Aenictus Batesi n. sp. ☿. L. 3,5—3,7 mm. Kiefer gestreift, glänzend, auffallend breit, mit drei Zähnen. Der Endzahn ist nicht sehr spitz und hat eine sehr breite Basis; dann kommt ein kurzer, etwas stumpfer Zahn und dann, am Innenrand, ein gewaltiger, scharf abstehender, dann gegen den Endzahn zu gekrümmter Zahn, sodaß der Kiefer wie eine Krebsschere aussieht. Die parallelen Stirnleisten sind fast zusammengelötet und bilden zusammen eine mittlere Längserhabenheit, die vorn wie ein zweispitziger oder zweizähniger Schnabel den Vorderrand des Kopfes überragt. Kopf vorn erheblich breiter als hinten, etwas länger als breit, mit stark konvexen Seiten, geradem Hinterrand und relativ scharfen Hinterecken (die Konvexität der Seiten betrifft nur die vorderen $^3/_4$). Der Fühlerschaft erreicht kaum das hintere Kopfviertel. Alle Geißelglieder erheblich länger als dick. Thorax ziemlich genau wie bei *Eugenii* Em.; Promesonotum etwas weniger konvex; Kante zwischen beiden Epinotumflächen oben in der Mitte etwas erhabener. Erstes Stielchenglied oben mit einem kleineren (kürzeren und schmäleren) Knoten als bei *Eugenii*, unten mit gleichem Fortsatz. Zweiter Knoten vorn seichter gerundet, weniger gestutzt. Schenkel wie bei *Eugenii*, an der Basis dünn, dann verdickt.

Glatt und glänzend. Epinotum fast matt, punktiert-genetzt. Seiten des Epinotums und des Mesonotums grob längsgerunzelt. Abstehende Behaarung wie bei *Eugenii*, gelblich, ziemlich lang, an den Gliedern etwas schief, nicht reichlich. Anliegende Pubeszenz fast Null.

Kopf und Thorax braun; Backen und Fühler etwas heller, braunrötlich. Hinterleib, Stielchen und Beine gelblich.

Altkalabar (Coll. H. W. Bates).

Äußerlich dem *Eugenii* Em. ähnlich, aber von allen anderen Arten durch den sonderbaren Bau der Kiefer und der Stirnleisten verschieden.

Eciton coccum Latr. var. Jurinei Shuck ♂. Ecuador.

Eciton (*Acamatus*) *mexicanum* Sm. subsp. ***Rosenbergi*** n. subsp. ♂. L. 13 mm. Kleiner als der Arttypus. Kopf hinter den Augen und Ocellen nicht konkav, sondern schwach konvex gestutzt. Das Mesonotum überwölbt nur wenig und durchaus nicht so spitz und scharf das Pronotum und das Kopfgelenk wie beim Arttypus. Schenkel gegen die Basis nicht so schmal und gegen das Ende nicht so verdickt wie beim Arttypus. Ein Oberflügel 11 mm lang (13 mm beim Arttypus). Pubeszenz etwas dichter, sowie die Punktierung. Farbe dunkler, braun, mit schwärzlich braun tingierten Flügeln. Sonst wie der Arttypus, namentlich die Kiefer.

Cachati, Nordwestecuador 500′, W. F. H. Rosenberg.

Vielleicht eine eigene Art. Die Schenkel sind wie bei der var. *azteca* Forel. Namentlich durch die Kopf- und Mesonotumform sowie durch die Farbe und die Größe vom Arttypus sehr abweichend.

Eciton atriceps Smith. ♂. Amazonas (Coll. H. W. Bates); offenbar Cotypus von Smith. Entspricht ganz genau der Smithschen Beschreibung. Diese Art ist durchaus nicht Synonym von *E. coecum* Latr., wie Emery meint. Sie ist viel kleiner, zirka 15 mm lang. Die Schienen sind, wie Smith angibt, in ihrem basalen Drittel stark verdünnt. Der Fühlerschaft ist breiter und komprimierter als bei *coecum*. Der Thorax ist erheblich kürzer; Scutellum hinten schmäler. Der Clypeus ist

vorn in der Mitte stark ausgerandet. Der Kopf hat konvexere Seiten; hinter den Augen ist er nicht einfach konvex, sondern mehr trapezförmig, mit geradem oder fast konkavem Hinterrand. Flügel viel kürzer (Oberflügel 12,5 mm, bei *coecum* 18—19 mm), sonst gleich gefärbt.

Körperoberfläche nicht glänzend wie bei *coecum*, sondern fast matt, dicht punktiert oder punktiert-genetzt, wenigstens am Kopf und Thorax. Grobe, zerstreute Punktierung und Behaarung fast gleich. Farbe blässer. Kopf aber schwarz, mit rötlichen Kiefern. Die Klauen sind zweizähnig, wie bei *coecum*.

Somit muß diese bisher als Synonym gestellte Art wieder anerkannt werden.

3. Subf. Myrmicinae.

Atta cephalotes L. var. *polita* Em. ☿. Ecuador.

Atta cephalotes L. var. *opaca* For. ☿♀. Ecuador.

Atta (*Acromyrmex*) *coronata* F. subsp. *subterranea* For. ☿. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Atta (*Cyphomyrmex*) *rimosus* Spin. s. str. ☿. Amazonas (Coll. Bates).

Myrmicocrypta squamosa Smith ♂. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Cryptocerus pallens Klug ☿. St. Vincent (Coll. Bates).

Cryptocerus pallens Klug var. *discocephala* Sm. ☿♃. Amazonas (Coll. Bates), offenbar von Smith bestimmt und auch von ihm (Cat. Brit. Mus. 1858) als von Bates gesammelt angeführt. Der ♃ ist knapp 5 mm lang; die Spalte vorn an der Stirnscheibe gerade als Linie sichtbar. Demnach glaube ich, daß man den Namen *discocephala* für die kleinere Varietät des *pallens* behalten darf, denn das ist auch die Länge, die Smith bei Beschreibung seines *discocephalus* (1854) angibt. Der ☿ ist 3 mm lang.

Jedenfalls wird dadurch Emerys Synonymie bestätigt. *Araneolus* Smith aus St. Vincent. den ich selbst von dort besitze, ist größer (♃ bis 7 mm, ☿ 3,7—4 mm) und somit Synonym vom typischen *pallens*.

Cryptocerus Pavonii Latr. ☿. San Bernardino, Paraguay. (Fiebrig).

Cryptocerus Targionii Emery ♃. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Cryptocerus maculatus Sm. ☿♀. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

♀. L. 6.3 mm. ungefähr. Kopf erheblich länger als breit, mit einer Scheibe, die fast genau so ist wie bei *Cr. pilosus* Em. ♃, aber scharf gerandet und nicht oder fast nicht krenuliert (vorn breit und für die Kiefer ausgeschnitten, hinten verschmälert, mit fast geradem Hinterrand). Pronotum mit scharfen Vorderecken und mit einer sehr scharfen, erhabenen, in der Mitte ausgerandeten (nicht unterbrochenen) Querkante hinten. Epinotumrand mit einem breiten, stumpfen, vorderen und einem längeren, fast aufrechten und nach vorn gekrümmten Zahn. Erstes Stielchenglied quer rechteckig, vorn etwas breiter, mit einem kleinen, spitzen, nach hinten gerichteten Seitenzahn. Zweites Glied wie beim ☿, nur länger. Hinterleib fast doppelt so lang als breit, vorn tief ausgeschnitten.

Matt, äußerst fein punktiert-genetzt. Am Kopf und Thorax große, regelmäßige, nicht konfluierende Grübchen mit je einem glänzenden, anliegenden Schuppenhaar; am Kopf ist ein Teil der Grübchen etwas ocelliert (Erhabenheit in der Mitte). Abstehende Beborstung äußerst kurz, am Körper zerstreut, an den Gliedern fehlend.

Schwarz; vier Flecken am ersten Hinterleibssegment und Außenseite der Schienen gelblich weiß. Der Umkreis der Kopfscheibe, die Kopfseite zwischen Stirnleiste und Augen, die Pronotumecken, die Gelenke und das Ende der Tarsen roströtlichgelb. Geißel, Tarsen und Mitte der Kopfscheibe braun. Fühlerschaft nicht zu sehen.

Cryptocerus peltatus Emery subsp. ***Ellenriederi*** n. subsp. ♃. L. 5 mm. Unterscheidet sich wie folgt von Emerys Beschreibung und Abbildung: Hinterrand des Kopfschildes konvex, ohne gestutzte Hinterecken. Hinterecken des Kopfes gerundet (nicht winklig). Die Querkante des Pronotums ist obsolet, ge-

rade noch durch eine stumpfe Linie bei gewissen Einstellungen der Lupe bemerkbar. Seitenrand des Epinotums konvex, knapp eine stumpfe Ecke hinter der Mitte bildend; Hinterecken stumpf zahnartig nach vorn gebogen. Beide Stielchenglieder mit nach hinten gebogenen, ziemlich stumpfen Seitenvorsprüngen. Hinterleib nur an den Vorderecken scharf gerandet. Sonst der Beschreibung des Arttypus, auch für Farbe und Skulptur, entsprechend. Am Körper nur ganz vereinzelte, nicht dicke Borstenhaare.

♀. L. 6,8 mm. Kopfschild länglicher als beim ♃, aber hinten schmäler und durch Abflachung des Randes fast verschwindend. Keine überragende Ecke am Rand der Fühlergrube. Mesopleure mit einem Zahn unten. Hinterleib ganz schwarz, ohne die länglichen gelben Flecken des Arttypus. Flügel bräunlich angeraucht, mit einzelnen helleren Stellen. Die Querkante des Pronotums kaum andeutungsweise erkennbar.

☿. L. 4 mm. Kopf so wie bei *denticulatus* Em. geformt uud gefärbt, aber hinten breit ausgerandet und mit einfach breit und schief gestutzten, durchaus nicht membranös durchscheinenden Hinterecken. Pronotum mit zahnartigen Vorderecken und konvexem, zahnlosem Seitenrand. Mesonotum mit einem stumpfen Seitenwinkel. Epinotum hinten stark verschmälert, vorn am Rand mit zwei recht stumpfen Zähnchen (der vorderste kleiner). Stielchen und Hinterleib wie beim ♃, der Hinterleib etwas weiter nach hinten gerandet. Der ganze Thorax von vorn nach hinten sehr stark verschmälert, ohne die Randzähne des *denticulatus*.

Kopf und Thorax nur mit sehr flachen Gruben, die silberglänzende Schuppenhaare enthalten. Sonst Skulptur, Behaarung und Farbe wie bei ♃, aber der Kopf hinten und die Vorderecken des Pronotums schwarz (nur die Spitzen der Pronotumzähne rötlich). Hinterleib viel länger als breit, mehr als $1^1/_2$ mal.

Rosario di Santa Fé, Argentinien, von Herrn v. Ellenrieder im Holz eines Weidenstammes gesammelt.

Vielleicht eine eigene Art; der Kopfschild des ♃ ist aber sonst wie bei *peltatus* so breit als lang etc.

Cryptocerus minutus F. Unter der Smithschen Bestimmung *Cr. laminatus* befinden sich ☿ und ♃ von *minutus* in der Batesschen Sammlung. Offenbar wurden die Etiketten vertauscht, da der wirkliche *laminatus* in der gleichen Schachtel ist.

Bisher galt *Cr. quadrimaculatus* Klug, Guérin und Smith als Synonym von *minutus*. Dies ist für Klug wohl richtig und auch für Guérin, nicht aber für Smith. In einer gleichen Arbeit (*Exotic Hymenoptera*, Journ. of Entomology 1860) beschreibt er *laminatus* ☿ und *quadrimaculatus* ☿ (nicht ♃) und findet *quadrimaculatus* 3 Linien lang, *laminatus* aber nur 2—2½. Größer als *laminatus* kann doch *minutus* nicht sein.

Aber mehr. In der gleichen Batesschen Sammlung findet sich mit dem Namen *quadrimaculatus* Klug von Smith eine Art (☿ und ♃) bezeichnet, die nichts anderes ist als *Cr. spinosus* Mayr (1862) (☿ und ♃ sind je auf dem gleichen Karton geklebt, somit sicher zusammengehörend). Da nun der Name *quadrimaculatus* ein Synonym ist und 1860 schon war, darf er nach den Nomenklaturregeln nicht mehr verwendet werden. Somit muß der *Cr. quadrimaculatus* Smith (nec Klug) heißen:

Cryptocerus spinosus Mayr (= *quadrimaculatus* Smith, nec Klug).

Infolgedessen muß nun mein *Cryptocerus laminatus* subsp. *peruvianus* heißen: *Cryptocerus spinosus* Mayr subsp. *peruvianus* Forel.

Cryptocerus spinosus Mayr ♃ unterscheidet sich wie folgt von der subsp. *peruvianus* Forel: L. 6,5 mm. Kopf vorn stark verschmälert (bei *peruvianus* nur wenig und die Seiten viel konvexer). Pronotumkante etwas weniger erhaben. Erstes Stielchenglied mit flügelartigem, durchscheinendem, nach hinten gebogenem Seitenfortsatz (beim *peruvianus* mit dickem Seitenkegel, der in ein undurchsichtiges, etwas nach hinten gebogenes Zähnchen endigt). Hinterleib und zweites Stielchenglied wie bei *peruvianus*; Kopf und Thorax aber matter (bei *peruvianus* glänzend), mit schärferen und dichteren Grübchen. Farbe etc. gleich. Mesonotum von einer Naht zur anderen mit geradem, nach hinten konvergierendem Rand, ohne Spur von Vorsprüngen.

Deshalb ist *Cr. laminatus* Smith eine andere Art, da er Mesonotumdornen hat wie *minutus* F., *angulatus* Sm. etc.; er ist auch etwas kleiner.

Amazonas (Coll. A. W. Bates).

Cryptocerus laminatus F. Smith. In der Münchener Sammlung (Coll. Bates) findet sich das ☿ dieser Art ohne Bezeichnung (offenbar mit *minutus* vertauschte Etikette). Er unterscheidet sich von *spinosus* wie folgt: Mesonotum mit einem kleinen spitzen Dorn. Dornen des Pronotums und des Epinotums in gleicher Zahl und Lage, aber viel kürzer und stämmiger, an der Basis breiter, aber eher spitzer. Hinter dem hinteren Dorn bildet der Pronotumrand einen gerundeten Vorsprung. Dornen des ersten Knotens kürzer, Vorsprünge des zweiten spitzer, dornartiger. Vorderecken des Pronotums schärfer, zahnartig. Schuppenhaare etwas schmäler. Übrigens wie *spinosus*, insbesondere der Kopf und die durchscheinenden Lamellen; er ist fast gleichgroß.

Amazonas (Coll. Bates). Offenbar ein Cotypus.

Cryptocerus multispinus Emery var. *amazonensis* n. var. ☿. L. 6,2 mm. Hinterer Teil der Stirnleisten viel weniger breit, nicht so geschwungen und die Augen viel weniger bedeckend wie bei der Stammart, fast gerade. Hinterecken des Kopfes und Vorderecken des Pronotums rechtwinklig, aber nicht zahnartig. Seitenrand des Pronotums rotbraun. Epinotum nur mit einem Seitenzahn und einem Enddorn (zwei starken, spitzen Seitenzähnen resp. Dornen bei der Stammart). Der Enddorn hat vorn in seiner Mitte ein Zähnchen. Alle Thoraxzähne kürzer und stumpfer als bei der Stammart. Dornen des ersten Stielchengliedes etwas kürzer und stärker nach hinten gekrümmt. Lamelle des Hinterleibes vorn rötlichbraun.

Die Schuppenhaare überall schmäler und weniger dicht, daher auch weniger auffallend glänzend; die Grübchen dafür um so schärfer sichtbar. Sonst alles gleich.

Amazonas (Coll. H. W. Bates).

Cryptocerus denticulatus Emery ☿♀. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Cryptocerus denticulatus Emery var. *variegata* n. var. ☿. L. 3,3—3,6 mm. Kleiner als die Stammart. Pronotumrand vierzähnig, indem die zwei beim Arttypus an der Basis gelöteten Zähne hier scharf getrennt sind. Erstes Stielchenglied breiter und kürzer, oben nicht so flach; zweites Glied umgekehrt etwas länger, mit etwas kürzeren Fortsätzen. Endhälfte der Schenkel, Schienen, Endhälfte der Tarsen, Fühlerschaft, Basis der Geißel, Thoraxzähne. Stielchenzähne, Hinterecken des Kopfes und Oberseite des Hinterleibes rostrot. Rest der Geißel, ein sehr großer Fleck in der Mitte des Hinterleibes und zwei kleinere vorn dunkelbraun; Stirnlamellen rötlichgelb; Rest des Kopfes und des Thorax fast schwarz. Manchmal der Hinterleib braunschwarz mit roströtlichen Rändern. Sonst wie der Arttypus.

Amazonas (Coll. Bates).

Cryptocerus obtusus Smith = *pusillus* Klug. In der Coll. Bates sind die Stücke *pusillus* als *obtusus* von Smith bestimmt. Da die Beschreibung von *obtusus* im wesentlichen mit *pusillus* übereinstimmt und da ferner in der Batesschen Sammlung in München keine andere *Cryptocerus*-Art vorhanden ist, die sonst *obtusus* sein und eine Etikettenvertauschung vermuten lassen könnte, halte ich diese Synonymie für genügend festgestellt.

Procryptocerus subpilosus Sm. ☿. Offenbar ein Cotypus von Bates, als *Meranoplus subpilosus* bestimmt. Entspricht gut der Beschreibung. Der Kopf ist ganz hinten und seitlich etwas gröber (viel feiner als am Thorax), in der Mitte außerordentlich fein und dicht längsgestreift. Die zerstreute Punktierung ist sehr seicht, wenig deutlich; es ist auffällig, daß Smith sie erwähnt. Das Epinotum ist viel länger als bei der subsp. *lepidus* Forel und hat nicht vorn am Rand den rundlichen Vorsprung des letzteren, der sehr abweicht und fast eine eigene Art zu bilden verdient. *Lepidus* hat einen stark, grob und reichlich punktierten Kopf.

Amazonas (Coll. Bates).

Dagegen steht *puncticeps* Sm. (wenigstens die Art, die Emery und ich dafür halten) dem *subpilosus* sehr nahe und

dürfte eher als Unterart gelten; er unterscheidet sich fast nur durch den viel gröber und schärfer zerstreut punktierten Kopf. Da überdies *M. puncticeps* nur der ☿ von *attenuatus* ist, stellt sich die Synonymie wie folgt:

Procryptocerus subpilosus Smith (1860), Amazonas; subsp. *attenuatus* Smith, 1876 Para; (= *puncticeps* Smith 1876); subsp. *lepidus* Forel 1908, Sao Paulo; subsp. *impressus* Forel 1899, Panama.

Cataulacus guineensis Smith ☿. Altkalabar (Coll. Bates).

Cataulacus guineensis Smith var. *sulcata* Stitz ☿. Altkalabar (Coll. Bates).

Man kann diesen Namen für die größere Varietät (☿ 7 bis 7,5 mm) behalten, deren Kopf gröber, tiefer und regelmäßiger längsgerunzelt ist. Bei ihr ist auch der Hinterleib, wenigstens auf seiner Vorderhälfte, fein längsgerunzelt. Der Seitendorn des Pronotums ist etwas stumpfer. Sonst alles gleich.

Rhopalothrix Bolaui Mayr ☿. Amazonas, Bates. Stimmt wenigstens mit der Beschreibung überein.

Ceratobasis singularis Sm. ☿. Amazonas (Coll. Bates). Wahrscheinlich ein Cotypus.

Strumigenys mandibularis Sm. ☿ (= S. Smithii subsp. *prospiciens* Em.). Zweifellos ein Cotypus von Smith und von ihm so bestimmt. Amazonas (Coll. Bates). Der Typus soll allerdings von S. Paulo sein, aber Smith erwähnt dabei die biologischen Beobachtungen von Bates.

Der *Smithii* Forel sehr ähnlich, aber der Kopf ist erheblich länger und schmäler; ebenso die Kiefer, deren beiden Randzähne gleichlang sind. Die Augen sind konvexer und mehr nach vorn gerichtet. Die Kiefer sind nicht gegen die Basis zu breiter wie bei *Smithi*, sondern ebenso dünn wie gegen das Ende. Beine länger und schlanker, Stielchen ebenfalls wie die ganze Ameise. Die kleine Randlamelle der abschüssigen Fläche des Epinotums hat nur oben eine schwache, zahnartige Erweiterung; bei *Smithii* ist umgekehrt das untere, episternale Zähnchen stärker. Hinterleib braun, bei *Smithii* braunschwarz.

Länge 3,3—3.5 mm (bei *Smithi* 2,7—3 mm), obwohl schmäler als *Smithii*. Hinterleib etwas reichlicher abstehend behaart.

Sonst wie *Smithii*. Namentlich haben die Kiefer drei Endzähne und zwei Randzähne, somit fünf Zähne und nicht im ganzen drei, wie Smith behauptet. Ein neuer Beleg für die Leichtfertigkeit Smiths. Trotzdem ist es eine schlankere, von *Smithii* verschiedene Art, mindestens eine Unterart. Ich glaube nicht zu irren darin die *Smithii* subsp. *prospiciens* Em. zu erkennen.

Strumigenys Batesi n. sp. ☿. L. 4,7 mm. Kopf hinten 1,5 mm breit; ohne Kiefer in der Mitte kaum 1,2, mehr seitlich über 1,3 mm lang. Kiefer gestreckt, parallel und mit parallelen Rändern, wie bei *Smithii*, *mandibularis* etc., aber viel kürzer, etwa $^1/_3$ der Kopflänge, an der Spitze mit drei gekrümmten Zähnen, deren mittlerer kürzer, aber doch recht entwickelt ist, und am Innenrand mit zwei fast gleichlangen Zähnen (der basale etwas länger). Die Kiefer sind ziemlich breit, nicht 4 mal länger als breit, glatt, punktiert, mit langen, gekreuzten Haaren am Innenrand, gerade (nur an der Spitze gebogen), ohne Spur von durchscheinender Lamelle am Innenrand. Der hinten ungemein breite Kopf ist noch breiter als bei *Chyzeri* Em. und hinten ebenso tief ausgeschnitten, so daß er zwei Lappen bildet. Jeder dieser Lappen ist für sich in seiner ganzen Mitte tief und rundlich, tellerartig eingedrückt. Weiter vorn aber, hinter den Fühlergelenken, ist der Kopf seitlich oben durchaus nicht quer eingedrückt wie bei *Chyzeri*, sondern nur ganz unten unter dem Fühlergelenk, direkt vor dem Auge, eingeschnitten. Die Stirnleisten sind somit auch nicht eingeschnitten; sie divergieren stark und bilden keinen Scrobus nach außen. Augen mäßig konvex. Clypeus dreieckig, breiter als lang, mit nur sehr schwach konvexem Vorderrand. Der an seiner Basis etwas nach hinten gebogene Fühlerschaft erreicht etwa das hintere Kopfviertel. Geißelglieder zwei und drei etwas dicker als lang. Stirnrinne fast bis zum Hinterhauptrand reichend. Pronotum breiter als lang, oben flach, von vorn nach hinten ansteigend, stumpf gerandet und fast rechteckig. Meso-

notum oben vorn mit zwei starken, stumpf zahnartigen Höckern. Basalfläche des Epinotums länglich rechteckig, stumpf gerandet, $1^1/_2$ mal länger als breit. Abschüssige Fläche viel kürzer, sehr schief, mit schwach durchscheinender, roströtlicher, lamellenartiger, nicht sehr hoher Seitenkante, die oben vorn ein gerundetes, plattes, ebenso durchscheinendes Zähnchen bildet. Stielchenknoten mit den üblichen schwammigen Massen, beide gerundet, so breit oder etwas breiter (der zweite) als lang; der zweite doppelt so breit als der erste. Der Petiolus des ersten Gliedes oben etwas längsgerieft und entsprechend gerandet.

Der ganze Körper und die Glieder dicht punktiert-genetzt und matt (die Knoten äußerst fein), der Hinterleib aber sehr fein und dicht längsgestreift und rötlich seidenschimmernd und schillernd. Keulenhaare am Körper sehr zerstreut, reichlich nur am Vorderrand des Clypeus und des Fühlerschaftes. Beine nur anliegend gelblich glänzend, ziemlich reichlich behaart; diese anliegende Behaarung am Körper spärlich, am Kopf vorn deutlicher.

Rostfarbig; Mitte des Kopfes und des Hinterleibes mehr braun. Kiefer, Fühler und Beine heller, mehr gelbrötlich rostfarbig.

Amazonas (Coll. Bates), 1 Stück.

Diese große, sehr eigentümliche Art erinnert etwas an *Godmani* Forel und *cultrigera* Mayr, aber das Fehlen der Lamelle an den Kiefern und die Streifung des Hinterleibes unterscheiden sie scharf davon.

√*Triglyphothrix Marthae* n. sp. ☿. L. 2,5 mm. Fühler 12gliedrig. Den indischen Arten *Walshi* und *musculus* Forel sehr ähnlich aussehend, aber grundsätzlich dadurch unterschieden, daß kein Scrobus vorhanden ist; die Stirnleisten erreichen zwar fast das Ende des Fühlerschaftes, bilden aber weder hinten noch seitlich für ihn eine begrenzte Grube; die Skulptur ist nicht einmal merklich verändert da wo der Schaft an der Stirnleiste außen anliegt. Kiefer gestreift, glänzend, Kopf viereckig, kaum länger als breit, hinten mit fast geradem Rande, seitlich weniger konvex. Augen in der Mitte, nach

unten ein bischen zugespitzt. Der Schaft überragt etwas das hintere Fünftel des Kopfes. Thorax ebenso gewölbt (bucklig) wie bei *Walshi* und *musculus*, aber hinten nur mit zwei spitzen, dreieckigen Zähnen (ohne Dornen). Erster Knoten kaum etwas dünner als bei *Walshi*, aber nicht, wie bei ihm vorn etwas konkav gestutzt und hinten stark konvex, sondern fast gleichmäßig hinten und vorn schwach konvex, oben gerundet, viel breiter als lang. Zweiter Knoten sehr viel breiter als bei *Walshi*, fast 3 mal so breit als lang und sehr viel breiter als der erste. Hinterleib vorn weniger gestutzt als bei *Walshi*.

Der ganze Körper und die Knoten regelmäßig und ziemlich grob punktiert-genetzt und wenig glänzend; nur der Clypeus längs- und die abschüssige Epinotumfläche unten quergerunzelt. Hinterleib und Glieder glatt und glänzend.

Der ganze Körper und die Glieder noch reichlicher und dichter mit meistens fünf- und noch mehr fiedrigen, gelblichweißen Wollhaaren bedeckt, so daß er fast so schimmlig aussieht wie *mucidus* Forel.

Braun; Kopf und Thorax rötlicher braun; Kiefer, Fühler und Beine heller, mehr bräunlichrot.

Aus Sansibar, im Museum München, 1 ☿.

Tetramorium sericeiventre Em. ☿. Altkalabar (Coll. Bates).

Tetramorium (*xiphomyrmex*) *Bismarkii* Forel ☿. Insel Sula (Coll. Bates).

Pristomyrmex pungens Mayr ☿. Insel Sula (Coll. Bates).

Stenamma Owstoni Wheeler ☿. Hokkaido, Japan (H. Sauter).

Messor barbarus L. subsp. *capensis* Mayr var. *proba* n. var. ☿ major. L. 10—11 mm. Schwarz, Kopf rot, Thorax mit rötlichbraunen Zeichnungen. Epinotum ganz unbewehrt. Pronotum gerundet wie bei der var. *decipiens* Forel. Kopf scharf gestreift, aber nicht wie beim echten *capensis* dazwischen punktiert-genetzt. Thorax und Stielchen auch mit viel gröberer und schärferer Skulptur als bei *decipiens*.

Bothaville, Orangestaat (Dr. Brauns).

Der var. *decipiens* am nächsten, aber durch Skulptur und Farbe verschieden, auch etwas größer.

Aphaenogaster Schmitzi Forel subsp. *japonica* n. subsp. ☿. L. 4,9 mm. Größer als die Stammart; braun, mit gelbbraunem Stielchen und Hinterleib und mit rötlichgelben Beinen und Kiefern. Fühler rötlich; die basalen $^2/_3$ des Schaftes braun. Der Hinterrand des Kopfes konvexer, undeutlicher von den Seiten getrennt als beim Arttypus, aber der Kopf hinten durchaus nicht so verschmälert wie bei *Kervillei* Forel oder gar wie bei *famelicus* Smith; er ist hinten ungefähr so breit wie vorn. Fühler und Thoraxform genau wie beim Arttypus, aber die Epinotumdornen sind etwas länger, stärker, an der Basis nicht so breit und plattgedrückt. Alles übrige genau wie beim Arttypus, auch die Clypeusausrandung, die nur etwas schärfer ist. Höchstens sind noch die Haare des Fühlerschaftes etwas abstehender, obwohl schief.

Hokkaido, Japan (H. Sauter).

Abgesehen von den angegebenen Unterschieden ist die Übereinstimmung mit *Schmitzi* aus Palästina so groß, daß ich nur eine Unterart wage.

Myrmica rubra L. subsp. *Kotokui* n. subsp. ☿. L. 3,7 bis 4,3 mm. Mit *ruginodis*, *levinodis* und *Kurokii* verwandt, aber viel kleiner als letztere und mit schwächerer Skulptur. Kopf noch länglicher sogar als bei *rugulosa*, viel länger als breit, hinten etwas schmäler als in der Mitte. Fühler wie bei *levinodis* etc.; der Bogen des Schaftes noch etwas weiter. Dornen genau wie bei *ruginodis*, viel länger als bei *levinodis*. Erster Knoten dicker als bei *levinodis*, etwa wie bei *ruginodis*. Skulptur des Kopfes eher noch schwächer als bei *levinodis*, aber der Clypeus ganz gerunzelt. Skulptur des Thorax wie bei *ruginodis* (stärker als bei *levinodis*), aber das Epinotum zwischen den Dornen glatt. Farbe der *ruginodis*, nur etwas dunkler und zugleich das Rötliche etwas fahler.

♀. L. 5,5 mm. Kopf wie beim ☿, hinten deutlich schmäler als in der Mitte. Thorax schmäler als der Kopf. Epinotum zwischen den Dornen glatt. Braun: Gelenke, Kiefer, Fühler und Beine gelblich bis bräunlichgelb. Sonst wie *ruginodis*.

♂. L. über 6 mm. Kopf etwas länger als breit, hinten nicht breiter als vorn (bei *ruginodis* breiter als lang, hinten breiter als vorn). Fast schwarz; Hinterleib hinten bräunlich, mit helleren Ringen; Glieder rötlich; Fühlerschaft und Schenkel braun. Sonst wie *ruginodis*.

Nördliches Japan (Dr. Haberer).

Vielleicht nur eine Varietät von *ruginodis*, aber durch die Kopfform und den glatten Dornenzwischenraum verschieden.

Leptothorax corticalis Schenk ☿. Unter dem Namen *Leptothorax tirolensis* Gredler befand sich der *L. corticalis* Schenk aus Tirol — eine Varietät mit etwas längeren Dornen und einem zwar recht schwachen, aber doch sichtbaren Einschnitt des Thoraxprofils.

Solenopsis geminata F. subsp. *rufa* Jerdon ☿. Befand sich aus Batjan (Coll. Bates) als *Solenopsis cephalotes* und *Myrmica punctata* bestimmt. Letztere Bestimmung ist jedoch falsch, da *M. punctata* Epinotumdornen hat. *M. punctata* ist aber aus Batjan, so daß es zweifelhaft ist, ob nicht die Etikette mit derjenigen des *Pristomyrmex pungens* (s. oben) aus Sula vertauscht wurde, der dann = M. punctata wäre.

Solenopsis decipiens Emery var. *scelesta* Forel ☿. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Solenopsis Mölleri Forel var. *gracilior* Forel ☿. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Solenopsis fugax Latr.? Sehr kleine Stücke aus Tunesien und Zante. Diejenigen aus Tunesien sind nur 1,4 mm lang und haben sehr kleine Augen. Doch sind sie weder *latro* noch *terniensis* und ich kann sie von *fugax* sonst nicht deutlich unterscheiden. Vielleicht *scipio* Sontschi?

Pheidologeton pygmaeus Emery ☿. Batjan.

Pheidologeton Silenus Smith ☿ min. Hochwald in Nordostsumatra (Morin).

Pheidole transfigens n. sp. ☿. L. 2,4 mm. Fühler 12-gliedrig. Kopf viereckig, mit schwach konvexen Seiten, so breit als lang, etwas deprimiert, mit geradem Hinterrand und fast zahnartig vorspringenden Hinterecken. Die konvexen,

ziemlich großen Augen stehen kaum hinter dem vorderen Kopfdrittel. Kieferendrand fast scharf, undeutlich gezähnelt. Clypeus in der Mitte des Vorderrandes scharf ausgerandet. Stirnfeld lang und spitz. Stirnleisten weit auseinander, fast parallel und fast bis zum Kopfhinterrand reichend. Der Fühlerschaft überragt den Kopfhinterrand um nicht ganz $^1/_3$ seiner Länge. Mittlere Geißelglieder so dick als lang. Pronotum und Epinotum jedes mit zwei spitzen, gebogenen, divergierenden, speerartigen, kolossal langen Dornen, die alle vier gleichlang und so lang als der ganze Thorax sind. Das Mesonotum trägt in der Mitte einen queren, scharfen, von der Seite besehen zahnartigen Vorsprung, der oben stumpf zweizähnig ist. Thorax nicht gerandet. Basalfläche des Epinotums schmal, tief nach vorn eingesenkt (tiefe Einsenkung zwischen ihr und dem Mesonotum), nach hinten zu den Riesendornen etwas aufsteigend. Erster Knoten klein, schuppenartig; zweiter Knoten gerundet, etwas breiter als lang.

Backen längsgerunzelt; sonst ziemlich glatt überall. Am Kopf einige wenige lange Haare; Glieder nur anliegend behaart, sonst fast ohne Behaarung.

Braun; Kiefer, Fühler, Beine, Dornen und Stielchen gelbbraun bis bräunlichgelb.

Neuguinea (Coll. Bates).

Von Pheidolacanthinus durch die 12gliedrigen Fühler und die langen Epinotumdornen; von allen anderen *Pheidole*-Arten durch die sonderbare Kopfform und durch die riesigen Dornen verschieden. Und doch ist es eine echte *Pheidole*.

Pheidole sculpturata Mayr var. *areolata* n. var. ♃. L. 8 mm; Kopf 3 mm lang und 2,6—2,7 mm breit. Clypeus kaum ausgerandet, mit undeutlichem Kiel. Kopfseiten gerader als beim Arttypus, kaum eine Spur konvex; Kopf nach hinten um eine Idee verschmälert. Mehr als die hintere Hälfte des Kopfes zeigt außer der fein punktiert-genetzten Skulptur große, aber seichte Netzmaschen. Sonst wie der Arttypus.

☿. L. 2,8 mm. Kopf hinten etwas verschmälert, mit deut-

licherem Hinterrand und weniger konvexen Seiten als der Arttypus, sehr deutlich länger als breit.

Bothaville, Orange-Staat (Dr. Brauns).

Pheidole termitophila Forel subsp. *liberiensis* n. subsp. ♃. L. 3—3,5 mm. Kleiner als der Arttypus. Kopf kleiner und namentlich hinten mit konvexeren Seiten, somit am Hinterhaupt mehr verschmälert. Occipitalrinne viel weniger tief eingedrückt, ohne Längseindruck am Scheitel. Eindruck für den Fühlerschaft gleich. Pronotum mit seitlich stärker vorspringenden Höckern, oben weniger konvex. Zweiter Knoten länger, nicht so breit und seitlich weniger kegelförmig ausgezogen. Scheitel und Hinterhaupt schimmernd, fein genetzt, und außerdem grob und seicht genetzt, mit einigen mitunterlaufenden Längsrunzeln (beim Arttypus fast glatt). — Heller braun bis gelbbraun; Kopf rötlichbraun oder bräunlichrot; Glieder gelblich.

☿. L. 1,7 mm. Kopf hinten etwas schmäler als beim Arttypus. Der ganze Körper schmächtiger. Farbe heller braun. Sonst nicht zu unterscheiden.

Golah, Liberia, in einem Erdhaufen ohne Bau.

Durch die Kopfform und durch seine Skulptur des Hinterkopfes ist der ♃ leicht zu unterscheiden, der ☿ aber nicht.

Cremastogaster irritabilis Sm. var. *Le Guilloui* Em.

Neuguinea (Coll. Bates).

Cremastogaster impressa Emery ☿. Algoa-Bay, Kapland (Dr. Brauns).

Cremastogaster Batesi n. sp. ☿. L. 7,5 mm. Nahe *Buchneri* Forel und doch recht verschieden. Kiefer breit, etwas gestreckter als sonst, mit schwach gewölbtem, an der Basis außen etwas plattgedrücktem Außenrand, breitem, etwas wenig konkavem Endrand und 5—6 breiten, wenig scharfen Zähnen; sie sind glänzend und grob gerunzelt. Kopf viereckig, so lang als breit, hinten nur schwach ausgerandet. Augen ziemlich groß und flach, kaum hinter der Mitte. Der Fühlerschaft erreicht nicht den Kopfhinterrand (etwa das hintere Kopfsiebentel). Thorax überall gerundet, ohne Ränder oder Wülste;

Pronotum allseitig konvex. Mesonotum fast ohne Kiel und ganz ohne Rand, durch eine quere Naht von einem Metanotum oder Scutellum getrennt, das dem Hinterteil des Mesonotums von *Buchneri* entspricht (bei *Buchneri* aber keine Naht). Zwischen diesem Scutellum und dem Epinotum nur eine sehr schwache Einschnürung. Basalfläche des Epinotums deutlich konvex, sehr viel breiter als lang, mit zwei dicken, stumpfen, dreieckigen Zähnen; abschüssige Fläche schief, länger als die Basalfläche. Stielchen fast genau wie bei *Buchneri*. Schenkel breit, etwas komprimiert.

Kopf glänzend, reichlich und ziemlich stark punktiert, zwischen den Punkten teils glatt teils sehr fein und schwach gestrichelt. Clypeus und Wangen fein längsgestreift. Mesonotum mikroskopisch fein und dicht längsgestreift, viel feiner als bei *Buchneri*, und matt; am übrigen Thorax ist die Skulptur verworrener, am Epinotum schwach. Hinterleib mehr glänzend, sehr fein genetzt, reichlich punktiert. Fein, gelblich, weitläufig, aber sehr deutlich und regelmäßig anliegend, gar nicht abstehend behaart.

Rötlichbraun, mit rötlichen Kiefern, Fühlern und Beinen.

Altkalabar (Coll. Bates). Von *Buchneri* durch die Form der Kiefer, des Kopfes und des Epinotums, auch durch die Skulptur des Kopfes verschieden. Sieht auch dem *Stolli* Forel aus Amerika etwas ähnlich.

√ *Cremastogaster Buchneri* Forel subsp. *alligatrix* n. subsp. ☿. L. 4,5—5 mm. Schwarz oder fast schwarz, wie die subsp. *Foreli* Mayr, aber der Kopf ist viel breiter als lang, mit stark konvexen Seiten (so lang als breit, mit schwach konvexen Seiten bei *Foreli*). Das Mesonotum hat einen durchgehenden, sehr starken, hohen Kiel in der Mitte und das Epinotum nur starke Zähne statt Dornen. Die Skulptur ist dicht gestreift, wie bei der Stammart, oder noch stärker.

Altkalabar (Coll. Bates).

√ *Cremastogaster Buchneri* Forel subsp. *clariventris* Mayr ♀. Liberia (Scherer).

√ *Cremastogaster africana* Mayr var. *Winkleri* Forel. Altkalabar (Coll. Bates). Diese Varietät sieht den kleinen Exemplaren von *Buchneri* sehr ähnlich. Beide Arten sind so variabel, daß es mich nicht wundern würde, wenn genaue Studien an Ort und Stelle Übergänge feststellen würden. Die var. *Winkleri* ist die Riesenform von *africana* und erreicht bis 4,6 mm. Die längeren Dornen unterscheiden sie von der subsp. *alligatrix* und auch die Form des ersten Stielchengliedes sowie der etwas schwächere Kiel des Mesonotums. Doch gibt es auch *Buchneri* var. mit schwachem Kiel und längeren Dornen, und das erste Stielchenglied ist nicht immer so viel breiter vorn bei *africana* var. *Winkleri*.

√ *Cremastogaster ferruginea* Forel subsp. *museisapientiae* n. subsp. ☿. L. 4—4,2 mm. Fühler etwas länger als bei der Stammart; der Schaft erreicht den Hinterhauptrand. Pronotum gewölbter, weniger breit und flach, so daß der Rand weniger auffällt. Mesoepinotaleinschnürung viel tiefer als beim Arttypus und den beschriebenen Varietäten. Dornen etwas kürzer, weniger abstehend und weniger divergierend. Stielchen viel schmäler als beim Arttypus und bei den var. *harrarica* For. und *ulugurensis* For., etwa wie bei der var. *aquila* For., speziell das zweite Stielchenglied, mit seinen länglichen Hälften; aber das erste Stielchenglied hat die Form des sonst ganz anderen *Cr. solers* For.; seine schmälere hintere Hälfte hat parallele Ränder, die dann konkav werden und an der vorderen Hälfte zwei erweiterte rundliche Ohren oder Ecken bilden.

Kopf glänzend, mit sehr feiner, schwacher und seichter Streifung (matt oder fast matt bei den anderen sbsp.); Skulptur des Thorax feiner und schwächer als beim Arttypus; Stielchen etwas glänzend. Behaarung ebenso fehlend. Hellbraun; Kopf gelblich; Glieder bräunlichgelb.

♀. L. 8,7 mm. Stirne mit einem Längseindruck in der Mitte. Kopf stärker gerunzelt als beim ☿, breiter als der Thorax. Epinotum mit zwei breiten, etwas nach oben gekrümmten Zähnen, und, vor denselben, mit buckeligem Seitenrand. Stielchenform wenig auffallend. Mesonotum glatt. Flügel

leicht gelblich angehaucht, mit gelblichen Adern. Dunkler braun als der ☿, aber auch mit gelblichem Kopf.

♂. L. 4—4,3 mm. Kiefer dreizähnig, mit parallelen Rändern. Geißelglieder 1—5 dicker als lang. Kopf mit breitem, konvexem Hinterrand, vor den Augen viel schmäler, schmäler als der Thorax. Epinotum buckelig. Ganz hellbraun mit etwas helleren Gliedern. Kopf punktiert-genetzt, zum Teil matt.

Auf der Etikette des Museums steht: „Wahrscheinlich bei München." In Wirklichkeit aber stammt das Tier zweifellos aus dem tropischen Ostafrika, wie Stammart und ihre Varietäten.

Cremastogaster Stadelmanni Mayr var. *Schereri* n. var. ☿. L. 3,3—3,5 mm. Viel kleiner als die Stammart. Kopf etwas kürzer, kaum länger als breit, hinten wenig verschmälert. Thorax gleich geformt, aber die Dornen viel kürzer und dünner, kürzer als die Basalfläche, etwa halb so lang wie ihr Zwischenraum. Stielchen gleich geformt; zweiter Knoten ohne Mittelrinne, hinten ausgerandet. Skulptur viel seichter, fein genetzt, überall ziemlich glänzend.

Bendov, Liberia (Scherer).

Cremastogaster quadriformis Roger var. *gracilior* Forel. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Cremastogaster brevispinosa Mayr var. *Schuppi* Forel und var. *minutior* Forel. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Cremastogaster brevispinosa Mayr var. *Thalia* n. var. ☿. L. 2,5—3 mm. Kopf hinten etwas tiefer ausgerandet. Keule mehr zweigliedrig. Erstes Stielchenglied viereckig, vorn etwas breiter, hinten mit zwei deutlichen Zähnchen. Kopf seitlich schimmernd, fein längsgerunzelt. Farbe auffallend hell, bräunlich-gelb; Kopf etwas dunkler; Hinterleib braun; Glieder bräunlich. Sonst wie der Arttypus und auch deren Epinotumform (nicht die der subsp. *tumulifera* Forel).

♀. L. 7,2 mm. Etwas heller gefärbt wie die Stammart; Epinotum mit zwei ganz stumpfen Zähnchen. Sonst wie der ☿; Flügel wie bei der Stammart.

San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Cremastogaster limata Smith subsp. *parabiotica* Forel var. ***levior*** n. var. ☿. L. 2,3—2,5 mm. Kopf breiter als beim Unterarttypus, besonders hinten, wo er deutlicher ausgerandet und etwas breiter ist als vorn. Pronotum ganz glatt; Mesonotum fast glatt. Körperfarbe heller, hellbraun mit dunkelbraunem Hinterleib. Dornen etwas kürzer; Thoraxausrandung etwas tiefer.

Amazonas (Coll. Bates).

Cremastogaster victima Smith subsp. *nitidiceps* Emery var. ***pergens*** n. var. ☿. L. 2,1--2,3 mm. Noch kleiner als *nitidiceps* s. str. Pronotum mit dem Mesonotum zusammen konvexer. Dornen kürzer, ganz gerade, stärker divergierend. Erstes Stielchenglied noch kürzer. Kopf und Hinterleib braun; Thorax und Stielchen bräunlichgelb.

San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Cr. victima subsp. *nitidiceps* steht der *curvispinosa* Mayr var. *antillana* Forel sehr nahe und unterscheidet sich hauptsächlich durch das kurze erste Stielchenglied.

Cremastogaster Auberti Emery ☿. Pyrénées orientales.

Myrmicaria rugosa Smith ☿. Batjan (Coll. Bates). Vielleicht ein Cotypus. Recht charakteristische Art.

Sima pilosa Smith. Tep. Tingi, Sumatra.

√ *Sima natalensis* Smith var. *obscurata* Em. Algoa-Bay, Kapland (Dr. Brauns).

Pseudomyrma gracilis F. subsp. *mexicana* Em. Solentinam-Insel, Mittelamerika (Dr. W. Lehmann).

Pseudomyrma mutilloides Emery ☿. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Pseudomyrma mutilloides Em. subsp. ***pupa*** n. subsp. ☿. L. 10,6 mm. Kleiner und schmächtiger als der Arttypus, aber größer und breiter als *gracilis*; die Augen sind länger und größer als bei beiden und liegen ziemlich genau in der Mitte der Kopfseiten, deren $^3/_5$ sie einnehmen (beim Arttypus liegen sie hinter der Mitte und nehmen etwa die Hälfte der Kopfseiten ein). Unter den Augen ist der Kopf weniger abgeflacht als beim Arttypus. Erstes Stielchenglied etwas länger und na-

mentlich deutlich gestielt. Sein Stiel ist zwar dick und nicht scharf abgesetzt, aber fast so lang wie die Hälfte des Knotens. Dieser ist aber kürzer und hinten viel breiter als bei der subsp. *mexicana* der *gracilis*, deren Kopf und Augen übrigens ganz anders sind. Die Kiefer sind etwas kürzer und gebogener als beim Arttypus; sonst ist alles gleich, insbesondere die Thoraxform und auch das bläuliche Schillern.

Schwarz mit bläulichem Schimmer; Glieder braun; Vorderrand des Kopfes, Kiefer, vordere Schienen und Tarsen und Gelenke der Glieder rötlichgelb.

Amazonas (Coll. Bates). Der breite, abgeflachte Kopf etc. stellen diese Form zu *mutilloides*. Aber sie bildet eine Art Übergang zu *gracilis*, insbesondere zur subsp. *mexicana* sowie auch etwas zu *sericata*.

Pseudomyrma Schuppi Forel. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Pseudomyrma Kurokii Forel var. ***rufiventris*** n. var. ♀. L. 6,1 mm. Kopf $1^1/_2$ mal länger als breit. Die Augen liegen wie beim ☿ und nehmen gut die Hälfte der Kopfseiten ein. Flügel wasserhell, mit blassen Adern und Randmal. Erstes Stielchenglied länger als beim ☿, wie bei den verwandten Arten (*spinicola*, *Belti-fulvescens*, *Caroli* etc.), Hinterleib gelbrot mit einem braunen Fleck an der Basis; beide Knoten gelbrot unten und seitlich, oben braun. Sonst alles genau wie beim ☿ des Arttypus aus Columbien. Die genannten Unterschiede sind aber, abgesehen von der Farbe, polymorphisch sexueller Art, sodaß höchstens eine Varietät, trotz des so verchiedenen Fundortes, zulässig ist.

San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Pseudomyrma Oki Forel ♀ (?). L. 4,5 mm. Kopf länglich rechteckig, nahezu doppelt so lang als breit. Die ausgestreckten Fühler mit Geißel erreichen gerade den Hinterhauptrand; dieser ist gerade. Die langen Augen nehmen $^1/_2$ der Kopfseiten ein. Mesonotum fast so breit wie der Kopf. Außer der auffallend langen, schmalen Gestalt stimmt alles andere — sexueller Polymorphismus abgerechnet — genau mit dem ☿ des Arttypus

überein; auch Farbe, Behaarung und Skulptur; höchstens ist das ♀ etwas glänzender (Skulptur etwas schwächer und weniger dicht punktiert). Da jedoch bei den *Pseudomyrma* ♀ der Polymorphismus zur Verschmälerung und Verlängerung des Körpers führt (des Platzes in den röhrenförmigen Grashalmen oder Ästchen, wo sie wohnen, wegen) glaube ich doch, daß es *Oki* ♀ ist. Der zweite Knoten ist (wie der erste) länger als beim ☿, aber doch noch etwas breiter als lang.

Costarica (Dr. W. Lehmann).

In der Beschreibung des ☿ muß eines korrigiert werden: die Augen sind nicht „fast so lang", sondern „etwas länger" und zwar deutlich etwas länger als die Hälfte der Kopfseiten. Der Arttypus ist aus Columbien, somit nicht weit entfernt wohnend.

Pseudomyrma termitaria Smith = *gracilis* F. Unter diesem Namen hat Smith in der Coll. Bates kleine ☿ von *gracilis* bestimmt. Da gerade die so verbreitete *Ps. gracilis* in der Farbe sehr wechselt und Smith seine „*Pseudomyrma*-Arten" hauptsächlich nach der Farbe unterscheidet, ist es nicht zu verwundern, wenn dieser Autor gerade aus *Ps. gracilis* verschiedene rätselhaft gebliebene Arten zugeschnitten hat.

Pseudomyrma perforator Smith ☿ (sollte wohl wenigstens *perforatrix* heißen). Entspricht genau der Beschreibung und ist wohl ein Cotypus. Nur soll es wohl nicht heißen *„the femora pale fusco testaceus"*, da diese gleichen femora vorher als *„dark brown"* bezeichnet wurden, sondern *„the tibiae"* (obwohl auch diese nochmals in ihrer Farbe erwähnt werden).

Diese Art ist mit *gracilis* F. var. *dimidiata* Roger sehr nahe verwandt, vielleicht nur eine Unterart. Den einzigen Unterschied erwähnt Smith nicht! Der Kopf ist nämlich an seiner Vorderfläche erheblich konvexer; er hat außerdem viel konvexere Seiten und daher einen kürzeren Hinterrand (ein schmäleres Hinterhaupt). Thorax, Stielchen, Clypeus und Kiefer sind dagegen ganz gleich geformt. Die Konvexitäten des Kopfes sind noch ausgesprochener als bei der *gracilis-mexicana*. Die Skulptur ist schwächer als bei *gracilis*; der

Körper überall ziemlich glänzend. Stielchen und Hinterleib sind gelb.

Amazonas (Coll. Bates).

Pseudomyrma advena Sm. = *oculata* Sm. In seiner Arbeit „Descr. of some Sp. of Brazilian Ants, Trans. ent. soc., London 1855, S. 14 und Tafel XIII hat Smith scheinbar zwei Arten abgebildet, die er nicht beschrieb, nämlich *Eciton raptor* und *Pseudomyrma advena*. Sieht man jedoch genauer zu, so findet man, daß — soweit Smithsche Figuren überhaupt erkennbar sind — erstere Figur dem *Eciton rapax* und letztere der *Pseudomyrma oculata* entspricht, die beide in der gleichen Arbeit beschrieben sind. Bei der *Ps. advena* ist dies um so zweifelloser, als er bei der Beschreibung der *oculata* auf Tafel XIII verweist. Auf jener Tafel sind aber nur zwei Arten *Pseudomyrma* abgebildet, von welchen die eine (*cephalica* = *filiformis* F.) unverkennbar, weil einzig in ihrer Art, und längst festgestellt worden ist. Bleibt also nur *oculata* im Text und *advena* auf der Tafel. Daraus geht hervor, daß die Namen *Eciton raptor* und *Pseudomyrma advena* auf der Tafelerklärung nichts anderes als stehengebliebene Schreib- oder Druckfehler sind, deren zweiter unbegreiflicherweise in den Katalogen (Dalla Torre, nicht Roger) als Art angeführt worden ist. Es gibt somit weder einen *Eciton raptor* Sm. noch eine *Pseudomyrma advena* Sm.; die beiden Namen sind zu streichen oder meinetwegen als Synonyme zu stellen.

Pseudomyrma oculata Sm. Was diese Art ist, weiß ich nicht genau. In der Schachtel der Coll. Bates sind zwei Arten, die sie sein könnten und die unter dem Namen „*oculata* Sm.“ vermischt sind, nämlich:

1. *Pseudomyrma biconvexa* Forel ☿. Amazonas (Coll. Bates). Kleine Form von 4,8 mm Länge. In meiner Beschreibung habe ich die länglichen Augen etwas zu kurz angegeben; sie sind etwas länger als ihre Entfernung vom Hinterhauptrand und nehmen mehr als die $^2/_3$ der Kopfseite ein; und:

2. *Pseudomyrma dolichopsis* Forel var. *implicata* n. var. ☿. L. 4,3 mm. Kopf hinten weniger ausgerandet und mit mehr

gerundeten Hinterecken (am Hinterhaupt etwas mehr verschmälert) als der Arttypus. Zweiter Knoten nicht ganz so breit. Farbe bräunlichgelb. Abstehende Behaarung an den Schienen ganz fehlend (einige kurze, etwas schiefe Härchen beim Arttypus). Sonst dem Arttypus ganz entsprechend.

Amazonas (Coll. Bates).

Die Figur Smiths und seine Beschreibung passen halb auf beide Formen; *biconvexa* ist glänzend, *dolichopsis* matt; darüber sagt aber Smith nichts. Die Abbildung des ersten Stielchengliedes paßt eher auf *dolichopsis*, die Bemerkung „Thorax strangulated in the middle" besser auf *biconvexa*, obwohl auch *dolichopsis* eine (schwächere) Thoraxeinschnürung besitzt, die von der Seite wie von oben zu sehen ist.

Um daher die Konfusion nicht zu vergrößern, behalte ich bis auf weiteres die Namen *biconvexa* und *dolichopsis* und lasse *oculata* mit einem Fragezeichen.

Pseudomyrma filiformis F. (*cephalica* Sm.) ♀. Offenbar ein Cotypus.

Amazonas (Coll. Bates).

Pseudomyrma sericata Smith. Offenbar Cotypus.

Amazonas (Coll. Bates). Diese Form ist von Emery bereits festgestellt und eher als Subspezies von *gracilis* zu betrachten.

Pseudomyrma tenuis F. ☿. Amazonas (Coll. Bates). Ohne Namensetikette.

Pseudomyrma levigata Smith. Amazonas (Coll. Bates). Ohne Namensetikette.

Pseudomyrma elongata Mayr ☿♀. Amazonas (Coll. Bates). Ohne Namensetikette.

Pseudomyrma sericea Mayr var. *ita* Forel. Amazonas (Coll. Bates). Ohne Namensetikette.

Pseudomyrma levigata Smith ☿. Amazonas (Coll. Bates). Zwar ohne Namensetikette. Da der einzige ☿ aber der Smithschen Beschreibung, namentlich bezüglich Kopfform, Glätte des Körpers, Thoraxform und Farbe entspricht; da ferner Smiths Typus aus Ega (Hauptsammelstelle von Bates) stammt, ist wohl an der Echtheit kaum zu zweifeln. Nur sind die ziem-

lich steifen und langen Haare am Körper und an den Beinen, wie schon Emery richtig bemerkte, braun und nicht „pale". Das erste Stielchenglied ist etwa wie bei *mutilloides* subsp. *pupa* (siehe oben), doppelt so lang als sein Vorderstiel, aber ungemein schmal, mehr als doppelt so lang wie breit; der zweite doppelt so breit als der erste, wie Smith angibt, aber außerdem viel länger als breit.

Daraus ergibt sich, daß die Form aus Columbien, die ich bisher für *levigata* hielt, eine abweichende Subspezies ist:

Pseudomyrma levigata Smith subsp. *Kitschelti* n. subsp. ☿. L. 9 mm. Kopf breiter und auf der Vorderfläche weniger konvex als beim Arttypus, hinten vor allem weniger verschmälert und etwas stärker ausgerandet. Vorderlappen des Clypeus deutlicher und länger. Thoraxausrandung schwächer. Epinotum etwas breiter, hinten so breit als vorn (schmäler hinten beim Arttypus). Der erste Stielchenknoten viel breiter, kürzer, vorn steiler abfallend; sein Vorderstiel fast so lang als der Knoten selbst. Zweiter Knoten nur etwas breiter als lang. Kopf und Thorax schimmernd oder fast matt, mit viel dichterer Punktierung. Abstehende Haare viel kürzer und feiner, heller rotbraun. Anliegende Behaarung ebensowenig reichlich. Farbe gleich.

Narancho, am Fuß der Sierra Nevada de Santa Marta, Columbien; von mir selbst gesammelt.

Pseudomyrma levigata Sm. subsp. *osura* n. subsp. ☿. Länge 7,2 mm. Kopf deutlich länger als breit, länger als beim Arttypus und als bei der subsp. *Kitschelti*, ungefähr so konvex auf seiner Vorderfläche wie beim Arttypus, aber hinten und vorn gleichmäßig verschmälert (beim Arttypus hinten stärker, bei der subsp. *Kitschelti* vorn stärker). Clypeuslappen wie bei *Kitschelti*. Thoraxausrandung noch stärker als beim Arttypus. Basalfläche des Epinotums von vorn nach hinten viel konvexer als beim Arttypus und besonders als bei *Kitschelti*, weniger scharf gerandet, nicht viel schmäler als das Pronotum, kaum länger als die abschüssige Fläche (viel länger bei den beiden anderen). Stielchen genau wie bei *Kitschelti*, ebenso die ab-

stehende Behaarung. Anliegende Pubeszenz reichlicher als bei den beiden anderen, besonders auf dem Hinterleib. Glatt und glänzend wie der Arttypus. Farbe etwas dunkler rötlichgelb als bei beiden anderen; Vorderkopf aber auch blässer.

Costarica (Pittier), meine Sammlung.

Ich hatte diese kleinere Form bisher nicht unterschieden; sie weicht aber in ihrer Art ebensosehr vom Arttypus ab als *Kitschelti.*

Pseudomyrma ethica n. sp. ☿. L. 3,2—3,7 mm. Clypeus ohne deutlichen Lappen; Stirnleisten einander sehr nahe. Kopf länglich rechteckig, 1 1/3 mal länger als breit, mit schwach konvexen Rändern. Augen länglich, etwas vor der Mitte, im ganzen fast 1/2 der Kopfseiten einnehmend. Hinterrand des Kopfes gerade. Der Fühlerschaft erreicht nicht die Kopfmitte, höchstens das zweite Fünftel. Thorax ungemein schmal, viel schmäler als der Kopf, zwischen Mesonotum und Epinotum nur schwach und schmal ausgerandet. Pronotum stumpf gerandet, etwas länger als breit, viereckig. Mesonotum, von oben besehen, scheibenförmig, etwas breiter als lang, sowohl vom Pronotum wie vom Epinotum durch einen Einschnitt seitlich getrennt. Basalfläche des Epinotums längsoval, viel länger als breit, stumpf gerandet, fast doppelt so lang wie die abschüssige Fläche. Erstes Stielchenglied schmal, ohne Rand, fast doppelt so lang als breit, hinten wenig verbreitert, vorn fast ohne resp. mit nur ganz kurzem Stiel. Zweites Glied doppelt so breit als das erste, kaum länger als hinten breit.

Glänzend; Kopf hinten und Hinterleib glatt; Thorax und Kopf vorn äußerst schwach genetzt. Abstehende und anliegende Behaarung fast Null.

Blaßgelblich oder blaß bräunlichgelb. Epinotum und Hinterleib braun. Schenkel und Stielchenglieder mehr oder weniger gelbbraun.

Amazonas (Coll. Bates).

Diese zierliche Art steht *acanthobia* Em. und subsp. *delicatula* Forel sehr nahe, unterscheidet sich aber durch die Farbe und durch das längere, oben nicht gerandete erste Stielchen-

glied sowie durch die noch zartere Gestalt. Vielleicht nur Subspezies.

Pseudomyrma simoides n. sp. ☿. L. 6,5 mm. Relativ stämmig, etwas stämmiger als *Belti*, fast wie *Künckeli*, aber mit schmälerem Kopf. Kiefer glänzend, äußerst fein gerunzelt und zerstreut punktiert. Clypeus am Vorderrand in der Mitte senkrecht gestutzt, beiderseits davon mit einem kurzen, stumpfen Zahn, in der Mitte stumpf gekielt. Kopf rechteckig, hinten und vorn gleich und mäßig verschmälert, mit mäßig konvexen Rändern, um ca. $^1/_5$ länger als breit, hinten fast gerade, mit konvexer, durchaus nicht deprimierter Vorderfläche. Die Augen sind wenig vor der Mitte und nehmen ca. $^2/_5$ der Kopfseiten ein. Der Fühlerschaft überragt deutlich die Kopfmitte. Mittlere Geißelglieder dicker als lang. Pronotum viereckig, konvex, fast so lang als breit, etwas stumpf, aber sehr deutlich gerandet, hinten tief ausgerandet, vorn beiderseits gerundet. Mesonotum fast kreisrund, etwas breiter als lang und hinten als vorn. Mesoepinotale Ausrandung im Profil scharf ausgemeißelt, wie eine breite Querrinne mit fast senkrechter Vorder- und Hinterwand; in ihrer Tiefe ein sehr kurzes Metanotum (Zwischensegment) mit zwei Stigmen. Basalfläche des Epinotums flach, länglich rechteckig, sehr deutlich, aber stumpf gerandet, hinten so breit als vorn, fast doppelt so lang als breit und als die scharf von ihr getrennte, fast senkrecht abfallende abschüssige Fläche; dennoch gehen beide Flächen durch eine rasche Kurve ineinander über. Erster Knoten hinten so breit als lang, vorn stark verschmälert, oben fast horizontal und schwach konvex, sehr stumpf gerandet, vorn und hinten senkrecht gestutzt, mit einem kurzen, aber sehr scharf abgesetzten Vorderstiel (etwas mehr als halb so lang wie der Knoten). Zweiter Knoten nicht ganz doppelt so breit wie der erste, aber ordentlich breiter als lang, gut so breit wie das Epinotum. Schenkel in der Mitte etwas verdickt.

Glänzend, zerstreut gröber punktiert, fast glatt. Mesonotum, Beine, Vorderkopf und noch einzelne Stellen schwach genetzt oder fein punktiert, Hinterleib und zweites Stielchen-

glied schimmernd, dicht genetzt oder punktiert genetzt, mit einer äußerst feinen, anliegenden, ziemlich dichten Pubeszenz bedeckt. Beine reichlich punktiert und pubeszent. Abstehende Behaarung fast null. Am Kopf und Thorax auch fast keine Pubeszenz.

Blaß bräunlichgelb oder rötlichgelb. Hinterleib, Mesonotum und ein Fleck um die Ocellen mehr oder weniger hellbraun. Fühler, Beine und Vorderende des Kopfes mit den Kiefern blaßgelb.

Amazonas (Coll. Bates).

Diese Art ist durch ihre Form äußerst charakteristisch. Sie erinnert etwas an *dendroica* Forel und *symbiotica* Forel, aber Clypeus und erstes Stielchenglied sind ganz anders. Die Clypeusform erinnert an *Sima*.

4. Subf. Dolichoderinae.

Dolichoderus abruptus Sm. ☿. Amazonas (Coll. Bates).

Dolichoderus Rosenbergi n. sp. ☿. L. 13 mm. Dem *attelaboides* F. nahestehend, aber wie folgt zu unterscheiden: Hals noch länger, so lang wie 1/2 des übrigen Kopfes. Fühler etwas schlanker; vorletztes Geißelglied 1 1/3 mal länger als dick (fast so dick als lang bei *attelaboides*); erstes Geißelglied 4 mal (bei *attelaboides* 3 mal) länger als dick. Das Mesonotum bildet vorn oben eine zwar oben stumpfe, aber doch so hoch als dicke quere Kante, die von der Seite gesehen wie ein Kegel oder ein stumpfer Zahn aussieht (bei *attelaboides* einen breiten Höcker oder Wulst). Stielchen viel länger; der Knoten, den er vorn bildet, ist mindestens 1 1/2 mal länger als breit (so breit oder breiter als lang bei *attelaboides*); sein hinterer Stiel ist weniger scharf abgesetzt. Das Ende der Schenkel bilden zwei spitze, plattgedrückte, dreieckige, lange Zähne, die länger sind als an der Basis breit (breiter als lang und stumpf bei *attelaboides*).

Glänzend, Hinterleib glatt. Kopf, Thorax und Stielchen erheblich gröber und unregelmäßiger netzmaschig als bei *attelaboides*. Epinotum zwischen den Dornen grob längsgerunzelt

(3—4 Runzeln), während er bei *attelaboides* quer netzmaschig ist. Besonders durch den ganz glatten Hinterleib von dem matten, dicht punktiert-gerunzelten *attelaboides* sofort zu unterscheiden, aber auch durch die noch schlankere Gestalt etc.

Cachati, Nordwestecuador, 500′ (W. F. H. Rosenberg).

Dolichoderus cuspidatus Sm ☿ ♂. Hochland von Nordostsumatra (Morin).

♂ L. 3,7 mm. Schwarz, matt, unregelmäßig genetztgerunzelt; Hinterleib schimmernd, fein genetzt. Ziemlich reichlich kurz abstehend, an den Schienen schief behaart. Flügel wasserhell, mit blassen Rippen. Kiefer mit sehr langem, ganz fein gezähneltem Endrand. Scutellum gerundet, bucklig; Übergang der Basalfläche zur abschüssigen Fläche des Epinotums eckig. Schuppe dick, oben gerundet, aber viel breiter als dick.

√*Technomyrmex Andrei* Emery v. *Schereri* n. var. ☿. Länge 3 mm. Viel kleiner als der Arttypus, sonst ganz der Beschreibung entsprechend. Aber die Basalfläche des Epinotums viel kürzer als die abschüssige und mit ihr einen deutlichen, etwas stumpfen Winkel bildend. Schwarz; Hüften, Tarsen, Gelenke und Basis der Schenkel blaßgelblich; Fühler, Kiefer und Rest der Beine braun.

Kap Mount, Liberia (Scherer). Der var. *camerunensis* Em. näher noch als dem Arttypus.

Iridomyrmex anguliceps Forel ♀. Herbertshöhe, Deutsch-Neuguinea (Mohl).

Iridomyrmex itinerans Lowne subsp. *nitidiceps* André. Sydney.

Iridomyrmex scrutator Sm. subsp. *Batesi* n. subsp. ☿. L. kaum 3 mm. Ziemlich glänzend, fein genetzt. Die zerstreute Pubeszens verdeckt keineswegs die Skulptur. Die Thoraxeinschnürung ist viel breiter als in Emerys Figur und enthält in ihrer Tiefe ein kurzes, horizontales Metanotum mit zwei nach oben prominierenden Stigmen. Das hohe, bucklige, komprimierte Epinotum erhebt sich viel senkrechter als in Emerys Figur. Es ist hinten etwas schief von vorn nach hinten, und auch vorn, obwohl weniger, gestutzt. Sonst alles gleich.

Neuguinea (Coll. Bates).

Azteca velox Forel. Ecuador.

Azteca adrepens n. sp. ☿. L. 2,8—4,3 mm. Zwischen *Foreli* Em. und *trigona* Em. subsp. *Mathildae* Forel.

☿ major. Der dicke Kopf ist 1,7 mm lang (ohne Kiefer) und 1,5 mm breit, somit viel länger als bei *Mathildae*, aber doch hinten viel breiter und vorn viel mehr verschmälert als bei *Foreli*, mit ungemein konvexen Seiten, hinten stark ausgerandet, doch weniger tief als bei *trigona* und Subsp. — Der Schaft erreicht nicht den Hinterhauptrand. Alle Geißelglieder länger als dick, länger als bei *Mathildae* und *Foreli*. Augen wie bei *Foreli*, nicht so flach und nicht so groß wie bei *Mathildae*. Mesonotum bucklig wie bei *Foreli*. Epinotum mit langer, ziemlich flacher Basalfläche und viel kürzerer, von ihr scharf abgesetzter, abschüssiger Fläche. Die durchaus kegelförmige, nach vorn geneigte, hinten und vorn flache, oben spitzige Schuppe ist ähnlich wie bei *Mathildae*, aber nicht so hoch, durchaus anders als bei *Foreli*. Stielchen unten vorn mit einem stumpfen Zähnchen, hinten schwach längskonvex.

Mäßig glänzend, stark punktiert und stark pubeszent, noch etwas stärker als *Foreli*, viel stärker als *Mathildae*, auch viel weniger glänzend als diese Form. Abstehende Behaarung wie bei *Foreli*, gelblich, am Körper sehr zerstreut, an den Gliedern fehlend.

Bräunlichrot. Hinterleib, Stielchen und Beine bräunlichgelb, mit braunen Querbinden. Tarsen gelb. Kiefer und Fühlergeißel, außer dem rötlichen ersten Glied, dunkelbraun.

☿ minor. Kopf trapezförmig, kaum länger als breit, im Verhältnis zum Körper viel kleiner, meist aber gleich geformt wie beim großen ☿, vorn stark verschmälert, aber mit weniger konvexen Seiten. Alle Geißelglieder länger als dick; der Schaft überragt etwas den Kopfhinterrand. Promesonotum gleichmäßig konvex. Epinotum und Schuppe wie beim großen ☿, aber letztere viel niedriger, kurz keil- oder kegelförmig, kaum nach vorn geneigt.

Ganz braun; Tarsen gelblich; vordere Hälfte des Kopfes und Basalhälfte des Fühlerschaftes rötlich.

San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Vielleicht nur Subspezies von *Foreli.* Durch den nach hinten ungemein verbreiterten und konvexen Kopf, durch die Form der Schuppe und durch den größeren Polymorphismus unterschieden.

Dorymyrmex pyramicus Rog. subsp. *brunneus* Forel var. *spuria* n. var. ☿. L. 2,6 mm. Kopfseiten weniger konvex als beim Typus der Subspezies. Farbe fast schwarz. Gelenke der der Beine gelb.

San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Dorymyrmex pyramicus Rog. subsp. *flavus* Mac Cook var. *parauensis* n. var. ☿. L. 2,6—2,7 mm. Zarter und kleiner als der Typus der Subspezies. Der Fühlerschaft überragt den Hinterhauptrand nur um $^1/_6$ seiner Länge (fast $^1/_4$ beim *flavus*-Typus). Farbe blässer gelb (fahlgelb und nicht rötlichgelb wie beim Typus). Geißel gebräunt, am Ende braun. Hinterleibsende schwach gebräunt.

San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

5. Subf. Camponotinae.

Brachymyrmex Heeri Forel var. *termitophila* For. ☿. Paraguay (Fiebrig).

Acropyga moluccana Mayr subsp. *Mysolensis* ☿. Länge 3,4 mm. Unterscheidet sich von der Stammart (nach Mayrs und Emerys Beschreibung) durch die Fühler, deren Schaft den Hinterhauptrand etwas überragt und deren Geißelglieder alle erheblich länger als dick sind (nach Mayer so dick als lang beim Arttypus), länger als bei *acutiventris.*

Der Kopf ist etwas breiter als lang, hinten viel breiter als vorn und ziemlich stark ausgerandet, mit seichter Occipitalrinne; im übrigen mit Mayrs Beschreibung der *moluccana* gut übereinstimmend. Die Kopfform ist von *acutiventris* gänzlich verschieden; bei letzterer sind nicht nur die Seiten fast nicht konvex (bei *moluccana* stark konvex), sondern der Kopf ist hinten nicht breiter als vorn. Bei *Mysolensis* ist der Kopf

hinten breiter und vorn schmäler als in Emerys Figur des Typus der *moluccana*.

Mysol (Coll. Bates).

Acropyga crassicornis Emery. Als solche muß ich jetzt Stücke aus dem Bismarckarchipel (Dahl) bestimmen, die ich früher für *moluccana* hielt. Diese Art steht aber der *acutiventris* var. *flava* sehr nahe.

Acropyga acutiventris Roger. Um über den Typus ins klare zu kommen, habe ich Herrn Stitz in Berlin gebeten, ihn nochmals genau anzusehen. Er schreibt mir:

„♀. Kopf bis zum Vorderrand des Clypeus 0,75 mm, Thorax 1 mm, Abdomen 2 mm. Das ganze Exemplar ist so groß wie ein größeres ☿ von *Las flavus* aus Rogers Sammlung. Die Färbung des *L. flavus* ist deutlich ins Rötliche schimmernd, während sie bei *Acropyga acutiventris* fahlgelb ist, wie bei einem kleineren ☿ von *Las flavus*, aber etwas schmutziger gelb."

Daraus geht hervor, daß ich bisher die *A. acutiventris* richtig taxiert habe und daß die subsp. *rubens* und *Bugnioni* ihre Berechtigung behalten. Vom ♀ gibt Herr Stitz die Länge des Kopfes (ohne Kiefer) auf 1 mm, Thorax 1,8 mm, Abdomen 2,6 mm. Dies stimmt auch vollständig mit meinen Typen aus Ceylon überein.

Dagegen kommt in den Nikobaren, in Birmanien, in Sarawak, in den Sundainseln etc. eine sehr hellgelbe Varietät vor, die ich irrtümlicherweise für *moluccana* hielt und die zweifellos var. *flava* Mayr der *acutiventris* ist. Ich bitte diesen Irrtum in meinen früheren Arbeiten zu korrigieren. Ich kannte die wahre *moluccana* nicht, die offenbar nur in den Molukken vorkommt. Die *flava* ist dagegen nur eine Varietät von *acutiventris*.

Acropyga acutiventris subsp. *australis* Forel. Aus dem Gesagten geht hervor, daß diese australische Form zu *acutiventris* als Subspezies und nicht zu *moluccana* gehört. Die ☿ dieser Subspezies haben aber viel kleinere Augen und einen hinten viel stärker ausgerandeten (schmalen) Kopf als *acutiventris* var. *flava*. Sie dürften daher als Subspezies betrachtet werden.

√*Plagiolepsis Steingröveri* Forel ☿. Bothaville, Orange-Staat (Dr. Brauns).

Myrmecocystus (*Cataglyphis*) *cursor* Forel subsp. *Rockingeri* n. subsp. ☿. L. 8 mm. Größer und stämmiger als die anderen Varietäten. Kopf quadratisch, mindestens so breit als lang. Abschüssige Fläche des Epinotums nicht viel kürzer als die Basalfläche, und mit ihr einen rechten Winkel bildend (senkrecht zu wagrecht), obwohl der Übergang durchaus gerundet ist. Skulptur schärfer als bei der subsp. *aenescens* mit var. *Taucrei*, *piliscapa* etc.; Kopf und Thorax schimmernd. Pubeszenz reichlicher als bei den anderen Rassen und Varietäten, am Epinotum, an den Hüften, an der Schuppe einen deutlichen grauen Überzug bildend, aber auch am übrigen Körper reichlicher. Die abstehende Behaarung fehlt.

Tian Schan, am linken Illiufer (Rockinger).

Die Kopfform ist fast genau wie bei der var. *fortis* Forel des *albicans* Rog., aber die Schuppe und der übrige Habitus stellen ihn unbedingt zu *cursor*.

√ *Camponotus rufoglaucus* Jerd. subsp. *zanzibaricus* n. sbsp. ☿. L. 6—7,5 mm. Der subsp. *vestitus* Sm. ähnlich, aber der Kopf des größten ☿ schmäler und länger (3 mm lang und 2,3 mm breit). Thorax etwas länglicher; das Profil der Basalfläche des Epinotums ist etwas eingesunken. Vor allem ist die anliegende Pubeszenz erheblich spärlicher und kürzer, sodaß sie die fein genetzte Skulptur speziell am Hinterleib nicht verdeckt, obwohl sie recht sichtbar und viel stärker als bei den *maculatus*-Formen ist. Schienen mit einigen wenigen Stachelchen. Skulptur wie beim Arttypus. Ganz gelbrot; Hinterleib mehr bräunlich gelb; Schienen, Tarsen, Geißel und Ende des Fühlerschaftes bräunlich. Beim ☿ minor ist der Kopf ohne Hinterrand vom Auge bis zum Kopfgelenk viel stärker verschmälert und verlängert (obwohl auch mit konvexem Seitenrand) als beim Arttypus und beim *vestitus*; bei ihm überragt der Fühlerschaft nicht ganz um seine Hälfte den Hinterkopf. Im übrigen alles wie beim Arttypus.

Sansibar.

Diese Form ist schwierig. Die Verschmälerung des Kopfes hinten beim kleinen ☿, der schmälere Kopf auch beim großen ☿, die schwächere Pubeszens, der etwas eingedrückte Epinotumrücken sprechen für eine andere Art. Da der Habitus jedoch der des sehr variablen *rufoglaucus* ist, ziehe ich vor, daraus vorläufig nur eine Rasse zu machen.

Camponotus Petersi Emery var. *Janus* n. var. ☿ major. Länge 12—12,5 mm. Kopf fast wie bei *maculatus-sanctus*, hinten sehr breit und ausgeschnitten, vorn schmal, mit sehr konvexen Seiten. Kiefer 7—8 zähnig, vorn etwas glänzender als beim ☿ minor und etwas streifig. Clypeus scharf gekielt, mit scharfem, rechteckigem Lappen. Fühlerschaft plattgedrückt und gegen das Ende zu verbreitert wie beim kleinen ☿ des Arttypus. Schuppe weniger dick, sonst ganz gleich geformt wie beim kleinen ☿ des Arttypus. Beine ganz gleich; Skulptur und abstehende Behaarung ebenfalls. Anliegende Pubeszenz entschieden viel spärlicher, weitläufig, bildet keinen grauen Reif. Farbe gleich schwarz, aber die beiden gelben Flecke der Wangen fehlen vollständig. Kiefer ganz braunrot, mit brauner Basis.

Bothaville, Orange, Südafrika (Dr. Brauns). ☿ maj. u. min.

Der Unterschied in der Pubeszenz ist jedenfalls Varietätenmerkmal. Alles andere beruht auf Polymorphismus (Farbe, Kieferzähne).

Camponotus maculatus F. subsp. *Fornasinii* Em. ☿. Natal (Coll. Bates).

Camponotus maculatus F. subsp. *Solon* Forel var. *Chilon* Em. Altkalabar (Coll. Bates).

Camponotus maculatus F. subsp. *Liengmei* Forel var. *Hansingi* Forel. Reddenburg, Orange-Staat (Dr. Brauns).

Camponotus maculatus F. subsp. *importunus* Forel ☿♀♂. Diese Varietät muß zur Subspezies erhoben werden. Ich hatte nur den großen ☿ beschrieben. Dieser erreicht bis über 16 mm.

☿ min. L. 9,5 mm. Unterscheidet sich von *6 punctatus*, *Liengmei* und var. *Hansingi* durch den Kopf, der hinten nur mäßig verschmälert ist und einen Hinterrand etwa wie *macu-*

latus i. sp. besitzt. Die Schuppe ist auch viel weniger dick, viel höher als dick (so dick als hoch bei *Liengmei* ☿ minor). Die Farbe ist viel blässer gelb; am Hinterleib haben die Segmente hinten (die hinteren auch vorn) je eine braune Binde, die in der Mitte und seitlich Vorsprünge sendet (Bildung von gelben Flecken beim größeren ☿), während bei *Liengmei* ☿ minor längliche braune Flecken in der Mitte und seitlich bestehen. Fühler und Beine sind etwas kürzer als bei *Liengmei*; Stachelchen, Skulptur und Behaarung gleich wie bei *Liengmei* (Haare an den Backen).

♀. L. 16—17 mm. Kopf trapezförmig, kürzer als bei *Liengmei*. Gelbe Flecken des Hinterleibes kleiner und rötlicher als bei jener Subspezies, wie beim ☿ maior. Flügel noch etwas gebräunter als bei *Liengmei*. Körper bräunlichrot; Hinterleib schwarz, mit sechs rötlichgelben Flecken und mit der Basis und der Unterseite gelblich. Sonst wie der große ☿.

♂. L. 11 mm. Schwarz; Flügel gebräunt. Schuppe dick, ausgerandet. Backen ohne Haare (auch bei *Liengmei* ♂, der aber rötlich ist). Sonst wie bei den *maculatus*-Rassen. Schienen mit Stachelchen.

Algoa-Bay, Kapland (Dr. Brauns).

√ *Camponotus maculatus* F. subsp. *Schereri* n. subsp. ☿ major. L. 12—13,5 mm. Dem *maculatus* sens strict sehr nahe stehend, aber etwas matter. Der schwarze Hinterleib hat nur auf den zwei ersten Segmenten je einen kleinen, kurzen, gelben Fleck, am dritten nur die Andeutung eines solchen. Kopf etwas breiter. Abschüssige Epinotumfläche etwas höher und etwas besser von der Basalfläche abgesetzt.

☿ minor. L. 9,5 mm. Kopf gut $1^4/_5$—$1^5/_6$ mal so lang als breit, ganz länglich rechteckig, hinten kaum schmäler als vorn, mit deutlichem, geradem Hinterrand. Die Augen wenig hinter der Mitte. Unterseite des Kopfes im Profil ganz gerade; Kopf weniger dick (im Profil) als beim *maculatus* sens str. Gelbrot; Hinterleib schwarz mit gelben Segmenträndern und einem sehr kleinen, gelblichen Fleck auf jeder Seite der beiden ersten Segmente.

♀. L. 14,5 mm. Wie der große ☿, aber Hinterleib mit sechs kleinen, gelblichen Flecken.

Nabena, Liberia (Scherer).

Diese Subspezies ist besonders durch die Form, Farbe etc. des kleinen ☿ von *maculatus* sens str. zu unterscheiden. Gelbe Stellen am Thorax, Stielchen und Beinen, Stachelchen an den Schienen, haarlose Backen etc. wie beim Arttypus.

Camponotus maculatus F. subsp. *Oertzeni* Forel var. ***Pericles*** n. var. ☿. L. 4—8 mm.

☿ maj. Kopf trapezförmig, hinten recht breit, viel breiter als bei den var. *Andrius* und *kappariensis*, hinten glänzend wie bei *Andrius*; Backen auch behaart. Überhaupt dem *Andrius* äußerst ähnlich, aber dimorpher und heller gefärbt. Kopf rötlich. Thorax, Fühler und Beine gelbrot; Hinterleib braun. Schienen mit Stachelchen.

☿ minor. Kopf hinter den Augen verschmälert, jedoch mit konvexen Seiten, fast ohne vom Gelenkrand trennbaren Hinterrand. Schuppe niedriger und dicker als bei *Andrius*. Kopf, Thorax und erster Hinterleibring bräunlichgelb; Fühler und Beine gelblich; Hinterleib hinten bräunlich.

Attika. Sonst ganz wie bei *Andrius*.

Durch die Kopfform und den größeren Polymorphismus des ☿ von den anderen Varietäten unterschieden; vielleicht eigene Subspezies.

Camponotus maculatus F. subsp. *Negus* Forel var. *nefassitensis* Forel ☿♀♂. Port Sudan.

Camponotus maculatus subsp. *odiosus* Forel. Hochwald von Nordostsumatra (Morin).

Camponotus maculatus F. subsp. *turkestanicus* Emery ☿. Tian Schan, am linken Illiufer (Rockinger).

Camponotus dorycus Smith subsp. *confusus* Emery ☿♀. Mysol (Coll. Bates); Queensland.

Camponotus mistura Sm. subsp. *Fornaronis* Forel. Sarawak.

Camponotus quadrisectus Smith. Banka.

Camponotus abdominalis F. subsp. *cupiens* For. ☿♀♂. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Camponotus silvicola Forel ☿. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Camponotus Lespesi Forel ☿. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Camponotus excisus Mayr ☿. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Camponotus crassus Mayr subsp. *Vezenyi* Forel ☿. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Camponotus mus Roger ☿. San Bernardino, Paraguay (Fiebrig).

Camponotus Meinerti Forel var. *Reginae* For. ☿. Liberia.

Camponotus fulvopilosus De Geer var. *flavopilosus* Forel ☿. Deutsch-Südwestafrika (Georg von Bayern).

Camponotus foraminosus Forel ☿ min. Altkalabar (Coll. Bates). Fast ganz typisch. Der Pelz um eine Idee schwächer auf dem Hinterleib.

Camponotus cinereus Mayr ☿ min. Südaustralien (Nickerl). Abstehende Behaarung etwas spärlicher als beim Arttypus. Etwas kleiner (6,5 mm). Ganz schwarz.

Camponotus Dofleini n. sp. ☿ min. L. 9 mm. Sehr nahe mit *Mayri* Forel verwandt, aber viel größer und wie folgt zu unterscheiden:

Kiefer glänzend, fast glatt, reichlich punktiert. Kopf recht deutlich länger als breit, etwa so breit wie das Pronotum. Clypeus mit deutlich vorgeschobenem, bogigem Vorderlappen. Der das Hinterhaupt etwas überragende Fühlerschaft ist viel stärker in seiner Endhälfte verbreitert und daselbst plattgedrückt. Thorax und Körper überhaupt viel länger gestreckt. Promesonotum nur schwach gewölbt (stark bei *Mayri*). Thoraxeinschnürung viel seichter, weniger tief, dafür ausgedehnter. Epinotum oben nirgends gerandet, allseitig gerundet konvex. Basalfläche gerundet rechteckig, hinten nur sehr wenig breiter als vorn, zirka $1^{1}/_{3}$ mal so lang als breit. Im Profil ist sie sehr stark gewölbt und hinten abschüssig. Die glatte abschüssige Fläche ist konkav, nur halb so lang wie die Basalfläche, vorn ausgehöhlt, schief nach vorn

unten zurücklaufend, dann nach hinten zurückbiegend, allseitig von einer sehr kleinen, aber ziemlich scharfen Kante begrenzt, die jedoch oben nicht erscheint, weil von dem hinteren, konvex abschüssigen Teil der Basalfläche überwölbt. Schuppe (Knoten) gut $1^1/_4$ mal so lang als breit, allseitig gerundet, von oben besehen oval, vorn schmäler als hinten, vorn scharf, hinten unscharf senkrecht gestutzt, erheblich länger als hoch (bei *Mayri* so hoch als lang). Hinterleib vorn oben etwas abschüssig (nicht so senkrecht wie bei *Mayri* und den anderen Arten). Schienen mit wenigen, aber ziemlich langen Stachelchen.

Matt, weniger fein punktiert-genetzt als *Mayri*, Hinterleib etwas glänzend. Epinotum und Stielchen recht grob und unregelmäßig genetzt und glänzend. Abstehende Behaarung reichlich, weißlich, und vor allem viel länger als bei *Mayri*, etwas wellig gebogen, an den Schienen recht schief, fast, am Fühlerschaft nur und ganz, anliegend. Außerdem überall eine zerstreute, helle, anliegende Behaarung.

Ganz schwarz; Ende der Kiefer und der Glieder rötlichbraun.

Bothaville, Orange-Staat (Dr. Brauns). Sehr eigentümliche Art, 1 Stück.

Camponotus Viehmeyeri n. sp. ☿. L. 7 mm (wahrscheinlich ☿ media-minor). Kiefer ziemlich schmal, ziemlich glänzend, sehr fein und schwach gerunzelt, zerstreut punktiert (Zahl der Zähne?). Clypeus schwach gekielt, vorn bogenförmig vorgezogen, in der Mitte des Vorderrandes scharf ausgerandet. Augen nicht groß, konvex, hinter der Mitte liegend. Kopf etwa $1^1/_4$ mal länger als breit, seitlich kompreß, fast wie bei *ephippium*, *Tasmani* etc. (viel stärker als bei *nigroaeneus*, *Fieldellus* etc.) und vom Auge bis zur Hinterecke stumpf gerandet. Aber die Seiten sind nur bis knapp zu den Augen parallel; von da an sehen sie, von vorn aus, konvex und ist der Kopf nach hinten zu verbreitert, dann aber an den Hinterecken wieder schmäler und am Hinterrand mäßig ausgerandet. Stirnleisten vorn einander nahe, nach hinten stark S-förmig divergierend. Der Fühlerschaft überragt den Hinterkopf um

etwa $^{1}/_{3}$ seiner Länge. Pronotum ziemlich flach, breiter als lang, vorn und seitlich bis zur Mitte ziemlich stumpf, aber deutlich gerandet. Promesonotalnaht scharf; Mesoepinotalnaht ganz undeutlich. Mesonotum und Basalfläche des Epinotums bilden, von oben besehen, ein längliches, hinten ganz spitzes Dreieck; im Profil sind sie mäßig konvex, das Epinotum hinten stark kompreß. Abschüssige Fläche des Epinotums sehr hoch, fast senkrecht, fast doppelt so lang wie die Basalfläche, aber langsam gerundet in diese übergehend, nicht so spitz gerundet wie bei dem ähnlich gebauten *Michaelseni*. Schuppe dick, etwas nach vorn geneigt, hinten und vorn gerade gestutzt wie ein hoher, schmaler, oben gerundeter Würfel, doppelt so hoch als dick. Schienen kompreß, mit kurzen, schiefen Stachelchen.

Fein genetzt, mäßig glänzend, zerstreut punktiert. Hinterleib mehr quergerunzelt-genetzt; Kopf vorn matter, mehr punktiert-genetzt. Abstehende Behaarung fast null, null auf allen Gliedern. Eine grobe, sehr lange, weitläufige, aber sehr auffallende, etwas hell goldgelbliche, glänzende, leicht abfallende Pubeszenz auf dem ganzen Körper, besonders am Kopf und Pronotum auffallend.

Ganz schwarz; Segmentränder am Hinterleib hellgelblich.

Torricelligebirge im Kaiser Wilhelmsland, Neuguinea (Dr. Schlaginhaufen); durch Herrn Viehmeyer vom Museum in Dresden zur Untersuchung erhalten.

Mit *ephippium*, *nigroaeneus* und *Fieldellus*, vielleicht auch mit *longiceps* Em. verwandt, aber leicht durch die Form des Kopfes, des Epinotums und der Schuppe sowie durch die Pubeszenz zu unterscheiden.

Camponotus Habereri n. sp. ☿ min. L. 7,5 mm. Aussehen der *C. socius* Rog. und *cingulatus* Mayr aus Amerika. Kiefer fein genetzt, zerstreut punktiert, 7 zähnig, gegen das Ende mit stark gebogenem Außenrand. Clypeus gekielt mit scharfem, rechteckigem Vorderlappen, dessen Seiten etwas konkav sind. Kopf gut $1^{1}/_{2}$ mal so lang als breit, hinter den Augen konvexrandig verschmälert. Seiten konvex. Hinterrand sehr deutlich, aber nur halb so breit wie der Vorderrand und stark

ausgerandet. Der Fühlerschaft überragt den Hinterrand um gut $^2/_5$ bis fast $^1/_2$ seiner Länge. Thorax gleichmäßig gewölbt. Abschüssige Fläche des Epinotums etwas konvex und viel kürzer als die Basalfläche, in die sie gerundet übergeht. Schuppe bikonvex, oben scharfrandig, etwa wie bei *maculatus* sens str. Schienen zylindrisch, ohne Spur von Stachelchen.

Ganz matt; dicht punktiert-genetzt, teilweise punktiert-gerunzelt; Hinterleib dicht quergerunzelt und ebenso matt. Glieder dicht gerunzelt, schimmernd. Am Körper vereinzelte, zerstreute, gelbliche Borsten; Fühler und Beine ohne abstehende Haare. Körper und Glieder gleichmäßig von einer sehr deutlichen, aber zerstreuten (weitläufigen), gelblichen, ganz anliegenden Pubeszenz bedeckt.

Rostrot; Kopf rostbraunrot; Beine, Fühlerschaft und Hinterleib braun. Hinterrand aller Hinterleibssegmente, vordere Hälfte des zweiten, vorderes Drittel des dritten und vierten und ein breiter, rechteckiger Fleck auf der Mitte des ersten hellgelb.

Sagambucht, Japan (Haberer). Von *socius* durch das Fehlen der Stachelchen und von *cingulatus* durch das Fehlen der abstehenden Behaarung der Beine leicht zu unterscheiden.

Camponotus fallax Nyl var. *Brunni* Forel. Japan.

Camponotus claviscapus var. *Lehmanni* n. var. Forel ♀. L. 6,7 mm. Basalfläche des Epinotums konvex, viel breiter als lang. Kopf dunkler als beim ♃ des Arttypus, mehr bräunlich; braune Binden des Hinterleibes breiter, teilweise in der Mitte zusammenfließend, sodaß das etwas dunklere Gelb mehr Seitenflecken bildet. Flügel schwach braungelblich angehaucht, mit ziemlich blassen Rippen. Schuppe dicker als beim ♃ des Arttypus, sonst gleich geformt. Alles sonst wie beim ♃. Clypeus vorn nicht gekielt, nur in der Mitte, mit einer kleinen Erhabenheit.

Solentinameinsel, Mittelamerika (Dr. W. Lehmann).

Der Arttypus (♃, ☿ und ♂) stammt aus Trinidad. Da die Schuppe beim ♀ sonst dünner und nicht dicker ist als beim ♃, und die Farbe anders ist, scheint eine Varietät vorzuliegen.

Polyrhachis semipolita André subsp. *Hestia* n. subsp. L. 7,5 mm. Stimmt mit Andrés Beschreibung ziemlich überein, aber die Schuppe hat zwischen den Seiten Dornen, nicht zwei stumpfe Zähne, sondern zwei kleinere spitze Dornen, die viel länger sind als die Breite ihrer Basis. Der Thorax ist schimmernd, dicht punktiert-genetzt, da und dort (Basalfläche des Epinotums) in feine Längsrunzelung übergehend. Thoraxseiten unten punktiert-genetzt, oben glatt. Kopfseiten schimmernd, fein längsgerunzelt-genetzt. Abdomen matt bis schimmernd, mit ungeheuer feiner Runzelung, wie beim Arttypus. Kopf fast nur auf der Stirne glänzend und selbst da noch fein und seicht gerunzelt-genetzt. Clypeus ziemlich glatt. Der Kopf hat einen recht breiten, schwach konvexen Hinterrand und fast gerade Seiten. Er ist nicht stark gewölbt, eher etwas deprimiert und nur recht wenig länger als breit, ähnlich wie bei *micans* (besonders subsp. *ops*), *creusa* etc., aber hinten gerundeter.

Australien (Coll. Bates). Ein zweites, schlecht erhaltenes Exemplar trägt die Etikette „Sierra Leone", die offenbar falsch ist, resp. vertauscht wurde, denn er ist genau wie der andere und die Gruppe ist australisch, besonders der Arttypus, der aus den Alpen von Viktoria stammt.

Ich glaube nicht zu irren, wenn ich eine Subspezies aus dieser Form mache, da die Skulptur und die Schuppe nicht unerheblich abweichen. Nach André dürfte auch der Kopf beim Arttypus länger sein. Farbe und Behaarung stimmen durchaus; die übrige Form, soweit ersichtlich, auch. Die an der Basis etwas plattgedrückten, parallelen Epinotumdornen sind fast so lang wie ihr Zwischenraum, und das Epinotum ist zwischen ihnen ausgehöhlt. Die Art steht der subsp. *Ops* Forel der *P. micans* Mayr nahe.

Polyrhachis Olenus Sm. ☿. Menado, Celebes (Coll. Bates).

Polyrhachis sericata Guérin ☿. Mysol (Coll. Bates),

Polyrhachis sericata Guérin ☿ subsp. *glabra* n. subsp. ☿. L. 9 mm. Unterscheidet sich vom Arttypus durch den kürzeren, seitlich weniger komprimierten Kopf, deren Seiten deutlich konvex sind. Kopf vorn mit grausilbriger Pubeszenz; ebenso

die Thoraxseiten unten. Die übrige Körper nur mit zerstreuter, feiner Pubeszenz und nur mit sehr vereinzelten Borstenhaaren; Fühler und Beine ohne abstehende Behaarung. Hinterleib fein punktiert-genetzt und schimmernd. Pronotum fast glatt; der übrige Körper nur seicht genetzt; einige schwache Längsrunzeln am Mesonotum und Epinotum.

Sonst wie der Arttypus, namentlich Thorax und Schuppe.

Neuguinea (Coll. Bates).

Polyrhachis Biroi Forel var. ***paprika*** n. var. ☿. L. 8 mm. Unterscheidet sich vom Arttypus dadurch, daß nur der Kopf längsgerunzelt ist. Thorax und Hinterleib sind nur punktiert-genetzt. Auf dem Hinterleib ist ferner die Pubeszenz sehr deutlich und bildet einen rötlichen Reif wie aus sehr feinem Paprika. Die rötliche Beborstung ist an den Beinen spärlicher als am Körper. Die vier Zähne der Schuppe sind äußerst stumpf; ihr Oberrand zwischen den beiden oberen Zähnen ist eher konkav und hat nur in der Mitte ein ganz kleines Wärzchen. Die Kiefer sind dicht und feingestreift.

Im übrigen mit der Beschreibung völlig übereinstimmend, auch die Farbe ganz genau.

Waigiou (Coll. Bates).

Polyrhachis ceramensis Mayr ☿. Größe, Pronotumdornen und Epinotum stimmen mit Mayrs aphoristischer Beschreibung überein. Aber außerdem ist zu bemerken, daß der Kopf viel komprimierter ist als bei *orsyllus*, mit geraden Seiten und einem scharfen Winkel unten hinten am unteren Rand. Ferner sind Kopf und Thorax gröber, regelmäßiger und schärfer längsgestreift oder längsgerippt.

Ceram (Coll. Bates).

Polyrhachis orsyllus Sm. ♀. Menado, Celebes (Coll. Bates).

Polyrhachis orsyllus Sm. subsp. *Ritsemai* Mayr. Hochland von Nordostsumatra (Morin).

Polyrhachis Hecuba Forel ♀. Australien.

Polyrhachis sumatrensis Sm. Sarawak.

Polyrhachis Schang Forel. Ceram.

Polyrhachis bicolor Sm. var. *aurinasis* Forel ♀. Banka.

Polyrhachis exasperata Sm. ☿. Menado (Celebes). Entspricht sehr gut der Beschreibung Smiths und stammt aus nächster Nähe des Fundortes des Typus der Art (Tondano).

Aus der Vergleichung dieser Art mit *P. Phipsoni* Forel aus Birmanien geht nun aber unzweideutig hervor, daß *Phipsoni* nur eine Subspezies von *exasperata* ist, die sich durch einen hinten konvexeren Kopf ohne deutlichen Hinterrand (Hinterrand ziemlich deutlich beim Arttypus), durch die rote Farbe von Thorax und Schuppe (schwarz beim Arttypus) und durch den fast zahnartigen Vorsprung des oberen Randes der Schuppe nach vorn unterscheidet. Die Dornen der Schuppe sind auch bei *Phipsoni* viel dünner und nahezu gerade (stark gebogen beim Arttypus) und die grobe Skulptur etwas unregelmäßiger, sonst aber alles gleich.

Diese Unterschiede rechtfertigen eine Subspezies, nicht aber eine Art.

Polyrhachis furcata Sm. var. ***bankensis*** n. var. ☿. Länge 5,7 mm. Etwas größer als die typische Art. Kopf hinten breiter, mit deutlicherem Hinterrand. Vorn oben an der Schuppe ein deutlicher, spitzer, nach vorn gerichteter, dreieckiger Zahn, der beim Arttypus nur angedeutet ist. Bei der großen subsp. *Pahangana* For. ist umgekehrt die Schuppe oben verdünnt und vorn abgeflacht. Beine dunkelbraun. Dornen etwas kräftiger. Von der Schuppe abgesehen, sich der subsp. *pahangana* nähernd.

Insel Banka (Hagen).

Polyrhachis Diotima Forel ☿. Die Pronotumzähne sind kleiner als bei *dives* ♀, der Kopf länglicher, vor allem die gleichen schwachen Höcker am Scheitel, hinter den Augen, wie beim ☿.

Menado (Celebes), in der Coll. Bates, mit der Bestimmung: *Polyrhachis Democles* Smith (von Smith selbst). Da Smiths *Democles* aus Tondano, nahe Menado stammt und auf ein ♀ beschrieben ist, lag es nahe zu vermuten, daß *Diotima* = *Democles*, obwohl Smith von den typischen Höckern der *Diotima* nichts erwähnt. Herr Donisthorpe hatte die Güte, die Sache

im British Museum zu untersuchen, wo allerdings ein angeblicher *Democles* mit Scheitelhöckern war. Aber Smith hatte daneben beide Formen unter dem Namen *dives* vermischt! Trotzdem wollte ich bereits *Diotima* als Synonym einziehen. Doch stellte es sich dann heraus, daß der wirkliche Typus nicht in London, sondern in Oxford ist. Prof. Poulton hatte nun die Güte, diesen Urtypus der *Democles* ♀ mit den Typen ♀ und ☿ zu vergleichen, die ich ihm von *dives* und *Diotima* (☿) aus meiner Sammlung sandte. Und nun stellte es sich heraus, daß dieser Urtypus von Smith ein Weibchen von *P. dives* und nicht die *P. Diotima* ist. Smith hatte den ☿ als *dives* und das ♀ als *Democles* beschrieben. In Menado etc. kommen beide Arten vor. Er hatte später unterschiedslos bald die eine bald die andere Art als *dives* oder *Democles* bezeichnet, da er den Hauptunterschied (Vertexhöcker) übersehen hatte. Daraus geht hervor, daß:

Polyrhachis Democles Sm. = *Polyrhachis dives* Sm.; der Name *dives* bleibt als der ältere. Prof. Poulton schreibt wörtlich: „*Democles* Sm. is a ♀ and the same as your ♀ *dives* Sm. *Dives* Sm. is a ☿ and is the same as your ☿ *dives* Sm. My assistent A. H. Hamm who is a careful observer of Hymenoptera agreed with me in this“ (ich hatte natürlich Professor Poulton auf die Vertexhöcker der mitgesandten *P. Diotima* aufmerksam gemacht).

Polyrhachis dives Sm. ☿. Menado, Celebes (Coll. Bates). Somit aus der gleichen Gegend wie *Diotima*.

Polyrhachis acantha Smith var. *Diaphanthus* Smith ☿. Menado, Celebes (Coll. Bates). Wie Emery bereits gezeigt hat, ist *Diaphanthus* nur eine Varietät von *acantha*.

Polyrhachis Cleophanes Sm. Menado (Coll. Bates). Unter dem Namen *P. vibidia* Sm. befindet sich ein ♀ von *Cleophanes* Sm. Daß *vibidia* das ♀ von *Cleophanes* sei, hat Smith selbst als „very probably“ erklärt. Da beide Namen auf Typen von Tondano (nahe Menado) beruhen und auch beide Beschreibungen nur durch Geschlechtsmerkmale differieren, steht somit die Synonymie fest:

P. vibidia Smith = *Cleophanes* Smith. Da letzterer Name eine Seite vorher steht, hat er die Priorität. Das Tier hat eine feine, ziemlich reichliche, abstehende, gelbliche Behaarung und eine weißgraue Pubeszenz. Die erhabenen, hinten erweiterten Stirnleisten sind recht charakteristisch für diese Art.

Polyrhachis variolosa Emery var. *waigiouensis* n. var. ☿. L. 9,3 mm. Unterscheidet sich von Emerys Typus durch die Schuppe, deren obere Fläche viel weniger steil nach hinten ansteigend und viel weniger konvex ist. Die Pronotumdornen noch stärker nach unten gekrümmt. Pronotum noch konvexer abgesetzt. Charakteristisch für diese Art ist der zwar schmale, aber stark über das Gelenk konvexe Hinterkopf sowie der starke, stumpfe Dorn der Mesopleure.

Waigiou (Coll. Bates).

Polyrhachis sexspinosa Latr. subsp. *Rhea* n. subsp. ☿. L. 10,5 mm. Kleiner als die Stammart und nahe var. *rectinota* Em., aber kleiner; Kopf hinten ganz ohne grobe Skulptur, weniger verschmälert und mit konvexeren Rändern, besonders hinter den Augen. Anliegende Pubeszenz und abstehende Behaarung viel spärlicher; letztere viel kürzer auf Körper und Gliedern als bei der Stammart und bei var. *rectinota.* Epinotumdornen nicht so aufrecht, etwas mehr nach hinten gerichtet und gebogen. Schuppe, besonders vorn, etwas niedriger. Hüften und Schenkel hellrötlich (gelbrötlich); Schienen und Tarsen mehr rötlichbraun. Profil des Thorax kaum konvex; Basalfläche des Epinotums gerade.

Ceram (Coll. Bates), 1 ☿. Durch die Behaarung und die Kopfform recht abweichend und charakteristisch.

Polyrhachis Sappho n. sp. ☿. L. 8 mm. Kiefer schimmernd, 6zähnig, sehr fein und dicht längsgerunzelt. Clypeus schwach gekielt, wenig gewölbt, mit einem sehr kurzen und breiten, trapezförmigen Vorderlappen, dessen Vorderrand ganz gerade, ohne Spur von Ausrandung oder Zahn ist. Kopf $1^1/_2$ mal so lang als breit, vor den Augen mit sehr schwach konvexen, parallelen Seiten, hinter den Augen bis zum Gelenkrand mäßig, aber stetig verschmälert und schwach konvexrandig. Der ziem-

lich breite Gelenkrand bildet allein den Hinterrand; die Seiten sind an den Augen selbst am konvexesten. Die Augen sind mäßig konvex und liegen ziemlich genau in der Mitte der Kopfseiten. Stirnleisten einander etwas näher als bei *Venus*, sogar als bei *pressa*, ebenso S-förmig. Fühlerschaft plattgedrückt wie bei *Venus* und *pressa*, nicht ganz um die Hälfte seiner Länge den Hinterkopf überragend. Thorax schmal, genau wie bei *Venus* und *pressa*. Die Epinotaldornen genau so lang wie die des Pronotums, parallel wie bei *pressa*, nach hinten und oben gerichtet, aber die zwar auch gerandete und besonders zwischen den Dornen etwas ausgehöhlte Basalfläche des Epinotums ist viel schmäler und länger, 3 mal so lang als breit. Auch Pronotum und Mesonotum sind länger als bei genannten Arten, jedes länger als breit. Abschüssige Fläche steil, so lange als die Basalfläche. Schuppe viel weniger dick, höher und viel weniger konvex als bei *Venus*, nicht ganz so hoch wie bei *pressa*, aber dicker und vor den Dornen mit einem rechtwickligen Postament, wie bei *abdominalis* und *armata*, wenn auch weniger stark. Vordere und hintere Fläche der Schuppe senkrecht gestutzt; Dornen derselben fast genau wie bei *pressa*. Beine sehr lang. Schienen und Tarsen stark kompreß, mit einzelnen ganz kurzen und recht schiefen, fast anliegenden Stachelchen an der Innenseite.

Kopf, Thorax und Fühlerschaft dicht punktiert-genetzt und matt; Stielchen, Rücken des Epinotums, Hinterleib und Beine glänzend, seicht und fein gerunzelt (chagriniert). Abstehende wie anliegende Behaarung so gut wie gänzlich fehlend.

Schwarz; Hinterleib und Beine wundervoll stahlblau, fast wie bei *chrysomela violacea*, etwas heller, blauer als bei *P. Venus*.

Sumatra (Coll. Bates). Von *Venus* Forel und *pressa* Mayr durch den Kopfbau (Fehlen des Kopfhinterrandes), von *Venus* außerdem durch die Form der Schuppe und von *pressa* durch die Farbe und die schlankere Gestalt unterschieden. Von *chalybea* Smith ist sie nach der Beschreibung durch den nicht ausgerandeten Clypeus, durch die nicht besonders starken Kiefer, durch den nicht quergerunzelten Thorax und durch die langen,

schiefen Epinotumdornen zu unterscheiden — sofern Smiths Angaben zutreffen. — Die mir unverständlichen Angaben Smiths über die Augen etc. scheinen auch auf eine andere Kopfform zu deuten.

Polyrhachis Batesi n. sp. ☿. L. 5,6 mm. Gruppe *paromalus-hippomanes.* Kopf wie bei *hippomanes-ceylonensis* gebildet, aber viel länger als breit, mit weniger konvexen Rändern und hinten stärker konvex, ohne deutlichen Hinterrand. Die Augen sind viel kleiner und sehr wenig konvex, was diese Art auch von dem größeren *Paromalus* unterscheidet. Der lange Fühlerschaft überragt den Hinterkopf um fast die Hälfte seiner Länge. Im Profil gesehen bildet das Pronotum nach vorn einen vorspringenden Buckel. wie das Mesonotum gewisser *Aenictus*-Männchen u. a. m. Zwischen diesem Buckel und dem fast horizontalen Gelenkhals ist das Pronotum im Profil stark konkav. Vom Buckel an ist der Thoraxrücken mäßig konvex und wie bei *Paromalus* etc. gebildet, aber die Nähte sind kaum angedeutet. Unter dem Buckel bilden die Vorderecken des Pronotums zwei spitze Zähne, die etwas länger sind als an der Basis breit. Epinotum samt Dornen fast genau wie bei *Paromalus.* Die kräftigen, etwas geschwungenen Dornen sind noch etwas länger. so lang wie die abschüssige Fläche. Schuppe weniger dick als bei *Paromalus,* etwa wie bei *Hippomanes* var. *moesta* Em., aber die horizontalen, etwas nach hinten gebogenen Dornen sind viel kürzer, nicht viel länger als die Hälfte ihres Zwischenraumes. Dieser Zwischenraum ist stark querkonvex (gerade bei den Nachbararten), aber oben sehr stumpfrandig. mit zwei winzigen, nach hinten gerichteten Zähnchen oder Höckerchen zu oberst an der Hinterwand. Mesopleure unten mit einer stark vorragenden Lamelle. Schienen ohne Stachelchen.

Skulptur wie bei *Paromalus,* fein genetzt, mäßig glänzend; Hinterleib fast glatt. Abstehende Behaarung fast null; anliegende Pubeszenz äußerst fein, kurz und zerstreut; schwer sichtbar.

Schwarz; Glieder braun. Enddrittel der Geißel und Endviertel der Kiefer rötlich.

Ceram (Coll. Bates). Durch den Buckel des Pronotums und die obere Konvexität der Schuppe sehr ausgezeichnet. Ein. ☿.

Polyrhachis Hera n. sp. ☿. L. 4.6 mm. Gruppe *ornata*, nahe *Terpsichore*. Kiefer schimmernd, aber feingestreift und recht fein, zerstreut punktiert. Clypeus gekielt, mit trapezförmigem Vorderlappen, der in der Mitte breit und schwach ausgerandet ist. Stirnleisten vorn ziemlich parallel, in ihrer hinteren Hälfte divergierend. Kopf leicht deprimiert oder wenigstens oben auffallend wenig konvex, $1^1/_3$ mal so lang als breit. Die stark kugeligen Augen nahe an den Hinterecken; von einem Auge zum anderen eine schwache, den Hinterrand bildende Konvexität. Die Kopfseiten (ganz vor den Augen) sehr schwach konvex, fast parallel. Der Fühlerschaft überragt den Hinterrand fast um seine Hälfte. Thoraxrücken fast flach und scharf gerandet; nur das Pronotum schwach konvex. Promesonotale Einschnürung sehr schwach, wie bei *Terpsichore*. Pronotum ganz vorn, bis zur Basis der Dornen, recht steil, subvertikal ansteigend; seine Dornen kurz, kaum doppelt so lang wie an der Basis breit. Mesonotum doppelt so breit als lang; ebenso die Basalfläche des Epinotums; Mesoepinotalnaht kaum angedeutet. Epinotumdornen so lang wie Mesonotum und Basalfläche des Epinotums zusammen, horizontal, kaum divergierend, aber S-förmig geschwungen. Schuppe säulen- oder würfelförmig, $1^1/_2$ mal so hoch als dick, oben so dick als unten, hinten und vorn senkrecht gestutzt, oben mit einer etwas nach hinten abschüssigen, flachen, scharf gerandeten Fläche, wie bei *Thaïs* und *Dämeli-argentosa*. Von dieser Fläche gehen zwei horizontale, um den Hinterleib gekrümmte, mäßig lange Dornen aus, die sich von denjenigen der Nachbararten dadurch unterscheiden, daß sie stumpf sind und nahe an der Spitze so breit sind wie nahe an der Basis. Schienen ohne Stachelchen.

Pronotum oben und Kopf bis zum Vorderrand des Clypeus regelmäßig (Pronotum gröber und Kopf feiner) längsgestreift; die Streifen des Clypeus deutlich nach vorn konvergierend und recht fein. Thoraxseiten netzmaschig längsgerunzelt. Der

übrige Körper schimmernd, sehr fein punktiert-genetzt (Abdomen mehr glänzend). Eine sehr blaßgoldige, glänzende, nicht dichte Pubeszenz auf Kopf, Hinterleib, Oberseite der Schuppe, Epinotum und Mesonotum verbreitet (mehr oder weniger zerstreut). Abstehende Behaarung äußerst spärlich auf dem Körper, null auf den Gliedern.

Schwarz; Fühler und Beine schwarzbraun, Schienen braunrot.

Ceram (Coll. Bates), 1 ☿.

Sehr nahe verwandt mit *Terpsichore* sens str. Forel, aber der Kopf hinten depresser, die Pronotumdornen kürzer, der Clypeuslappen viel länger, der Clypeus gestreift und ferner die Form der Dornen der Schuppe abweichend. Die Stellung der Augen hat sie mit *Terpsichore* sens str. gemeinsam. Die subsp. (nicht var.) *elegans* Forel der *Terpsichore* aus Queensland hat einen viel breiteren, kürzeren Kopf und die Augen weniger hinterständig; sie dürfte eine eigene Art bilden.

Echinopla melanarctos Smith ☿. Insel Banka.

Echinopla Tritschleri Forel ☿. Hochland von Nordostsumatra (Morin).

Echinopla pallipes Smith ☿. Menado, Celebes (Coll. Bates).



Luftelektrische Messungen am Erdmagnetischen Observatorium (Sternwarte) München.

I. Registrierung des Potentialgefälles 1905 bis 1910.

Von **Dr. C. W. Lutz.**

Mit 2 Tafeln.

Vorgelegt von H. Ebert in der Sitzung am 10. Juni 1911.

An der K. Sternwarte in München wurden bereits in den Jahren 1850—1856 luftelektrische Messungen von J. Lamont[1]) angestellt. Lamont beobachtete nach der von Dellmann und Peltier angegebenen Methode die elektrische Spannungsdifferenz zwischen Luft und Erde. Leider besitzen diese mit großer Sorgfalt angestellten Beobachtungen nur beschränkten Wert. Sie sind nämlich, wie alle älteren Messungen, nicht in absolutem Maße ausgedrückt. Zudem hat Lamont nur unter tags beobachtet, so daß sich aus seinem Beobachtungsmaterial auch der tägliche und jährliche Gang des erwähnten luftelektrischen Elementes nur ungenau herleiten läßt. Die Ergebnisse, die sich trotzdem aus den Lamontschen Beobachtungen gewinnen lassen, sollen später an geeigneter Stelle angeführt werden.

Seit dem Jahre 1895 werden neuerdings luftelektrische Messungen an der hiesigen Sternwarte angestellt. Dank der Munifizenz der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften konnte

[1]) J. Lamont, Beschreibung der an der Münchener Sternwarte zu den Beobachtungen verwendeten neuen Instrumente und Apparate, München 1851, S. 53. — Jahresbericht der Münchener Sternwarte 1852, S. 74. — Annalen der K. Sternwarte bei München **7**, 131, 1854. **9**, 95, 1857. **10**, 95, 1858.

für das Erdmagnetische Observatorium der Münchener Sternwarte ein Benndorfsches Elektrometer zur Registrierung des luftelektrischen Potentialgefälles beschafft werden. Dieses Instrument wurde im April 1895 in Betrieb genommen und arbeitet seither befriedigend.

Neben der Registrierung des Potentialgefälles wurden auch noch andere luftelektrische Arbeiten ausgeführt, über welche größtenteils bereits früher berichtet wurde[1]).

I. Das Instrumentarium.

1. Elektrometer.

Das bewährte Benndorfsche Elektrometer[2]) zur mechanischen Registrierung des Potentialgefälles ist so allgemein bekannt, daß eine nähere Beschreibung wohl überflüssig ist. Lediglich über die Aufstellungsweise, die sich nach mancherlei Vorversuchen als zweckmäßig erwiesen hat, sei hier einiges gesagt.

Der Apparat ist in einem freistehenden Nebengebäude der Sternwarte[3]) untergebracht, welches lediglich ein Erdgeschoß (3 Räume) und einen unbewohnten Dachboden umfaßt. Der größte nach Osten gelegene Raum dient als Arbeitszimmer. In diesem Raume ist das Elektrometer E an der N-E-Mauer M, Taf. I, Fig. 1 angebracht und völlig von einem Holzschranke $H_1 - H_2$ mit zwei Glastüren T_1 und T_2 (vorne und an der rechten Seite) umgeben. Hiedurch wird das Instrument vor Staub und

[1]) C. W. Lutz, Sitz.-Ber. der Bayer. Akad. d. W., math.-phys. Kl. **36**, 507, 1906. **37**, 61, 1907. **39**, 14. Abhandl., 1909. Phys. Zeitschr. **9**, 100 und 642, 1908. H. Ebert und C. W. Lutz, Beiträge z. Phys. d. freien Atmosph. **2**, 183, 1908.

[2]) H. Benndorf, Anzeiger der K. Akad. d. Wissensch. Wien **38**, 200, 1901. Sitz.-Ber. d. K. Akad. d. W. Wien 111 (Abt. IIa), 487, 1902. Phys. Zeitschr. **7**, 98, 1906.

[3]) Eine Übersicht über das Gesamtterrain der Sternwarte gibt der Situationsplan J. B. Messerschmitts in den „Veröff. d. Erdmagnet. Obs. bei der K. Sternw. in München 1904“, Heft I, Tafel I, wo auch dieses Gebäude unter der Benennung „Bureau“ eingezeichnet ist.

raschem Temperaturwechsel (Feuchtigkeit) geschützt. Dieser besondere Schutz scheint mir beim Benndorfschen Elektrometer notwendig zu sein, weil alle Isolatoren desselben durch das Gehäuse hindurchragen, also nur zur einen Hälfte von der Schwefelsäure im Innern des Gehäuses (Dämpfung) trocken gehalten werden. Und in der Tat wurde auf diese Weise, trotzdem das Elektrometer in unmittelbarer Nähe der Eingangstüre steht, eine dauernd gute Isolierung erreicht. Der obere, das Elektrometer umschließende Teil des Schrankes H_1 kann entfernt werden. Der Apparat, der an dem festen Wandbrett W montiert ist, ist dann von drei Seiten her zugänglich, was bei Reparaturen oder gründlicher Reinigung von Nutzen ist. Zur Vornahme der gewöhnlichen Verrichtungen, wie Uhraufziehen, Auswechseln des Papieres etc. genügen die beiden Türen T_1 und T_2. Der untere Teil des Holzschrankes H_2 birgt die Kalomelbatterie B und sechs Bleiakkumulatoren A. Drei davon (hintereinander geschaltet) dienen jeweils zum Betriebe des Registrierwerkes, drei stehen in Reserve und werden eingeschaltet, wenn die Betriebsakkumulatoren frisch aufgeladen werden müssen, was etwa alle fünf Wochen nötig ist.

Die Kalomelbatterie hat sich gut bewährt. Sie mußte während der sechs Betriebsjahre nur einmal frisch gefüllt werden, da einige Zinkstäbe durchgefressen waren. Dieses günstige Ergebnis glaube ich folgenden Vorsichtsmaßregeln zuschreiben zu dürfen. Die Zuleitungsdrähte von der Batterie zum Elektrometer wurden auf gut isolierende Hartgummiklötze verlegt. Auch die zu erdende Mittelklemme, die ursprünglich in eine Holzwand des Batteriekastens eingeschraubt war, wurde vom Holz noch besonders durch Hartgummi isoliert. Nur so wird (nach Abnehmen der Erdleitung von der Mittelklemme) ein teilweiser Kurzschluß über das Holz beim Anschalten der Batterie an die Quadranten vermieden. Vor dem Zusammensetzen der Zellen wurden alle Gläschen im oberen Drittel innen und außen mit Paraffin überzogen und die Verschlußkorken in Paraffin gekocht. Da die Kalomelbatterie keinerlei Erschütterungen und Schwankungen verträgt, so wurde sie stets an

ihrem Platze in dem staubdichten Holzkasten H_2 belassen. Die E. M. K., die öfters nachgemessen wird, beträgt konstant 99 Volt.

Weiter wären noch einige kleinere Vorrichtungen zu erwähnen, die sich als praktisch erwiesen haben. An dem Bügel, der alle zwei Minuten den Aluminiumzeiger des Elektrometers auf eine Unterlage aus Blaupapier niederdrückt, und so eine punktweise Aufzeichnung der Elektrometerausschläge bewirkt, wurde ein Millimetermaßstab angebracht, der einem dreifachen Zwecke dient. Bei geerdeter Elektrometernadel ermöglicht er eine stete Kontrolle der Nullage des Zeigers, und bei geladenem Elektrometer läßt sich jederzeit die Größe des Ausschlages in mm ablesen, und damit, nach Multiplikation mit dem Reduktionsfaktor (siehe S. 312), sogleich der Wert des eben herrschenden Potentialgefälles angeben. Endlich ist dieser Maßstab bei Bestimmung der Ladezeit des Kollektors zur Kontrolle seiner Wirksamkeit von Nutzen.

Das vom Apparat täglich ablaufende Papier, ca. 1 m, wird auf einer Haspel *P* (Fig. 1) aufgerollt, so daß die Papierrolle als ganzes Stück erhalten bleibt, was bei der von mir gebrauchten und noch zu beschreibenden Ablesevorrichtung notwendig ist.

Die Uhr des Elektrometers geht nach Münchner Ortszeit = M. E. Z. — $13^{m}\ 33^{sec}$. Die Empfindlichkeit des Elektrometers beträgt: 1 mm Ausschlag = 14,5 Volt.

2. Kollektor.

Über dem beschriebenen Holzschrank ist eine 50 cm lange Eisenschiene *Sch* (Fig. 1) von ⊓ Querschnitt in die Mauer einzementiert. Auf diese Eisenschiene sind zwei kräftige Hartgummiisolatoren I_1 und I_2 aufgeschraubt, welche ein gezogenes dünnwandiges Stahlrohr *R* in horizontaler Lage tragen. Dieses Stahlrohr *R* durchsetzt frei die Wand des Gebäudes, und setzt sich außen in eine fest eingekeilte Bambusstange *St* fort, an deren Ende, 172 cm von der Mauer und 280 cm vom Erdboden entfernt, der Polonium- (Radium *F*) Kollektor angebracht ist.

Vom Kollektor führt ein Kupferdraht zur Eisenröhre und von dieser ein weiterer Verbindungsdraht *d* zum Elektrometer *E*.

Die Aufladezeit des frisch polonisierten Kollektors beträgt $^3/_4$ Minuten. Da die Wirkung des Poloniumkollektors mit der Zeit abnimmt, und dadurch Fehler in den Angaben des Elektrometers entstehen würden[1]), so wird jährlich zweimal eine Neupolonisierung vorgenommen.

Für die Richtigkeit und Zuverlässigkeit der Aufzeichnungen des Elektrometers ist eine vorzügliche Isolation aller Elektrometerteile von besonderer Wichtigkeit[2]). Daher wird auch den Isolatoren des Kollektorträgers stets eine besondere Sorgfalt zugewendet. Sie befinden sich, wie aus Fig. 1 ersichtlich, innerhalb des im Winter geheizten Gebäudes und sind durch Messinghülsen *M* (Fig. 2) gegen Staub und Licht, sowie durch eine Natriumtrocknung *N* gegen Feuchtigkeit geschützt. Die Konstruktion dieser Isolatoren ist aus Fig. 2 ersichtlich. In die Messingplatte *P* ist ein glatter zylindrischer Hartgummikörper *H* eingeschraubt. In diesen Hartgummizylinder ist, unter Zwischenschaltung eines Ringes aus echtem Bernstein *B*, der Messingträger *T* fest eingeschraubt, dessen oberes Ende durch das Eisenrohr *R* hindurchführt und dort verschraubt ist. Mittels der Schrauben s_1 s_2 ist jeder Isolator an der Eisenschiene *Sch* befestigt.

Ich habe absichtlich die viel gebräuchliche Riefelung des Hartgummizylinders nicht durchgeführt und zwar aus folgenden Gründen. Fürs erste sollte der Querschnitt des Hartgummiträgers möglichst ungeschwächt bleiben, um der Belastung durch die Eisen- und Bambusstange, durch Schnee und Winddruck und das Gewicht sich auf die Stange setzender Vögel gewachsen zu sein. Sodann verliert auch der ursprünglich beste Hartgummi durch Änderung seiner Oberflächenbeschaffenheit, trotz der Schutzhülse und Natriumtrocknung, allmählich sein Isolationsvermögen. Um dies wieder herzustellen, hat sich

---

[1]) H. Benndorf, Sitz.-Ber. d. K. Akad. d. Wissensch. Wien 118 (IIa), 1184, 1909.

[2]) H. Benndorf, ebenda S. 1188.

folgendes Verfahren besonders bewährt, wobei sich gerade die glatte Oberfläche des Hartgummikörpers als zweckmäßig erweist. Der Hartgummizylinder wird auf der Drehbank mit feinstem Glaspapier (nicht Schmirgelpapier!) abgeschliffen, mit einer völlig reinen, trockenen Bürste abgebürstet, mit einem reinen in destilliertes Wasser getauchten Leinenlappen gründlich abgewaschen und in noch leichtfeuchtem Zustande über einer Flamme vollständig getrocknet. Die Oberfläche besitzt zwar dann ein unschönes Aussehen mit einem leichten Stich ins Gelbliche und zeigt zahlreiche leichte Risse, isoliert aber, wenn noch jede Berührung mit den Fingern vermieden wird, ausgezeichnet.

3. Hilfsinstrumente.

a) Bestimmung des Reduktionsfaktors.

Das Benndorfsche Elektrometer in der eben beschriebenen Aufstellung liefert nur relative Werte des Potentialgefälles, welche durch gleichzeitige Messungen mit einem transportablen Instrumentarium im freien flachen Gelände auf die Ebene zu reduzieren sind. Hiezu verwende ich seit Jahren das Saitenelektrometer und zwei Flammenkollektoren. Das Saitenelektrometer wird mittels einer Bornhäuser Akkumulatorenbatterie von 300 Volt Maximalspannung und eines Präzisionsvoltmeters von Hartmann & Braun geeicht. Ein an der Batterie angebrachter Zellenschalter erlaubt, die dem Elektrometer zugeführte Spannung in Schritten von 10 Volt von 0 bis 300 Volt zu steigern. Bei der Eichung wird das Elektrometer in „Doppelschaltung“ verwendet, also die eine Schneide mit der Saite leitend verbunden, die gegenüberliegende „Influenzschneide“ geerdet.

Der Ort der Messung des Reduktionsfaktors ist eine freie ebene Wiesenfläche ca. 250 m von der Station und 100 m von den nächstgelegenen Landhäusern entfernt. Die Messung selbst wurde nur bei klarem wolkenlosen Wetter mehrmals im Jahre in folgender Weise angestellt. Das Saitenelektrometer wird auf ein niederes photographisches Metallstativ aufgeschraubt

und das Elektrometergehäuse geerdet. Die eine Schneide wird mit der Saite leitend verbunden, die Influenzschneide isoliert. Ein etwa 8 m langer dünner Kupferdraht führt von der Zuleitungssonde zur Saite nach einem Flammenkollektor, der auf einem Hartgummistabe 1 m über dem Boden aufgesteckt ist. Die isolierte Schneide wird durch einen ebensolangen Leitungsdraht mit einem zweiten Flammenkollektor verbunden, der isoliert in eine Blechbüchse eingebaut und so tief in die Erde eingegraben ist, daß seine Spitze bündig mit dem Erdboden abschneidet. Die Spitzen beider Flammenkollektoren liegen dann 1 m übereinander. Beide Kollektoren werden mehrere Meter voneinander entfernt aufgestellt, so daß sie sich nicht gegenseitig durch die entweichenden Flammengase beeinflussen können, zumal stets dafür gesorgt wird, daß der Wind zwischen den Kollektoren hindurchweht. Der Beobachter sitzt auf einem niederen Feldstuhl, so daß hiedurch nur eine geringe Deformation des Erdfeldes entsteht, die auf die 8 m entfernten Kollektoren nur eine zu vernachlässigende Einwirkung mehr ausüben kann[1]). Das Potential, das die Bodenlampe annimmt, ist nur gering, meist 8—10 Volt und wird gemessen durch die Vergrößerung des Saitenausschlages beim Erden der Bodenlampe (Influenzschneide). Durch zeitweilige Erdung der Bodenlampe kann man sich so überzeugen, ob dieselbe auch richtig brennt, da sie ja vom Standpunkte des Beobachters aus nicht direkt sichtbar ist, und ob sie nicht durch Spinnfäden oder berührende Grashalme kurzgeschlossen ist.

Bei dieser Anordnung hat man die Annehmlichkeit zur Auswertung der Elektrometerangaben dieselbe Eichkurve verwenden zu können, die für die Doppelschaltung, also bei geerdeter Influenzschneide gilt. Ich habe mich davon überzeugt, daß bei geladener Influenzschneide erst dann Abweichungen von der Eichkurve für Doppelschaltung eintreten, wenn diese

---

[1]) H. Benndorf, Sitz.-Ber. d. K. Akad. d. Wiss. Wien 115 (IIa), 445, 1906.

Ladung 20 Volt überschreitet. Erst dann müßten an den abgelesenen Werten kleine Korrekturen angebracht werden[1]).

Nach meinen Messungen ergaben sich bei klarem wolkenlosen Wetter Werte für den Reduktionsfaktor, die nicht mehr als 5 % voneinander abweichen, was bei einem so wechselvollen meteorologischen Element, wie es das Potentialgefälle ist, eine genügende Genauigkeit darstellt. Freilich können sich bei anderen Wetterlagen mitunter größere Abweichungen zeigen; jedoch ist für das Studium des Potentialgefälles hauptsächlich dessen normaler ungestörter Verlauf an heiteren, wenig bewölkten Tagen von Wichtigkeit, für welche sich eine genügend genaue Reduktion auf absolutes Maß bestimmen läßt. So ist denn auch in der vorliegenden Arbeit das Hauptgewicht auf das ungestörte, normale luftelektrische Potentialgefälle gelegt.

Der Reduktionsfaktor beträgt: 1 mm Ausschlag des Elektrometerzeigers $= 12{,}5 \frac{\text{Volt}}{\text{m}}$ Gefälle in der Ebene.

b) Auswertung des Beobachtungsmateriales.

Das hier verwendete Benndorfsche Elektrometer zeichnet alle zwei Minuten einen Punkt auf. Die Registrierung besteht demnach aus einer fortlaufenden Reihe von Punkten, deren Abstand von der Nullinie, die bei geerdetem Elektrometer in der Mitte des Papieres aufgezeichnet wird, den Elektrometerausschlag angibt. Bei normalem elektrischen Potentialgefälle ordnen sich die einzelnen Punkte sehr gut in eine stetige Kurve ein, so daß zur Ermittelung der Stundenmittel die von Ad. Schmidt[2]) angegebene Methode verwendet werden kann. Hiezu habe ich den von Messerschmitt und Lutz[3])

[1]) C. W. Lutz, Phys. Zeitschr. 9, 105, 1908. — Eine Anordnung ganz ähnlicher Art hat auch A. Daunder, Phys. Zeitschr. 8, 282, 1907 verwendet.

[2]) Ad. Schmidt, Veröff. d. Preuß. Meteorol. Inst., Nr. 196. Berlin 1908, S. 30.

[3]) J. B. Messerschmitt und C. W. Lutz, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 26, 142, 1906.

konstruierten Ableseschieber dem hier vorliegenden Zwecke entsprechend angepaßt. Die Vorrichtung ist in Fig. 3 und 4 abgebildet. Ein schweres Eisenlineal L mit einer den Stundenmarken entsprechenden Teilung wird mit den beiden Pratzen p_1 p_2 (Fig. 4) an die Zeitmarken 10^h N und 1^h p. m. angelegt. Mittels des Ableseschiebers *Sch* kann dann ein voller Tag von 12^h nachts bis 12^h mittags ausgemessen werden. Zu diesem Zwecke ist zunächst die O-Linie einzustellen. Dies geschieht durch Verschiebung des beweglichen Millimetermaßstabes M Fig. 3 senkrecht zum Lineal, bis der Anfangsstrich 0 der Skala mit dem auf die Nullinie eingestellten Schieberquerstrich $q_1 - q_2$ zusammenfällt. Solcherweise können kleine Verlegungen der Nullinie, wie sie mitunter eintreten, berücksichtigt werden. Nach dieser Einstellung wird der Maßstab durch die beiden Druckschrauben d_1 d_2 festgeklemmt, und der Schieber ist nun fertig zum Gebrauch. Um nun den Mittelwert, etwa der Stunde 3^h—4^h wie in Fig. 3 ersichtlich auszumessen, wird der Schieber *Sch* über die Stundenmarken 3^h und 4^h des Lineals geschoben und hierauf der Schlitten S so eingestellt, daß die über und unter dem Querstrich $q_1 q_2$ liegende, durch die Punktreihe einerseits, und durch die Vertikalstriche $a - a$ und $b - b$ anderseits begrenzten Flächenstücke schätzungsweise gleichgroß sind. Der Index q_1 gibt dann am Maßstabe M den Stundenmittelwert 3^h—4^h in mm an. Nach Notierung dieser Zahl wird der Schieber um eine Stundenlänge längs des Lineals nach links geschoben und weiter in gleicher Weise verfahren. Nachdem so 12 Stundenmittel abgelesen sind, wird das Lineal L vom Papier P abgerückt und mittels der Haspel H (Fig. 4) das abgelesene Stück des Papierbandes aufgewunden, wodurch die nächstfolgenden Aufzeichnungen, von der Rolle R ablaufend, zur Ablesung vor das Lineal kommen. Das mit Billardtuch überzogene, nur wenig geneigte Pult B und der kleine Schreibtisch T haben sich bei diesem Verfahren als praktisch bewährt.

Zur Ausmessung einzelner Punkte (Ermittlung des Reduktionsfaktors, der Empfindlichkeit etc.) dient das Kreuz in

der Mitte des Schlittenquerstriches (Fig. 3) und der kurze Maßstab am unteren Schieberrand, der ein Stundenintervall in 30 Teile teilt.

II. Das Beobachtungsmaterial.

Das normale Potentialgefälle.

1. Mittelwerte.

Wie erwähnt, ist für das Studium des Potentialgefälles besonders dessen normaler Verlauf von Bedeutung. Aus dem gesamten Registriermaterial wurden daher jene Tage ausgewählt, an welchen die Bewölkungsziffer nicht über 5 betrug. Sonst heitere Tage, an welchen morgens oder abends Nebel einfiel, oder Tage, an welchen durch Spinnfäden von der Kollektorstange zur Hauswand, oder durch starken Rauhfrost mehrere Stunden hindurch Kurzschluß entstand, wurden ausgeschlossen. Ebenso eine Reihe von wolkenlosen Wintertagen, an welchen ein heftiger Wind eine auffallende Störung des Potentialgefälles durch Schneetreiben verursachte (hohes — Potentialgefälle). Freilich schmilzt bei einer so scharfen Auslese das verwendbare Beobachtungsmaterial ganz beträchtlich zusammen; doch scheint mir gerade bei den rasch wechselnden Witterungsverhältnissen der oberbayerischen Hochebene eine besondere Vorsicht notwendig, um verläßliche Absolutwerte des Potentialgefälles zu erhalten.

Insgesamt wurden für die fünfjährige Registrierperiode 1905/10 327 ungestörte Tage erhalten, für jedes Jahr durchschnittlich 65. Die in der beschriebenen Weise abgelesenen Stundenmittel der ausgewählten Tage wurden für jeden Monat zu Mittelwerten vereinigt und sind in Tabelle 1 aufgeführt. Die Jahresmittel Tabelle 3 (vorletzte Spalte) weichen nur wenig voneinander ab[1]). Das Gesamtjahresmittel der bisherigen

---

[1]) Der besonders hohe Mittelwert im Jahre 1909, wie er in Potsdam gefunden wurde, trat hier nicht ein. — K. Kähler, Tätigkeitsbericht d. K. Preuß. Meteorol. Institutes 1909, Anhang S. 145.

Registrierungen beträgt 168 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$; in den Sommermonaten (März—November inkl.) 140 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$, im Winter (Dezember—Februar inkl.) 250 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$. Das Potentialgefälle ist also hier in den Wintermonaten rund 1,8 mal größer als während der wärmeren Jahreszeit. Aus Lamonts relativen Messungen, über deren Auswertung noch das Nähere gesagt wird, ergibt sich für dieses Verhältnis der Wert 1,7.

Obige Absolutwerte sind in guter Übereinstimmung mit denen, die A. Daunderer in Bad Aibling 42 km südöstlich von München erhielt. Daunderer fand aus 3197 direkten Messungen des Potentialgefälles im Sommer 132 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$, im Winter 194 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$, im Mittel 149 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$. Die Übereinstimmung wird noch besser, wenn man aus dem Münchner Material die Mittelwerte aus jenen Monaten 1905 und 1906 bildet, zu welcher Zeit Daunderer beobachtet hat. Es berechnet sich dann für München ein Potentialgefälle im Sommer zu 132 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$, im Winter zu 220 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$, im Mittel zu 159 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$, also in nahezu völliger Übereinstimmung mit den Werten Daunderers. Es gewinnt damit der angegebene Absolutwert des Potentialgefälles von 168 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$ an Zuverlässigkeit und bestätigt die bereits von Hjuler u. H. Mache[1]) gemachte Beobachtung, daß das Potentialgefälle auf Hochebenen kleiner ist, als im tiefer gelegenen Flachlande. Dies zeigt deutlich die nachstehende Zusammenstellung in Tabelle 2. In dieser Tabelle sind nur jene Orte aufgeführt, an welchen in neuerer Zeit und mit

[1]) A. Gockel, Die Luftelektrizität. Leipzig 1908, S. 88. — H. Mache und E. v. Schweidler, Die atmosphärische Elektrizität. Braunschweig 1909, S. 48.

Tabelle I. Potentialgefälle in $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$.

	0^h-1^h	1−2	2−3	3−4	4−5	5−6	6−7	7−8	8−9	9−10	10−11	11−M
Januar												
1906	140	123	108	118	134	139	188	211	238	229	245	245
1907	129	131	138	177	186	212	298	374	368	314	268	422
1908	270	205	196	204	210	231	295	351	359	366	379	336
1909	167	156	165	157	157	199	272	261	291	302	277	287
1910	232	250	188	196	302	304	307	322	396	294	390	400
Mittel	188	173	159	170	198	217	272	304	330	301	312	**338**
Februar												
1906	200	151	160	193	198	264	283	238	308	357	284	345
1907	117	122	87	70	68	76	127	203	199	231	260	266
1908	176	186	182	162	159	195	189	245	302	281	319	299
1909	157	149	140	152	210	215	250	321	350	327	285	265
1910	184	154	137	147	139	177	255	266	334	354	351	346
Mittel	167	152	141	145	155	185	221	255	299	**310**	300	304
März												
1906	119	100	92	83	85	113	137	187	216	230	231	240
1907	98	78	60	73	83	97	118	172	190	168	166	126
1908	113	116	90	110	105	121	179	233	224	224	204	217
1909	151	132	120	125	132	185	222	269	242	237	240	246
1910	147	139	127	137	147	166	222	257	284	285	265	205
Mittel	126	113	98	106	110	136	176	224	**231**	229	221	207
April												
1906	67	59	54	54	67	85	139	171	158	158	152	128
1907	72	59	43	52	60	54	127	159	117	118	135	132
1908	99	84	89	96	100	84	205	275	194	195	186	167
1909	87	75	86	84	70	104	161	210	251	205	174	139
1910	139	135	124	119	114	144	196	241	211	201	157	135
Mittel	93	82	79	81	82	94	166	**211**	186	175	161	140
Mai												
1905	62	50	38	34	18	32	126	170	171	119	130	93
1906	71	58	49	40	39	72	131	158	152	143	125	122
1907	71	58	67	60	69	91	122	131	125	116	109	93
1908	89	87	79	82	96	126	191	247	229	179	172	156
1909	74	59	65	80	79	121	180	175	141	117	85	75
Mittel	73	62	60	59	60	88	150	**176**	163	135	124	108
Juni												
1905	69	50	41	34	43	49	175	224	184	159	144	121
1906	61	69	71	42	66	97	159	155	117	111	102	95
1907	99	86	83	92	93	130	170	192	142	136	132	116
1908	99	92	85	82	77	119	159	167	177	177	145	124
1909	119	100	91	76	95	104	139	172	164	170	146	131
Mittel	89	79	74	65	75	100	160	**182**	157	151	134	117

Stundenmittel.

M−1	1−2	2−3	3−4	4−5	5−6	6−7	7−8	8−9	9−10	10−11	11^h-0^h	Tagesmittel	Tage
255	245	236	248	257	243	258	257	238	206	177	142	203	9
320	410	472	375	256	334	250	200	220	241	168	165	268	1
298	273	316	279	257	308	389	431	407	362	306	331	307	8
276	270	250	206	204	210	244	297	256	263	219	216	233	10
384	416	342	367	345	355	364	339	326	300	252	166	314	3
307	323	323	255	264	290	301	**305**	289	274	224	204	*264*	31
363	388	359	299	298	276	256	305	324	316	271	241	278	5
246	259	240	214	235	266	250	197	180	174	164	135	183	4
241	236	268	257	301	290	314	340	337	312	201	215	250	5
262	281	275	256	270	277	322	320	324	358	341	271	266	4
346	316	282	274	262	276	311	336	324	272	231	199	261	8
292	296	285	260	273	277	291	**299**	298	286	242	212	*248*	26
202	212	189	182	189	200	256	229	243	178	148	122	174	7
123	112	110	103	102	89	103	142	187	184	160	132	124	5
187	179	182	175	177	166	182	246	220	177	141	116	170	6
234	227	197	179	212	239	257	237	240	236	206	185	206	9
181	175	167	144	127	118	129	170	240	209	215	196	185	10
185	181	169	157	161	162	185	205	**226**	197	174	150	*172*	37
118	113	93	98	99	94	99	129	157	147	136	101	111	4
128	119	105	100	90	94	106	95	85	72	66	72	94	4
134	180	169	169	149	172	226	200	215	209	175	147	163	3
139	136	134	126	122	120	125	169	197	194	177	111	142	6
129	134	139	129	136	136	157	182	184	159	149	124	153	7
130	136	128	124	119	123	143	155	**168**	156	141	111	*133*	24
87	78	73	72	81	101	97	112	103	105	113	100	90	3
116	97	108	118	129	139	148	122	151	129	105	126	110	4
88	77	72	76	86	96	77	96	106	93	85	44	88	5
131	129	129	127	130	146	136	126	146	152	134	130	140	6
75	86	84	84	84	79	71	60	64	67	82	79	90	4
99	93	93	95	102	112	106	103	**114**	109	104	96	*103*	22
87	75	62	56	62	53	45	74	104	103	86	75	91	4
86	92	90	89	91	86	84	85	72	86	80	74	90	4
86	113	106	106	118	105	67	62	63	81	95	81	106	5
120	120	115	114	111	122	119	124	139	184	150	124	127	10
121	117	114	109	105	114	129	102	110	109	105	93	118	5
100	103	97	95	97	96	89	89	98	**113**	103	89	*107*	28

Tabelle I. Potentialgefälle in $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$.

	0^h—1^h	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10	10—11	11—M
Juli												
1905	57	54	39	41	43	87	149	156	147	135	132	128
1906	54	48	51	42	43	75	130	132	137	119	126	95
1907	104	96	112	124	114	139	227	258	233	206	212	200
1908	119	109	104	91	94	120	177	199	206	171	165	151
1909	111	94	90	96	93	119	164	170	189	186	181	160
Mittel	89	80	79	79	77	108	169	**183**	182	163	163	147
August												
1905	40	48	36	41	47	66	109	154	163	125	111	98
1906	143	127	116	106	109	146	199	214	199	213	189	168
1907	120	129	121	128	142	168	234	288	287	254	250	230
1908	124	110	91	85	72	87	162	224	224	197	179	159
1909	117	104	96	95	100	85	149	247	250	191	172	164
Mittel	109	104	92	91	94	110	171	**225**	225	196	180	164
September												
1905	61	45	36	27	24	34	104	179	169	167	142	128
1906	116	104	80	62	61	81	105	215	203	225	198	178
1907	94	119	144	147	163	214	202	159	201	206	201	164
1908	72	44	40	30	48	34	110	254	266	249	220	195
1909	100	79	86	83	104	101	151	241	234	179	139	136
Mittel	89	78	77	70	80	93	134	210	**215**	205	180	160
Oktober												
1905	47	43	37	42	41	58	70	80	129	168	175	150
1906	164	144	125	127	103	134	124	208	281	335	319	311
1907	99	73	101	89	76	125	138	207	308	252	234	190
1908	100	86	66	74	90	89	95	160	236	217	229	165
1909	130	101	100	115	102	117	146	197	234	199	161	147
Mittel	108	89	86	89	82	105	115	170	**238**	234	224	193
November												
1905	116	114	108	89	115	127	176	185	226	224	289	312
1906	115	116	114	118	141	144	189	217	226	246	218	200
1907	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1908	131	79	75	110	120	121	112	215	210	206	231	232
1909	162	146	120	117	132	171	203	234	257	251	214	243
Mittel	131	114	104	108	127	141	170	213	230	232	238	**247**
Dezember												
1905	97	97	87	82	94	109	159	180	170	128	125	140
1906	161	112	95	132	178	288	244	266	293	311	232	310
1907	199	157	135	138	139	185	216	240	297	377	395	348
1908	186	157	124	140	182	261	274	290	268	291	278	261
1909	187	157	151	171	197	244	322	354	442	448	328	276
Mittel	166	136	118	133	158	217	243	266	294	**311**	272	267

Stundenmittel.

M–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11^h–0^h	Tages-mittel	Tage
127	122	108	110	113	109	116	134	128	105	78	52	103	5
79	92	84	95	100	102	138	156	133	97	74	58	94	4
189	185	179	177	171	171	156	162	159	136	153	118	166	10
129	126	117	112	105	119	126	169	190	215	201	169	145	8
142	144	141	140	144	157	160	186	157	144	136	139	143	6
133	134	126	127	127	132	139	**161**	153	139	128	107	*130*	33
85	85	82	82	68	78	88	95	92	89	84	56	84	7
155	153	146	144	148	140	127	133	141	141	141	136	151	8
196	201	195	196	202	208	210	228	187	139	124	140	191	10
150	144	136	99	136	156	172	167	216	220	206	149	153	4
141	137	129	126	135	141	151	190	159	150	137	115	145	5
145	144	138	129	138	145	150	**163**	159	148	138	119	*145*	34
128	125	122	115	115	120	132	143	121	110	90	67	104	4
142	133	136	124	127	133	125	150	215	185	152	146	142	5
159	152	155	203	222	223	228	244	214	84	86	91	170	2
172	171	159	157	139	140	184	227	230	164	140	116	148	5
119	122	126	101	93	85	65	96	126	121	83	61	118	6
144	141	140	140	139	140	147	172	**181**	133	110	96	*136*	22
142	163	142	162	195	181	191	171	137	100	82	70	116	6
235	217	204	192	176	161	191	192	183	178	139	143	191	5
155	146	147	168	182	210	259	319	282	243	193	138	180	5
126	126	116	112	120	125	116	125	150	127	100	74	126	4
135	126	117	114	116	142	161	161	166	176	140	139	143	8
159	156	145	150	158	164	184	**194**	184	165	131	113	*152*	28
199	194	162	184	203	200	152	155	131	112	101	103	166	5
195	188	197	209	197	263	294	259	231	190	150	138	190	6
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
123	115	117	172	286	348	480	272	212	154	166	150	185	2
234	230	230	235	230	226	229	276	237	219	170	177	206	7
188	182	176	200	229	259	**289**	241	203	169	147	142	*187*	20
154	171	179	183	156	136	153	200	165	167	140	135	142	6
472	444	448	201	262	326	359	351	186	172	161	141	256	2
405	385	385	357	281	475	389	444	419	320	262	201	298	4
241	241	242	227	242	196	196	224	219	223	212	169	222	5
219	241	259	258	242	272	291	300	305	311	252	184	267	5
298	296	303	245	237	281	278	**304**	259	239	205	166	*237*	22

dem Benndorfschen Apparat registriert wurde. Aber auch die älteren Beobachtungen [1]) bestätigen diese Tatsache.

Tabelle 2.

	Potsdam [2]) 1904 – 1908	München 1905 — 1910	Aibling [3]) 1906 — 1907	Kremsmünster [4]) 1902 — 1903
Meereshöhe . . .	80 m	528 m	480 m	384 m
Winter	303 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$	250 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$	194 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$	136 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$
Sommer	217 „	140 „	132 „	82 „
Jahresmittel . . .	239 „	168 „	149 „	98 „

Die vorstehende Zusammenstellung der Mittelwerte läßt zwei Beziehungen deutlich hervortreten. Für die beiden Beobachtungstationen der Oberbayerischen Hochebene ergeben sich, trotz der 42 km betragenden Entfernung, in gleichen Zeitabschnitten sehr gut miteinander übereinstimmende Mittelwerte. Andererseits unterscheiden sich aber diese Mittelwerte in ausgesprochener Weise von denen, die in anderen, topographisch und geographisch verschiedenen Gebieten erhalten wurden, so daß zunächst schon eine deutliche Beziehung zur Höhenlage daraus hervortritt. Diese Tatsachen ermutigen entschieden dazu, gleichzeitige („Termin-“) Beobachtungen auch über weitere, noch differentere Erdräume zu erstrecken, wie es schon seit langem von der luftelektrischen Kommission der kartellierten deutschen Akademien geplant und vorbereitet ist [5]).

[1]) Ebenda S. 22. [2]) K. Kähler, l. c. S. 146.

[3]) A. Daunderer, Dissertation, S. 37 und 89.

[4]) B. Zölß, Wiener Akad. Ber., math.-phys. Kl. 112 (II a), 1412, 1903.

[5]) Protokoll über die Sitzung der luftelektrischen Kommission der kartellierten deutschen Akademien zu München am 26. Oktober 1907. Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wissenschaften, math.-phys. Kl. 37, Heft 3, S. 15. 1907.

2. Jährliche Periode des Potentialgefälles.

Wie an allen Beobachtungsstationen in Europa[1]) ergab sich auch in München eine einfache jährliche Periode des Potentialgefälles mit einem Maximum im Winter und einem Minimum im Sommer (Fig. 5). Diese jährliche Periode des Potentialgefälles (Tabelle 3) hat im allgemeinen den umgekehrten Gang wie die Lufttemperatur (Fig. 5 punktierte Linie T), die für die ausgewählten 327 Tage den meteorologischen Aufzeichnungen der Sternwarte entnommen wurde. (Dreimalige tägliche Ablesung des trockenen beschatteten Thermometers um 8^h a, 2^h p und 8^h p). Das Maximum des Gefälles und das Minimum der Temperatur fällt auf den Januar. Das Minimum des Potentialgradienten tritt aber früher ein (im Mai) als das Maximum der Temperatur (im Juli). Hiebei ist aber zu beachten, daß mehr als die Lufttemperatur die Wärme der obersten Bodenschichten auf den Gang des Potentialgefälles, vor allem im Sommer, einen entscheidenen Einfluß ausübt. Nach den Messungen Eberts und seiner Schüler[2]) kann es keinem Zweifel mehr unterliegen, daß neben anderen Faktoren ganz besonders die Bodenwärme eine „Bodenatmung“ verursacht, welche hauptsächlich den Gang der luftelektrischen Elemente bewirkt. Dementsprechend ist in den Monaten Mai—Juni, zu welcher Zeit die Wärmeeinnahme des Bodens in unseren Breiten ein Maximum[3]) erreicht, also auch die größte Menge Bodenluft mit ihren Emanationen[4]) und fertig gebildeten Ionen aus dem Boden austritt, ein Maximum der Leitfähigkeit und damit ein Minimum des Potentialgefälles zu erwarten. In

[1]) A. Gockel, Die Luftelektrizität. Leipzig 1908, S. 95. — H. Mache und E. v. Schweidler, Die atmosph. Elektrizität. Braunschweig 1909, S. 24.

[2]) H. Ebert und K. Kurz, Abhandl. d. K. Bayer. Akad. d. Wissensch., math.-phys. Klasse 25, 33, 1909. Phys. Zeitschr. 11, 396, 1910. — A. Daunderer, Diss., S. 26. Meteorol. Zeitschr. 26, 303, 1909. Phys. Zeitschr. 10, 116, 1909. — L. Endrös, Diss., München (Techn. Hochsch.) 1909, S. 32 und 37. — H. Ebert, Phys. Zeitschr. 10, 351, 1910.

[3]) H. Hann, Lehrbuch d. Meteorol., II. Aufl. Leipzig 1906, S. 46.

[4]) L. Endrös, l. c., S. 33.

der Tat stellte sich bei den direkten Messungen der Leitfähigkeit in München 1909 (s. II.) und in Potsdam[1]) 1909/10 das Hauptmaximum im Mai ein.

Tabelle 3.

Jährlicher Gang des Potentialgefälles. (Monatsmittel.)

Jahr	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Septemb.	Oktober	Novemb.	Dezemb.	Jahresmittel	Zahl der Tage
1905	—	—	—	—	90	91	103	84	104	116	166	142	151	68
1906	203	278	174	111	110	90	94	151	142	191	190	256	166	63
1907	268	183	124	94	88	106	166	191	170	180	—	298	170	55
1908	307	250	170	163	140	127	145	153	148	126	185	222	178	66
1909	233	266	206	142	90	118	143	145	118	143	206	267	173	75
1910	314	261	185	153	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel	265	248	172	133	*104*	106	130	145	136	151	187	237	168	65

Zur Erklärung der hohen Winterwerte des Potentialgefälles kann die Bodenatmung allerdings nicht herangezogen werden, die, wie Daunderer[2]) gezeigt hat, zur kalten Jahreszeit nur eine ganz untergeordnete Rolle spielt. Wenn auch im Winter die kalten ruhenden Luftschichten mit oftmals nebeliger Trübung eine starke Verminderung der Leitfähigkeit und ein Steckenbleiben der von oben einwandernden + Ionen, und damit eine Erhöhung des Potentialgefälles verursachen werden, so bedürfen doch die luftelektrischen Vorgänge im Winter noch einer besseren Durchforschung.

3. Tägliche Periode des Potentialgefälles.

In München ergab sich während der wärmeren Jahreszeit, März—November, ein ausgesprochen doppelter täglicher Gang des Potentialgefälles mit zwei Maximalstellen etwa um 8^h a

---

[1]) K. Kähler, Veröff. d. K. Preuß. Meteor. Instituts. Berlin 1910, Nr. 223, S. XXI.

[2]) A. Daunderer, Diss., S. 26 und 37.

und um 8^h p und zwei Minimalstellen um 3^h a und um 3^h p. Auch hier zeigt sich das fast überall beobachtete tiefe Hauptminimum in den ersten Morgenstunden, auf das A. Chauveau [1]) zuerst mit besonderem Nachdrucke hinwies. Die Lage des Morgen- und Abendmaximums ändert sich mit der Jahreszeit und fällt etwa zwei Stunden nach Sonnenauf- bzw. Untergang (Fig. 6 und Tabelle 4).

Im Winter nähert sich die tägliche Periode der einfachen, jedoch ist an den ausgewählten, normalen Tagen das Abendmaximum nach Sonnenuntergang noch angedeutet. Dies rührt hauptsächlich von der Auswahl der zur Ermittlung des täglichen Ganges verwendeten Tage her. Es zeigte sich nämlich, daß, besonders an klaren, völlig dunst- und wolkenlosen Wintertagen, eine ausgesprochen doppelte tägliche Periode mit scharf ausgeprägtem Abendmaximum auftritt. An vielen anderen, jedoch zur Auswertung nicht minder geeigneten Tagen, blieb das Abendmaximum aus.

Im Sommer tritt fast durchwegs die doppelte tägliche Periode auf, wobei namentlich im Frühling und Herbst das Abendmaximum scharf hervortritt (Fig. 6). Und doch beobachtete ich verschiedentlich auch im Sommer, namentlich im Mai und Juni ein Ausbleiben des Abendmaximums an völlig heiteren Tagen. Ich habe mich an solchen Abenden wiederholt davon vergewissert, daß keinerlei zufällige Mängel des Apparates, wie ungenügende Isolation, Unwirksamkeit der Poloniumsonde etc., die Aufzeichnungen des Elektrometers beeinträchtigten. Aus diesen Gründen habe ich denn auch diese, sonst völlig einwandsfreien Tage, zur Mittelbildung mit herangezogen. Die Kurven für Mai und Juni zeigen daher eine Verflachung des Abendmaximums.

Eine gute Übersicht, sowohl über den täglichen, als auch jährlichen Verlauf des Potentialgefälles, gibt die Darstellung durch Isoplethen (Fig. 7). Der Mittelwert des Potential-

---

[1]) A. B. Chauveau, Recherches sur l'électricité atmosphérique. Paris 1902, S. 110.

Tabelle 4. Täglicher Gang des Potentialgefälles (Stundenmittel).

	0^h-1^h	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10	10—11	11—M	M—1	1—2	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10	10—11	11^h-0^h	Tagesmittel	Tage
Januar . . .	188	173	159	170	198	217	272	304	330	301	312	338	307	323	323	255	264	290	301	305	289	274	224	204	265	31
Februar . . .	167	152	141	145	155	185	221	255	299	310	300	304	292	296	285	260	273	277	291	299	298	286	242	212	248	26
März	126	113	98	106	110	136	176	224	231	229	221	207	185	181	169	157	161	162	185	205	226	197	174	150	172	37
April	93	82	79	81	82	94	166	211	186	175	161	140	130	136	128	124	119	123	143	155	168	156	141	111	133	24
Mai	73	62	60	59	60	88	150	176	163	135	124	108	99	93	93	95	102	112	106	103	114	109	104	96	104	22
Juni	89	79	74	65	75	100	160	182	157	151	134	117	100	103	97	95	97	96	89	89	98	113	103	89	106	28
Juli	89	80	79	79	77	108	169	183	182	163	163	147	133	134	126	127	127	132	139	161	153	139	128	107	130	33
August . . .	109	104	92	91	94	110	171	225	225	196	180	164	145	144	138	129	138	145	150	163	159	148	138	119	145	34
September . .	89	78	77	70	80	93	134	210	215	205	180	160	144	141	140	140	139	140	147	172	181	133	110	96	136	22
Oktober . . .	108	89	86	89	82	105	115	170	238	234	224	193	159	156	145	150	158	164	184	194	184	165	131	113	151	28
November . .	131	114	104	108	127	141	170	213	230	232	238	247	188	182	176	200	229	259	289	241	203	169	147	142	187	20
Dezember . .	166	136	118	133	158	217	243	266	294	311	272	267	298	296	303	245	237	281	278	304	259	239	205	166	237	22
Mittel . . .	119	105	97	100	108	133	179	218	**229**	220	209	199	182	182	177	165	170	182	192	**199**	194	177	154	134	**167**	327

gefälles, 168 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$, ist durch einen stark ausgezogenen Linienzug eingezeichnet. Die strich-punktierten Kurven geben die Zeit des Sonnenauf- und Unterganges an.

Ein Vergleich dieser Isoplethentafel mit denen von Potsdam[1]) und Kew[2]) zeigt in den allgemeinen Zügen einen ganz ähnlichen Verlauf für alle drei Stationen, nur herrscht in München, ebenso wie in Kew die doppelte tägliche Periode während des ganzen Jahres mehr vor, als in Potsdam.

Vergleich mit den Lamontschen Relativwerten.

Wie eingangs erwähnt, maß J. Lamont in den Jahren 1850—1856 die Potentialdifferenz zwischen Luft und Erde in relativem Maße. Die Beobachtungen wurden stündlich von morgens 7^h bis abends 6^h nach der Methode von Dellmann auf dem Dache der hiesigen Sternwarte angestellt. Da Lamont das gesamte luftelektrische Beobachtungsmaterial zusammen mit den fortlaufend angestellten meteorologischen Beobachtungen veröffentlichte[3]), so konnte auch dieses Material nach denselben Gesichtspunkten geordnet werden, wie die Registrierungen 1905—1910. Die Mittelwerte der ausgewählten, heiteren Tage in Lamonts relativem Maße sind in der Tabelle 5 zusammengestellt.

Der mittlere tägliche Gang für das ganze Jahr ergibt sich aus der letzten Vertikalspalte der Tabelle 5. Wenn sich auch hieraus nur der Verlauf des Potentialgefälles (in relativem Maße) während der Tagesstunden 7^h a — 6^h p entnehmen läßt, so zeigt doch der Vergleich mit den Registrierungen (1905/10) eine gute Übereinstimmung (Fig. 6). Auch bei Lamont tritt ein Maximum des Potentialgefälles um 8^h a ein, ein flaches

[1]) G. Lüdeling, Tätigkeitsbericht d. K. Preuß. Meteorol. Inst. 1909, Anhang S. 156.

[2]) C. Chree, Pilos. Transactions of the Royal Society of London, Ser. A, Vol. 206, 307, 1906 und J. B. Messerschmitt, Referat in Naturw. Rundschau 24, 122, 1909.

[3]) J. Lamont, l. c.

Tabelle 5. **Potentialgefälle nach J. Lamont 1850—1856.**

Stunde	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember	Mittel
7^h a	6,23	5,61	5,44	5,19	4,19	4,44	3,70	4,09	4,10	4,59	5,69	5,47	4,89
8^h a	6,23	6,80	6,70	5,29	3,93	3,44	3,68	3,88	3,85	5,41	5,44	6,77	5,11
9^h a	6,47	6,81	6,59	4,72	3,47	3,12	3,15	3,81	3,75	5,11	6,00	6,67	4,97
10^h a	6,86	6,76	5,95	3,94	3,16	3,03	3,18	3,60	3,25	4,60	5,79	7,01	4,76
11^h a	7,03	7,03	5,51	3,80	3,06	2,64	3,05	3,45	3,10	3,99	5,31	6,53	4,54
M	6,61	7,03	5,40	3,80	2,87	2,58	3,00	3,30	2,93	4,00	5,88	6,80	4,52
1^h p	6,10	6,58	5,37	3,77	2,88	2,52	2,84	3,03	2,96	3,41	4,98	6,90	4,28
2^h p	6,30	6,02	4,97	3,64	2,89	2,67	2,92	3,06	2,86	3,55	5,36	6,84	4,26
3^h p	6,17	6,47	5,08	3,58	2,92	2,72	2,83	3,19	2,82	3,59	5,26	6,34	4,25
4^h p	6,23	6,41	4,75	3,75	2,96	2,69	2,75	3,01	2,81	3,43	5,70	6,41	4,24
5^h p	5,92	6,53	4,63	3,61	2,78	2,73	2,86	2,80	2,49	3,37	5,07	5,61	4,03
6^h p	6,19	6,36	4,59	3,48	2,62	2,67	2,70	2,83	2,48	3,60	5,78	6,67	4,16
Mittel	6,36	6,53	5,41	4,05	3,14	2,93	3,06	3,34	3,12	4,05	5,52	6,50	
Zahl der Beob.-Tage	46	39	61	53	50	56	79	72	66	47	28	49	54

Minimum in den Nachmittagsstunden, das um 5^h p seinen tiefsten Wert erreicht. Später steigt die Kurve wieder an und scheint, wie bei den Registrierungen, einem zweiten Maximum zuzustreben.

Auch der jährliche Verlauf des Potentialgefälles nach Lamont (Tabelle 5, vorletzte Horizontalreihe und Fig. 5, Kurve L) ist derselbe, wie bei den registrierten Werten: einfache Welle, Maximum im Winter, Minimum im Frühjahr. Wie bei den Registrierungen schwankt die Eintrittszeit des Wintermaximums in den einzelnen Jahren zwischen Dezember und Februar. Der höchste Mittelwert tritt bei Lamont (1850/56) im Februar auf, bei mir (1905/10) im Januar. Das Minimum geht auch bei Lamont dem Eintritt der heißesten Jahreszeit voraus. Es fällt in den Juni, bei mir in den Mai (Fig. 5). Bemerkenswert erscheint noch, daß auch Lamont im August ein sekundäres Maximum beobachtet hat, das sich auch bei den Registrierungen fast in jedem Jahre einstellt (siehe Tabellen 4 und 5).

In den Wintermonaten, Dezember—Februar, ist das Potentialgefälle in Lamonts relativem Maße 6,46, im Sommer, März—November, 3,85. Das Verhältnis Winterwert : Sommerwert ist also $= \frac{6,46}{3,85} = 1,7$. Es ist dies fast genau derselbe Wert, der sich auch aus den Registrierungen ergibt (1,8).

Die Ergebnisse der vorstehenden Arbeit sind hauptsächlich:

1. Es wird eine Aufstellungsart des Benndorfschen Apparates beschrieben, die sich während einer fünfjährigen Registrierperiode gut bewährt hat.

2. Zur direkten Ablesung der Stunden-Mittelwerte wird eine einfache Vorrichtung angegeben.

3. Für die Registrierperiode 1905/10 ergibt sich aus 327 ungestörten, heiteren Tagen ein Jahresmittel für das Potentialgefälle in München von $168 \frac{\text{Volt}}{\text{m}}$, reduziert auf die Ebene. In den Sommermonaten (März—November inkl.)

140 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$, für den Winter (Dezember—Februar inkl.) 250 $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$, in guter Übereinstimmung mit den anderwärts auf der Oberbayerischen Hochebene gemessenen Werten.

4. Die auf der Bayerischen Hochebene gefundenen Werte für das Potentialgefälle sind im Mittel 1,4 mal kleiner als in der Norddeutschen Tiefebene.

5. In München ergab sich eine einfache jährliche Periode für das Potentialgefälle mit einem Maximum im Januar und einem Minimum im Mai. Potentialgefälle und Bodentemperatur (nicht Lufttemperatur!) verlaufen spiegelbildlich, was deutlich auf einen Bodeneinfluß („Bodenatmung“) hinweist.

6. Das Potentialgefälle besitzt in München eine ausgesprochen doppelte tägliche Periode mit zwei Maximalstellen nach Sonnenaufgang und nach Sonnenuntergang und zwei Minimalstellen etwa um 3^h a und 3^h p. Im Winter nähert sich diese doppelte Periode der einfachen, bleibt aber an besonders klaren, heiteren Wintertagen erhalten.

7. Zur Übersicht über den jährlichen und täglichen Gang des Potentialgefälles und zum Vergleich desselben mit anderen Stationen werden die Isoplethen des Potentialgefälles für München gezeichnet.

II. Messung des vertikalen Leitungsstromes Luft-Erde im Jahre 1909.

Von **Dr. C. W. Lutz.**

Vorgelegt von H. Ebert in der Sitzung am 10. Juni 1911.

Das normale elektrische Erdfeld wird vorzugsweise durch drei Größen gekennzeichnet: durch das Potentialgefälle, die Leitfähigkeit und den vertikalen elektrischen Leitungsstrom Luft-Erde. Besonders einfach gestaltet sich die Messung dieser drei luftelektrischen Elemente nach der Methode von C. T. R. Wilson [1]). Hienach können diese drei Werte mit ein und demselben Apparate in kurzer Zeit und mit großer Genauigkeit in absolutem Maße ermittelt werden, wofern man nur ein Meßinstrument von genügender Empfindlichkeit verwendet. Als solches hat sich bei meinen Messungen das Saitenelektrometer als ganz besonders geeignet erwiesen. Es sei daher im folgenden der von mir konstruierte Apparat, der im Prinzip dem Wilsonschen gleicht, näher beschrieben.

I. Apparat.

Das Instrument besteht im wesentlichen aus vier Teilen: einem Thomsonschen Schutzringkondensator *Sch* (Fig. 1), dem Wilsonschen „Kompensator" *Ko*, dem Saitenelektrometer *E* und einem Holzkasten *H*, der die Hilfsladung für das Elektrometer enthält und gleichzeitig dem ganzen Apparate

[1]) C. T. R. Wilson, Proceed. of the Cambridge Philos. Soc. Vol. 13, 184 und 363, 1905/06.

als Sockel dient. Die innere Einrichtung des Instrumentes ergibt sich aus der schematischen Zeichnung Figur 2. Der ganze Apparat ist aus Messing gearbeitet.

Der Schutzringkondensator *Sch* besteht aus einem breiten, ebenen Ring aus geschwärztem Messingblech von 400 mm äußerem, 115,8 mm innerem Durchmesser und 1 mm Dicke. Er wird von dem Gefäße *G* getragen. Letzteres sitzt auf dem 40 mm weiten Rohr *O*, das auf das Gehäuse des Saitenelektrometers *E* aufgeschraubt ist. Der Kopf des Elektrometers trägt den Stab *t*, an dessen oberem Ende eine geschwärzte, kreisrunde Messingplatte *P* befestigt ist, mit *Sch* in einer Ebene liegend. Diese „Empfangsplatte“, wie ich sie im folgenden heißen will, steht also mit der Saite *S* in leitender Verbindung, ist aber vom Gehäuse des Elektrometers durch den Bernsteinstopfen *B* und vom Schutzring durch einen 2,9 mm breiten, kreisförmigen Spalt isoliert. Der Durchmesser der Empfangsplatte ist 110,0 mm, ihre Fläche, gemessen bis zur Mitte des Luftspaltes, 100,0 cm^2, wodurch die Berechnung der Messungen vereinfacht wird. Der abnehmbare Deckel *D* aus 0,5 mm dickem, geschwärzten Messingblech steht in einer kreisförmigen Einkerbung des Schutzringes, wodurch eine stets gleiche Lage, zentrisch zur Empfangsplatte, gesichert wird. Dem Schutzringe *Sch* wurde absichtlich der große Durchmesser von 400 mm gegeben, weil sich herausstellte, daß bei schmäleren Schutzringen jede Handbewegung des Beobachters bei der großen Empfindlichkeit des Elektrometers eine kleine Veränderung des Saitenausschlages durch Influenzwirkung hervorbrachte.

Mit dem Stabe *t* ist der senkrecht abstehende Kondensatorstift *st* verbunden, der die innere Belegung eines verschiebbaren Zylinderkondensators *Ko* bildet. Die äußere Belegung bildet ein 10 mm weites Messingröhrchen *r*, das in dem Hartgummistopfen *h* zentrisch zum Rohre *Ko* gelagert ist. Das Rohr *Ko* gleitet im Rohre *R* und ist mittels Zahnstange und Trieb verschiebbar. Die Größe der Verschiebung wird an der in 100 Teile geteilten Trommel *T* (Fig. 1) abgelesen. Durch eine, das Rohr *Ko* frei durchsetzende Sonde *S*

kann r an die Ladebatterie KB angeschlossen und somit dauernd auf ein bestimmtes Potential geladen werden. Beim Hineinschieben influenziert also das geladene Kondensatorröhrchen r auf dem ungeladenen Stifte st eine bestimmte Elektrizitätsmenge, oder bindet, kompensiert eine bereits vorhandene Ladung entgegengesetzten Vorzeichens, weshalb diese Vorrichtung von Wilson „Kompensator" genannt wurde. Gegenüber von st ist der federnd bewegliche Erdleitungsstift e angebracht, der, bis zur Berührung mit dem Träger t hineingedrückt, das Elektrometer (Empfangsplatte, Kondensatorstift und Saite) zur Erde ableitet.

Die in den letzten Jahren gesammelten Erfahrungen und Anregungen führten mich zu weiteren Verbesserungen der Konstruktion des Saitenelektrometers. Eine genaue Beschreibung der neuen Form dieses Instrumentes erscheint demnächst in der Physikalischen Zeitschrift. Hier genügt es, lediglich die für die vorliegende Anwendung wichtigen Konstruktionsänderungen zu erwähnen. Die beiden Schneiden J und A des Elektrometers (Fig. 2) sind nunmehr gemeinsam auf einem Schlitten angeordnet, welcher durch zwei Mikrometerschrauben von außen seitlich verschoben werden kann. In Figur 1 ist nur die rechte Schraube s_r sichtbar. Durch entsprechende Verschiebung der beiden Schneiden relativ zur feststehenden Saite behält diese, auch nach Anlegung der Hilfsladung an die Schneiden, dieselbe Nullstellung bei, wie bei ungeladenen Schneiden. Auf diese Weise wird, bei gleich großen Saitenausschlägen nach links und rechts, die größtmögliche Empfindlichkeit erzielt, wenn die Saite bis nahe an die labile Gleichgewichtslage heran entspannt wird. Eine weitere Empfindlichkeitssteigerung gegenüber der alten Form des Saitenelektrometers konnte durch Verwendung von Zeißscher Optik erzielt werden. Als besonders geeignet hat sich das Achromatobjektiv A von 9 mm freiem Objektabstand in Verbindung mit dem orthoskopischen Okular $f = 9$ mm erwiesen. Das verhältnismäßig weit von der Saite abstehende Objektiv bringt keine bemerkbare Störung des elektrischen Feldes zwischen

den beiden geladenen Schneiden hervor, gibt aber doch mit dem stark vergrößernden Okular (mit Mikrometer) eine genügende, 284 malige Vergrößerung.

Als Hilfsladung haben sich zwei hintereinander geschaltete Krügerbatterien[1]) KB (Fig. 2), deren Verbindungsstelle (Mitte) geerdet ist (Kontakte 00 in Fig. 1), bestens bewährt. Die beiden Batterien sind in dem Holzkasten H, $27 \times 20 \times 9$ cm, untergebracht, der zur Vermeidung von reibungselektrischen Störungen mit einer geerdeten Blechumhüllung versehen ist. Von den Batterien führen, außer den beiden Erdleitungssonden, noch vier Stecksonden durch Löcher im Kastendeckel nach oben. Zwei von den Endklemmen ausgehende Sonden dienen zur Aufladung der Elektrometerschneiden auf $\pm$ 100 Volt, zwei andere zur Ladung des Kompensators auf — 30 Volt oder + 30 Volt, je nachdem bei den noch zu besprechenden Messungen + oder — Potentialgefälle in der Atmosphäre besteht. Der Wechsel der Kompensatorladung geschieht in einfachster Weise durch Umstecken des Zuleitungsdrahtes zum Kompensator (Sonde mit Hartgummigriff) vom Kontakt — 30 Volt nach + 30 Volt. Hierin liegt ein Vorzug der Ladebatterie gegenüber der Wilsonschen Quarz-Leydenerflasche, bei der ein rasches Umladen im Freien recht beschwerlich, wenn nicht mitunter unmöglich ist, und wo zu dem bei jeder Umladung auch eine Änderung der Kompensatoreichkurve eintritt. Das alles fällt bei den Krügerbatterien weg. Ihre E. M. K. wurde oftmals durch ein genau geeichtes Saitenelektrometer in Doppelschaltung geprüft. Sie erhielt sich nunmehr durch zwei Jahre hindurch völlig konstant, so daß die Eichkurve des Kompensators stets die gleiche blieb. Hiemit ist ein weiterer Vorteil bei Verwendung von Batterien statt einer Leydenerflasche verbunden. Die völlig konstante Kompensatorladung macht die bei Wilson notwendige Nachprüfung des Kompensatorpotentiales vor und nach jeder Messung überflüssig.

---

[1]) F. Krüger, Physikal. Zeitschr. 7, 182, 1906.

Bei Nichtgebrauch des Instrumentes werden die Sonden abgezogen und die Löcher im Kasten durch Steckdeckel (Fig. 1) luft- und staubdicht verschlossen.

Der eben beschriebene Apparat wurde vom Phys.-mechan. Institut Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn in mustergültiger Weise ausgeführt. Bei den Vorversuchen und der schließlichen Ausführung dieses Apparates hat sich die genannte Firma durch ihre sachkundige Mitarbeit sehr verdient gemacht.

Eichung des Kompensators.

Das Instrument, das zur Messung kleiner Elektrizitätsmengen dienen soll, muß empirisch geeicht werden. Die Eichung habe ich, etwas abweichend von Wilson, in folgender Weise vorgenommen (siehe Schaltungsanordnung Fig. 3). Auf den Schutzring *Sch* des Elektrometers werden drei, je 10,0 mm hohe Hartgummisäulchen h aufgestellt, die durch Abflammen von jeder etwa anhaftenden elektrischen Ladung vorher befreit worden sind. Diese drei Säulchen tragen eine völlig ebene Aluminiumscheibe *Al* vom Durchmesser des Schutzringes. Durch Abzweigen von einem großen Widerstande W zwischen den Klemmen eines Akkumulators *Ak* kann die Aluminiumscheibe in bekannter Weise auf Potentiale zwischen 0 und 2 Volt aufgeladen werden. Die Klemmspannung des Akkumulators wird durch ein dauernd angeschaltetes Präzisionsvoltmeter auf 1/100 Volt genau abgelesen. Beim Öffnen des Stromschlüssels S wird die Zuleitung zum Akkumulator unterbrochen und gleichzeitig die Aluminiumscheibe geerdet.

Bei der Eichung des Kompensators wird die Aluminiumscheibe auf das Potential $V = +0{,}50$ Volt geladen. Auf der Empfangsplatte P wird hiedurch eine bestimmte und berechenbare negative Elektrizitätsmenge $-Q$ gebunden, eine ebenso große Menge positiver Elektrizität $+Q$ frei. Der von letzterer bewirkte Elektrometerausschlag wird durch Verschiebung des auf -30 Volt geladenen Kompensators rückgängig gemacht, so daß die Saite wieder genau auf 0 einsteht. Jetzt wird durch Öffnen des Schlüssels S die Aluminiumplatte entladen

und die frei gewordene Influenzelektrizität erster Art mittels des Erdleitungsstiftes e (Fig. 2) abgeleitet. Durch wiederholte Ladung der Aluminiumplatte und entsprechendes Vorwärtsschieben des Kompensators erhält man weitere Kompensatoreinstellungen, die zur Bindung der doppelten, dreifachen etc. Elektrizitätsmenge Q notwendig sind. Zu jedem Q, $2\,Q$, $3\,Q$ etc. ergibt sich also je eine Kompensatorablesung, und aus den zusammengehörigen Wertepaaren läßt sich die in Figur 4 gezeichnete Eichkurve entwerfen. Um den Einfluß von Einstellungs- und Ablesefehlern, sowie die Wirkung von etwaigen Unebenheiten der Aluminiumplatte möglichst zu vermindern, habe ich die Eichung des Kompensators stets doppelt durchgeführt, wobei zuerst die eine und dann die andere Seite der Aluminiumscheibe der Empfangsplatte zugewendet war und das Mittel der so erhaltenen je zwei Kompensatorablesungen gebildet. Meist stimmten die zusammengehörigen Werte völlig miteinander überein.

Die auf der Empfangsplatte influenzierte Elektrizitätsmenge Q berechnet sich aus der Formel für den Thomsonschen Schutzringkondensator folgenderweise:

$$Q = \frac{F \cdot V}{4\pi d} \cdot \frac{1}{300}\ E.S.E.$$

wobei:

F = Fläche der Empfangsplatte = 100,0 cm² (s. S. 330),
V = Potential der Aluminiumplatte = 0,50 Volt,
d = Abstand der Al-Platte von der Empfangsplatte = 1,00 cm ist,

also:

$$Q = \frac{100{,}0 \cdot 0{,}50}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 300} = 1{,}33 \cdot 10^{-2}\ E.S.E.$$

Dieser Elektrizitätsmenge von $1{,}33 \cdot 10^{-2}$ $E.S.E.$ entspricht eine Kompensatorverschiebung von 19,0 Ko-Skt. Einer Verschiebung von 0,1 Ko-Skt. entspricht also eine Elektrizitätsmenge von $7{,}0 \cdot 10^{-5}$ $E.S.E.$, und es ist zu überlegen, ob diese kleine Elektrizitätsmenge auch wirklich meßbar ist. Die Empfindlichkeit des Kompensators ist in erster Annäherung

proportional seiner Ladung und der Dicke des Kompensatorstiftes. Man bräuchte daher nur die Ladung recht klein und den Stift recht dünn zu wählen, um selbst bei kleinen Elektrizitätsmengen auf der Empfangsplatte noch große Kompensatorverschiebungen zu erhalten. Dem setzt aber die Empfindlichkeit des Elektrometers bald eine Grenze. Sie bestimmt vor allem die Ablesegenauigkeit und damit die erreichbare Empfindlichkeit des Kompensators. Bei dem erwähnten Saitenelektrometer neuer Konstruktion gibt, bei geeigneter Saitenspannung, 0,001 Volt noch 0,1 Mikrometerteile Ausschlag. Da nun die Kapazität des ganzen Apparates, deren Messung sogleich besprochen wird, $C = 16.0$ cm ist, so beträgt die kleinste noch meßbare Elektrizitätsmenge $= 16{,}0 \cdot \frac{0{,}001}{300} = 5{,}3 \cdot 10^{-5}$ *E. S. E.* Der Kompensator wurde nun so dimensioniert, daß diese kleinste Elektrizitätsmenge von $5{,}3 \cdot 10^{-5}$ *E. S. E.* durch eine Verschiebung des Kompensatorrohres um nicht mehr als 0,1 Skalenteile gebunden wird. Tatsächlich beträgt die angewandte Empfindlichkeit des Kompensators, wie erwähnt, 0,1 Ko-Skt. $= 7{,}0 \cdot 10^{-5}$ *E. S. E.*, sie liegt also noch etwas unter der erreichbaren Grenze. Mit Hilfe der in Figur 3 skizzierten Schaltungsanordnung läßt sich die Empfindlichkeit des Kompensators durch Aufladung der Aluminiumscheibe auf ein entsprechend niederes Potential auch direkt messen. Es ergab sich bei meinem Apparat auch auf diese Weise die eben angegebene Größe.

Für die Form des Kompensatorstiftes ist aber noch ein weiterer Umstand maßgebend. Die durch das Erdfeld auf der Empfangsplatte influenzierte Elektrizitätsmenge ist nicht selten 20mal so groß, als die während 5 Minuten durch den Ionenstrom abgegebene. Um auch diese großen, namentlich im Winter oder bei Bodennebel, bestehenden Oberflächendichten noch messen zu können, ohne die Empfindlichkeit des Kompensators für kleine Elektrizitätsmengen zu vermindern, habe ich das am Träger *t* (Fig. 1) liegende Ende des Kompensatorstiftes *st* dicker gehalten und so ein steiles Ansteigen der Kompensatorkurve

bei Verschiebung über 115 Skalenteile hinaus erreicht (Fig. 4). Zur Auswertung des weitaus größten Teiles aller Messungen reicht das geradlinig verlaufende erste Stück der Eichkurve hin. Nur bei besonders hohen Werten der Oberflächendichte ist der obere Teil der Eichkurve, vom eingezeichneten Punkte ab, zu verwenden, wobei ungefähr dieselbe relative Genauigkeit bei der Auswertung erreicht wird.

Bei der Messung der Gesamtkapazität des Apparates mußte ich etwas anders verfahren als Wilson, um die Kontaktpotentialdifferenz zwischen Aluminiumscheibe *Al* (Fig. 2) und Messingempfangsplatte *P*, die bei der großen Empfindlichkeit des Saitenelektrometers störend wirkte, unschädlich zu machen. Mittels der Schaltungsanordnung (Fig. 3) wird das Elektrometer, nach Entfernung der Aluminiumscheibe, in Volt geeicht. An Stelle des einfachen Stromschlüssels *S* wird jetzt zweckmäßiger ein Kommutator verwendet, um Saitenausschläge nach links und rechts zu erhalten. Nach dieser Eichung wird die Aluminiumplatte wieder auf ihre Hartgummisäulchen gelegt und auf ein bestimmtes Potential V aufgeladen. Durch Einwärtsschieben des Kompensators, dessen Skala für diese Messung nicht geeicht zu sein braucht, wird die Influenzelektrizität II. Art gebunden. Nun wird die Aluminiumscheibe abgehoben, dafür der Deckel über die Empfangsplatte gestülpt und die nun frei gewordene Influenzelektrizität I. Art durch Einwärtsdrücken des Erdleitungsstiftes e (Fig. 2) abgeleitet. Zieht man nunmehr den Kompensator wieder ganz aus, so bewirkt die jetzt freiwerdende Influenzelektrizität II. Art von der Menge Q *E. S. E.* einen Saitenausschlag, dessen Voltwert v der zu zeichnenden Volt-Eichkurve entnommen wird. Aus V und v in Volt berechnet sich die Kapazität C zu:

$$C = \frac{Q}{v} \cdot 300$$

$$= \frac{F \cdot V}{4\pi d \cdot v} \text{ cm},$$

wobei für F und d die Seite 334 angegebenen Werte einzusetzen sind. Für den vorbeschriebenen Apparat ist, bei völlig ausgezogenem Kompensator, die Gesamtkapazität $C = 16{,}0$ cm.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, die eben angeführten Konstanten denen des Wilsonschen Apparates gegenüberzustellen. C. T. R. Wilson [1]) gibt für seinen zweiten, verbesserten Apparat folgende Werte an:

Empfindlichkeit des Goldblattelektrometers

2 Okul. T. = 1 Volt, also 0,1 Ok. T. = 0,05 Volt = v.

Kapazität des Apparates $C = 15{,}2$ cm, also kleinste meßbare Elektrizitätsmenge

$$q = C \cdot v = 15.2 \cdot \frac{0{,}05}{300} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\, E.S.E.$$

Oberfläche der Empfangsplatte $F = 41{,}3$ cm², also kleinste meßbare Elektrizitätsmenge pro cm² der Empfangsplatte

$$q_0 = \frac{q}{F} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-3}}{41{,}3} = 6{,}0 \cdot 10^{-5}\, \frac{E.S.E.}{\text{cm}^2}.$$

Bei dem oben beschriebenen Apparat sind die entsprechenden Größen

$v = 0{,}001$ Volt, Empfindlichkeit des Saitenelektrometers.
$C = 16{,}0$ cm, Gesamtkapazität.
$q = 7{,}0 \cdot 10^{-5}\, E.S.E.$, kleinste, meßbare Elektrizitätsmenge.
$F = 100{,}0$ cm², Oberfläche der Empfangsplatte.
$q_0 = 7{,}0 \cdot 10^{-7}\, \frac{E.S.E.}{\text{cm}^2}$, kleinste Elektrizitätsmenge pro cm² der Empfangsplatte.

Mit diesem Apparat läßt sich also eine pro cm² einwandernde, oder dort influenzierte Elektrizitätsmenge feststellen, die fast 100 mal kleiner ist als die vom Wilsonschen Instrumente noch meßbare. Diese große Empfindlichkeit des Elektrometers ist auch für die hier angeführten Messungen keineswegs über-

[1]) C. T. R. Wilson, Proc. of the Roy. Soc. A Vol. 80, 539, 1908.

flüssig. Waren doch bei meinen Beobachtungen im Jahre 1909 nicht selten Elektrizitätsmengen von $2 \cdot 10^{-5} \frac{E.S.E.}{cm^2}$ zu messen, und einigemale traten sogar noch kleinere Ladungen der Empfangsplatte durch den Ionenstrom bei 5 min Expositionszeit auf. Aber selbst diese kleinen Ladungsmengen, die weit unter dem Jahresmittel von $1{,}36 \cdot 10^{-4} \frac{E.S.E.}{cm^2}$ liegen, lassen sich also noch mit hinreichender Genauigkeit (ca. 3%) messen.

Hierin dürfte sich deutlich die große Überlegenheit des Saitenelektrometers neuer Form, selbst über das so empfindliche Wilsonsche Einblattelektrometer aussprechen, wobei noch als weiterer Vorzug hinzukommt, daß der äußerst dünnen und elastischen Saite all die bekannten Mängel des Blättchens nicht anhaften. So wird das Saitenelektrometer, gerade in Verbindung mit dem Wilsonschen Kompensator, der sich zur direkten Messung kleiner Elektrizitätsmengen ausgezeichnet bewährt hat, auch zu mancherlei anderen elektrostatischen Untersuchungen mit Vorteil verwendet werden können. Hiebei kommt noch in Betracht, daß die Wilsonsche Methode eine Nullmethode ist, und daß daher kleinere Mängel der Isolation der mit dem Elektrometer verbundenen Apparatteile keine beträchtlichen Fehler bewirken. Für die Isolatoren des Elektrometers selbst wird ausschließlich der vorzüglich isolierende echte Bernstein verwendet.

Handhabung des Apparates.

Bei den nachstehend angeführten Messungen wurde stets in folgender Weise verfahren. Der Apparat wurde im Garten der Sternwarte ca. 16 m westlich von dem S. 306 erwähnten Stationsgebäude auf einer Holzbank von solcher Höhe aufgestellt, daß sich das Ablesemikroskop gerade in Augenhöhe befand. Die Ebene des Schutzringes und der Empfangsplatte lag dann 183 cm über dem Boden. In nächster Umgebung des Apparates befanden sich Bäume, so daß das Erdfeld am Orte der Beobachtungen keineswegs ungestört war, ein Um-

stand, der bei der Reduktion der Messungen wohl zu berücksichtigen ist. Die Entfernung des Instrumentes vom Poloniumkollektor des selbstregistrierenden Benndorfschen Elektrometers betrug 21 m. Zudem lag zwischen dem an der Ostwand angebrachten Kollektor und dem Beobachtungsplatze im Westen das Stationsgebäude, so daß eine Beeinflussung der Ionenstrommessungen durch ionisierte Luft aus der Umgebung des Kollektors nicht zu befürchten war.

Bestand zwischen dem Aufbewahrungsorte des Apparates, dem geheizten Arbeitszimmer, und der freien Atmosphäre eine erhebliche Temperaturdifferenz, so wurde das Instrument mindestens $^1/_4$ Stunde vor Beginn der Messungen ins Freie getragen, damit alle seine Teile die Temperatur der umgebenden Luft annehmen konnten. Es zeigte sich nämlich im Winter, daß, unmittelbar nach dem Verbringen des Apparates in die kalte Außenluft, das anfangs scharf eingestellte Saitenbild völlig unscharf wurde, nach kurzer Zeit aber seine ursprüngliche Schärfe wieder erlangte. Dies rührt von der verschiedenen Wärmekapazität der Saite mit Empfangsplatte und des von ihr durch Bernstein isolierten Elektrometergehäuses her, weshalb der Wärmeausgleich dieser Teile mit der Umgebung nicht gleich schnell vor sich geht. Erst wenn Saite und Gehäuse dieselbe Temperatur angenommen haben, wirkt die sorgfältig geprüfte Temperaturkompensation in richtiger Weise, was durch wiederholte Versuche bestätigt werden konnte.

Die Messungen selbst werden am besten in folgender von C. T. R. Wilson eingeführten Reihenfolge vorgenommen:

1. Das Elektrometergehäuse wird an die Erdleitung angelegt, Elektrometer und Empfangsplatte mittels des Erdungsstiftes geerdet.

2. Zu Beginn einer ganzen Minute wird der Elektrometerdeckel abgehoben. Bei normalem elektrischen Erdfelde wird auf der Empfangsplatte eine bestimmte — Elektrizitätsmenge $-Q$ durch Influenz gebunden, eine ebensogroße + Elektrizitätsmenge $+Q$ frei. Letztere bewirkt einen Ausschlag der

Saite, der durch entsprechende Verschiebung des — geladenen Kompensators auf 0 zurückgebracht wird. Die Ablesung an der Kompensatortrommel wird notiert und ergibt mit Hilfe der Eichkurve (Fig. 4) die Gesamtoberflächenladung der Empfangsplatte.

3. Das Elektrometer wird 5 min sich selbst überlassen. Die Saitenausschläge, die während dieser Zeit durch Veränderungen des Potentialgefälles und durch die Ladungsabgabe der einwandernden + Ionen entstehen, werden durch entsprechende Verschiebungen des Kompensators fortwährend rückgängig gemacht, so daß dauernd die Saite in ihrer Nullstellung und damit die Empfangsplatte auf dem Potentiale 0 (Potential der Erdoberfläche) erhalten bleibt.

4. Nach Ablauf der 5 min wird der Elektrometerdeckel wieder aufgesetzt, und der Kompensator völlig ausgezogen. Die durch Influenz getrennten Elektrizitätsmengen vereinigen sich jetzt wieder, und es bleibt im Elektrometer lediglich die von den + Ionen an die Empfangsplatte übertragene + Ladung zurück. Der hiedurch verbleibende Saitenausschlag wird durch neuerliche Verschiebung des Kompensators wieder auf 0 zurückgeführt und die Kompensatorablesung notiert. Aus der Eichkurve läßt sich jetzt die Elektrizitätsmenge q in $E. S. E.$ entnehmen, welche in 5 min in Form von Ionenladungen an die Empfangsplatte abgegeben wurde.

5. Der Kompensator wird wieder ganz ausgezogen, das Elektrometer geerdet und die Messung 2 wiederholt.

Die Berechnung der Beobachtungen ist eine sehr einfache. Die aus Messung 2 und 5 erhaltenen Ladungen der Empfangsplatte werden zu einem Mittelwert vereinigt. Durch Division mit der Oberfläche der Empfangsplatte $F = 100{,}0 \text{ cm}^2$ ergibt sich die elektrische Oberflächendichte σ in $\frac{E.S.E.}{\text{cm}^2}$.

Aus Messung 3 berechnet sich der Ionenstrom i_+ in $\frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$ folgenderweise:

F = Oberfläche der Empfangsplatte = 100,0 cm².
t = Expositionszeit in min = 5 min.
q = eingewanderte + Elektrizitätsmenge während 5 min in *E. S. E.*
1 Amp. = $3 \cdot 10^9$ *E. S. E.*

$$i = \frac{q}{F \cdot t} \cdot \frac{1}{60 \cdot 3 \cdot 10^9} \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2},$$

$$i = \frac{q}{100 \cdot 5 \cdot 60 \cdot 3 \cdot 10^9} \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}.$$

Aus der Oberflächendichte σ kann das Potentialgefälle $\frac{dV}{dh}$, das unmittelbar über der Empfangsplatte herrschte, berechnet werden. Es gilt hier die Coulombsche Beziehung

$$\frac{dV}{dh} = -4\pi\sigma.$$

Wird das Potentialgefälle, wie üblich, in $\frac{\text{Volt}}{\text{m}}$, die Dichte in $\frac{E.S.E.}{\text{cm}^2}$ ausgedrückt, so ist, da 1 *E. S. E.* = 300 Volt

$$\frac{dV}{dh} = -300 \cdot 100 \cdot 4\pi\sigma \frac{\text{Volt}}{\text{m}}.$$

Zwischen Ionenstrom i_+ und Potentialgefälle $\frac{dV}{dh}$ besteht die Beziehung

$$i_+ = \lambda_+ \cdot \frac{dV}{dh}$$

und hieraus berechnet sich, wie S. 342 noch näher erörtert wird, die polare positive Leitfähigkeit λ_+

$$\lambda_+ = \frac{i_+}{\frac{dV}{dh}}.$$

Um die Leitfähigkeit λ_+ in *E. S. E.* zu erhalten, ist i_+ jetzt in $\frac{E.S.E.}{\text{cm}^2}$ und ebenso $\frac{dV}{dh}$ in $\frac{E.S.E.}{\text{cm}}$ auszudrücken. Ersterer Wert berechnet sich aus der Messung 3 zu

$$i_+ = \frac{q}{F \cdot t} \cdot \frac{1}{60} \frac{E.S.E.}{\text{cm}^2 \sec}$$

und

$$\frac{dV}{dh} = -4\pi\sigma \frac{E.S.E.}{\text{cm}},$$

also

$$\lambda_+ = \frac{q}{F \cdot t \cdot \sigma} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot 60} E.S.E.$$

Mit dem Wilsonschen Apparate lassen sich also vier der wichtigsten luftelektrischen Elemente, nämlich die Oberflächendichte σ, das Potentialgefälle $\frac{dV}{dh}$, der vertikale positive Leitungsstrom i_+ und die polare positive Leitfähigkeit λ_+ in absolutem Maße bestimmen. Die Zeitdauer einer vollständigen Messung beträgt ca. 7 min.

Die so gewonnenen Zahlen für i_+ und λ_+ sind aber nicht ohne weiteres vergleichbar mit den Werten, die nach anderen Methoden, etwa der Ebert-Macheschen, der Gerdienschen oder Scheringschen Methode der Leitfähigkeitsmessung erhalten wurden. Eine solch direkte Vergleichung, wie sie bisher stets vorgenommen wurde, ist meines Erachtens unrichtig und zwar aus folgenden Gründen. Nach der Ionentheorie setzt sich das Gesamtleitvermögen der Luft λ aus zwei Summanden λ_+ und λ_- zusammen. $\lambda_+ = \varepsilon \cdot v_+ \cdot n_+$ ist die Leitfähigkeit für die positiven Ionen, also das polare positive Leitvermögen, $\lambda_- = \varepsilon \cdot v_- \cdot n_-$ ist die Leitfähigkeit für die negativen Ionen, das polare negative Leitvermögen. Die Gesamtleitfähigkeit λ ist also

$$\lambda = \lambda_+ + \lambda_- = \varepsilon(v_+ n_+ + v_- n_-).$$

Bei den erwähnten drei Methoden werden die polaren Leitfähigkeiten λ_+ und λ_- gesondert bestimmt und durch Summation das Gesamtleitvermögen λ ermittelt. Bei der Wilsonschen Methode liegen nun die Verhältnisse ganz anders. Hier wird nicht die Leitfähigkeit, sondern der Leitungsstrom direkt gemessen. Unter der Wirkung des normalen elektrischen Erdfeldes wandern + Ionen zur Erde, — Ionen nach oben, bis

sie von Staubkernen oder Kondensationsprodukten absorbiert werden. Lediglich die abwärts wandernden + Ionen gelangen zur Empfangsplatte des Wilsonschen Apparates. Es wird also nur die eine Komponente i_+ des vertikalen Leitungsstromes gemessen, während der Gesamtleitungsstrom $i = i_+ + i_-$ ist. Der aus i_+ berechnete Wert für die Leitfähigkeit gibt demnach nur den Anteil der + Ionen am Gesamtleitvermögen, also das polare positive Leitvermögen λ_+. Es ist, wie S. 341 angegeben $\lambda_+ = \frac{i_+}{\frac{dV}{dh}}$. Da nun in erster Annäherung für die erdnahen Luftschichten $\lambda_+ = \lambda_-$ ist[1]), so sind die nach Wilson erhaltenen Werte für die Leitfähigkeit (λ_+) und für den Ionenstrom (i_+) zu verdoppeln, um sie mit den nach anderen Methoden erhaltenen Werten (λ) vergleichbar zu machen.

Weiter ist der Einfluß zu berücksichtigen, den die Aufstellungsweise des Apparates auf die Meßergebnisse ausübt. Bei der Aspirationsmethode wurde zumeist der Apparat in richtiger Weise an Orten aufgestellt, die vor dem Erdfelde geschützt waren und doch der freien Luft allseitigen Zutritt ermöglichten. Beim Wilsonschen Apparate wäre die ideale Aufstellung die, bei welcher Instrument und Beobachter derart in einer Grube, mitten im freien ebenen Gelände versenkt wären, so daß nur die Empfangsplatte mit ihrem Schutzringe in der Höhe der Erdoberfläche läge. Eine solche Aufstellungsart wird sich aber nur in den wenigsten Fällen verwirklichen lassen. Wird der Wilsonsche Apparat an einem beliebigen Ort, möglichst bequem aufgestellt, wie dies auch bei den vorliegenden Messungen geschehen ist, so sind die dort erhaltenen Werte für σ und i_+ auf die freie Ebene zu reduzieren. Falls der Beobachtungsplatz ohnehin schon eine möglichst große ebene Fläche bildet, kann man sich der von C. T. R. Wilson[2])

---

[1]) H. Gerdien, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl. S. 85, 1907. — H. Ebert und K. Kurz, Abhandlung d. K. Bayer. Akad. d. Wiss., math.-phys. Kl. 25, 2 Abh., S. 54, 1909.

[2]) C. T. R. Wilson, Proc. of the Roy. Soc. (A) **80**, 543, 1908.

angegebenen Methode bedienen. Bei jeder anderen Gestalt des Beobachtungsortes werden Simultanmessungen des Potentialgefälles durch einen zweiten Beobachter in der S. 311 beschriebenen Weise notwendig. Bei meinen Messungen wurde die Reduktionskonstante so ermittelt, daß die nach Wilson gemessenen Werte des Potentialgradienten mit den gleichzeitig vom Benndorfschen Apparat aufgezeichneten Gefällswerten verglichen wurden. welch letztere ja bereits auf die Ebene reduziert sind. Die Gegenüberstellung der nach ganz verschiedenen Methoden zu gleichen Zeiten gefundenen Werte für das Potentialgefälle ergab einen vollkommenen Parallelismus. Als Mittel aus 300 Vergleichungen ergab sich für den nach Wilson gemessenen Potentialgradienten der Reduktionsfaktor 0,60. d. h. die 182 cm über dem Boden im Garten gemessenen Potentialgefälle sind mit 0,60 zu multiplizieren, um die gleichzeitig über der freien Ebene bestehenden Gefällswerte zu erhalten. Macht man nun die, bei einigermaßen günstigem Wetter sicher zutreffende Annahme, daß die Leitfähigkeit der Luft im Garten dieselbe ist, wie über dem benachbarten freien Felde, so sind nach der Beziehung $i_+ = \lambda_+ \cdot \frac{dV}{dh}$ auch die Zahlen für den Ionenstrom i_+ mit 0,60 zu multiplizieren, um sie auf die Ebene zu reduzieren. Erst die so reduzierten Werte von i_+ sind mit jenen vergleichbar, die mit dem Wilsonschen Apparate von anderen Beobachtern und anderen Orten gefunden wurden, und die nach dem Vorgange von Wilson ebenfalls auf die Ebene reduziert sind. Alle reduzierten Werte i_+ und λ_+ sind weiter, wie oben ausgeführt, noch mit zwei zu multiplizieren, um sie mit jenen Absolutwerten vergleichbar zu machen, die nach den anderen Methoden erhalten wurden.

II. Messungsergebnisse.

Die Messungen der elektrischen Oberflächendichte σ und des vertikalen Leitungsstromes i_+ erstrecken sich über ein Jahr, von Januar bis Dezember 1909. Sie wurden täglich in der Zeit zwischen $^1/_2 12^h$ und 12^h mittags angestellt, wenn

nicht gerade zu dieser Zeit Niederschläge fielen. Im Ganzen konnte an 175 Tagen beobachtet werden. Zumeist wurden für σ und i_+ unmittelbar hintereinander zwei Messungen in der Seite 339 beschriebenen Weise angestellt und das Mittel der so gewonnenen Werte gebildet. Zur Kontrolle wurde wöchentlich einmal der Kompensator nachgeeicht und die E. M. K. der Krügerbatterien gemessen. Das Ergebnis war stets befriedigend. Ebenso zeigten die Isolatoren des Elektrometers und des Kompensators. die anfangs täglich geprüft wurden, ein dauernd vorzügliches Isolationsvermögen, trotz des starken Temperaturwechsels dem das Instrument bei den Winterbeobachtungen täglich unterworfen war.

Da mit der hiesigen Sternwarte eine meteorologische Station II. Ordnung verbunden ist, konnten unmittelbar nach den luftelektrischen Messungen auch die meteorologischen Daten bestimmt werden.

1. Absolutwerte.

In Tabelle 1 sind die Monatsmittel der luftelektrischen Elemente σ, i_+, $\frac{dV}{dh}$ und λ_+ aus allen 175 Beobachtungstagen eingetragen, wie sie sich aus meinen Messungen durch Mittelbildung ergaben. Diese und die Werte der folgenden Tabellen 1—11 sind also nicht auf die Ebene reduziert.

In Tabelle 2 habe ich, entsprechend dem beim Potentialgefälle eingeschlagenen Verfahren (s. S. 314) die Monatsmittel nur aus den normalen (heiteren) Tagen berechnet. Reduziert man diese Werte auf die Ebene, so ergeben sich als Mittelwerte für das Beobachtungsjahr 1909 folgende Zahlen

Gesamtleitungsstrom

$$i = 2 \cdot 0{,}6\, i_+ = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}70 \cdot 10^{-16} = 2{,}04 \cdot 10^{-16} \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2},$$

Gesamtleitfähigkeit

$$\lambda = 2 \cdot \lambda_+ = 2 \cdot 4{,}88 \cdot 10^{-5} = 0{,}976 \cdot 10^{-4}\, E.S.E.,$$

$$\text{Potentialgefälle (Ebene)}\ \frac{dV}{dh} = 0{,}6 \cdot 314 = 188 \frac{\text{Volt}}{\text{m}}.$$

Tabelle 1.

Monatsmittel aus allen Tagen.

	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Septemb.	Oktober	Novemb.	Dezemb.	Jahresmittel
$\sigma \frac{E.S.E.}{cm^2} \cdot 10^{-4}$	12,79	**13,62**	10,71	5,77	4,16	**3,98**	7,24	6,87	6,13	6,78	10,66	10,90	8,30
$i_+ \frac{Amp.}{cm^2} \cdot 10^{-16}$	2,07	**2,18**	1,46	1,18	1,44	1,07	**0,95**	1,42	1,61	1,29	1,30	2,12	1,51
$\frac{dV}{dh} \frac{Volt}{m}$	482	**514**	404	216	157	**150**	273	259	231	256	402	411	313
$\lambda_+ E.S.E. \cdot 10^{-5}$	3,87	3,82	3,26	4,89	**8,27**	6,42	3,14	4,94	6,29	4,54	**2,92**	4,65	4,34
Beobacht.-Tage	10	7	16	19	18	16	15	21	6	17	17	13	175

Tabelle 2.

Monatsmittel aus den normalen (heiteren) Tagen.

	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Septemb.	Oktober	Novemb.	Dezemb.	Jahresmittel
$\sigma \frac{E.S.E.}{cm^2} \cdot 10^{-4}$	**13,09**	10,93	11,64	4,99	4,10	**3,97**	7,04	6,84	6,98	5,35	12,83	12,16	8,33
$i_+ \frac{Amp.}{cm^2} \cdot 10^{-16}$	**2,71**	2,18	1,73	1,47	1,51	1,15	**1,10**	1,49	2,02	1,31	1,60	2,17	1,70
$\frac{dV}{dh} \frac{Volt}{m}$	**493**	412	439	188	154	**150**	265	257	263	202	484	458	314
$\lambda_+ E.S.E. \cdot 10^{-5}$	4,95	4,76	3,55	7,05	**8,83**	6,92	3,74	5,21	6,92	5,85	**2,98**	4,26	4,88
Beobacht.-Tage	7	2	9	12	11	6	6	12	3	8	5	6	97

In Tabelle 3 sind die Münchner Werte mit den an anderen Orten erhaltenen zusammengestellt. Hierin sind die von C. T. R. Wilson, Carse und Mac Owan, sowie Simpson beobachteten Werte für i und λ entsprechend den Ausführungen S. 344 verdoppelt. Sie wurden von den genannten Beobachtern bereits selbst auf die Ebene reduziert.

Noch vor alle anderen Methoden zur Messung der Leitfähigkeit und des Ionenstromes ausgearbeitet waren, hat H. Ebert[1]) den vertikalen Leitungsstrom galvanometrisch gemessen und zu $2{,}2 \cdot 10^{-16} \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$ gefunden. Auch dieser Wert ist nur die + Komponente des Gesamtstromes und ist nicht auf die Ebene reduziert. Es scheint aber, daß sich bei der Ebertschen Meßanordnung die Seite 344 erwähnten Korrektionen in ihrer Wirkung auf den Absolutwert so ziemlich gegenseitig aufhoben, und daß der Wert $2{,}2 \cdot 10^{-16} \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$ den Betrag des Gesamtleitungsstromes in der Nähe Münchens richtig darstellt, in guter Übereinstimmung mit dem von mir gefundenen Mittelwert $2{,}0 \cdot 10^{-16} \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$.

Während also die übrigen luftelektrischen Elemente eine so große Veränderlichkeit mit Zeit und Ort aufweisen, daß man daran zweifeln könnte, bei ihnen auf einfache Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten zu stoßen, treffen wir im vertikalen Leitungsstrom ein Element von auffallender Konstanz an. Wie später gezeigt werden wird, ist besonders die Leitfähigkeit durch meteorologische Bedingungen, ferner durch Staub, Rauch und allerlei Zufälligkeiten beeinflußbar. Nahezu spiegelbildlich hiezu verlaufen die Variationen des Potentialgefälles. Der durch das Produkt beider bestimmte „normale vertikale Ionen-Leitungsstrom“ zeigt dagegen Schwankungen von viel geringeren Beträgen. Und zwar bezieht sich diese geringere Veränderlichkeit sowohl auf die zeitlichen Variationen am selben Beobachtungsorte, als namentlich auch

[1]) H. Ebert, Physikal. Zeitschr. 3, 338, 1901/2.

Tabelle 3.

Beobachter	Ort, Zeit	$i \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$	λ *E. S. E.*	$\frac{dV}{dh} \frac{\text{Volt}}{\text{m}}$	Methode
Gerdien[1] . .	Göttingen 1906	$2{,}66 \cdot 10^{-16}$	$2{,}27 \cdot 10^{-4}$	106	Gerdien
Wilson[2] . .	Peebles (Schottland) 1906/7	$2{,}24 \times 2 = 4{,}48 \cdot 10^{-16}$	$1{,}07 \times 2 = 2{,}14 \cdot 10^{-4}$	187	Wilson
Angenheister[3]	Samoa 1907/8	$2{,}14 \cdot 10^{-16}$	$5{,}0 \cdot 10^{-4}$	39	Gerdien
Simpson[4] . .	Simla (Indien) 1909	$1{,}8 \times 2 = 3{,}6 \cdot 10^{-16}$	$5{,}8 \times 2 = 11{,}6 \cdot 10^{-4}$	29	Simpson
Lutz	München 1909	$2{,}04 \cdot 10^{-16}$	$0{,}98 \cdot 10^{-4}$	188	Wilson
Kähler[5] . . .	Potsdam 1909/10	$2{,}2 \cdot 10^{-16}$	$0{,}84 \cdot 10^{-4}$	260	Schering
Carse und Mac Owan[6]	Edinburgh 1909	$1{,}43 \times 2 = 2{,}86 \cdot 10^{-16}$	$0{,}36 \times 2 = 0{,}72 \cdot 10^{-4}$	357	Wilson
Ansel[3] . . .	Island 1910	$3{,}0 \cdot 10^{-16}$	$3{,}0 \cdot 10^{-4}$	90	Gerdien

[1] H. Gerdien, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl. 1907, S. 84.
[2] C. T. R. Wilson, Proc. of the Roy. Soc. (A) **80**, 546, 1908.
[3] G. Angenheister, Abh. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl, Neue Folge **9**, Nr. 2, S. 20, 1911.
[4] G. C. Simpson, Phil. Mag. **19**, 723, 1910.
[5] K. Kähler, Veröff. d. K. Preuß. Meteorol. Instit., Nr. 223, S. XXX, 1910.
[6] G. A. Carse und D. Mac. Owan, Proc. of the Roy. Soc. of Edinburgh **30**, 460, 1909/10.

auf die Lokalvariationen. Auch sei hier daran erinnert, daß Ballonbeobachtungen auch auf eine große Konstanz in der Vertikalerstreckung des Stromes hindeuten[1]).

Die Tatsache, daß der vertikale Ionenstrom an so verschiedenartig und sogar in verschiedenen Zonen gelegenen Beobachtungsorten unter normalen Witterungsbedingungen doch nahezu dieselbe Intensität aufweist, macht wahrscheinlich, daß er allgemeinen geophysikalischen Bedingungen sein Entstehen verdankt, und daß gerade seine Verfolgung ein lohnendes Problem für ein weitausgedehntes Beobachtungsnetz, z. B. des geplanten der internationalen Assoziation der Akademien bilden würde, namentlich auch mit Rücksicht auf den möglichen Zusammenhang solcher elektrischer Ströme mit gewissen Variationen der erdmagnetischen Elemente. Faßt man alle Werte der Tabelle 3 zu einem Mittelwerte zusammen, so findet man die Intensität des gesamten Vertikalstromes zu $i = 2{,}87 \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$. Dies entspricht einem Einwandern von $\left(1{,}43 \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2} =\right)$ 15,5 elektrostatischen positiven Mengeneinheiten pro m^2 und Stunde. Diese stetige Zuführung + Elektrizität müßte ein Ansteigen der absoluten Ladungshöhe des Erdkörpers bewirken. Alles deutet aber darauf hin, daß wir einen stationären Strömungszustand in dem System Luftmeer-Erde vor uns haben. Alsdann müssen aber dauernd Kompensationsvorgänge tätig sein, welche die in den Erdboden eingewanderte + Elektrizität durch die entsprechende — Elektrizität zu neutralisieren, oder mit anderen Worten + Elektrizität im Überschusse wieder in die Atmosphäre zurückzuführen im stande sind.

Ohne an dieser Stelle, an der zunächst nur Beobachtungstatsachen mitgeteilt werden sollen, näher auf diese wichtige Frage, die augenscheinlich an das Hauptproblem der luftelektrischen Forschung überhaupt rührt, einzugehen, sei in ihrem Zusammenhange nur folgendes erwähnt:

---

[1]) H. Gerdien, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl., Heft 5, 1905.

a) die Messungen des Ionenstromes beziehen sich bei mir nur auf die Mittagsstunden, bei anderen Beobachtern zumeist auch nur auf einzelne Tagesstunden. Außerdem wurden durchwegs nur heitere, wenig bewölkte Tage mit positivem Potentialgefälle zur Mittelbildung mit herangezogen. Sicherlich aber stehen dem gegen den Erdboden gerichteten normalen positiven Leitungsstrome zu anderen Stunden oder bei anderer Wetterlage Ströme entgegengesetzter Richtung gegenüber, welche zur Aufrechterhaltung des stationären Zustandes mitwirken. In der Tat konnte ich bei negativem Gefälle einen entgegengesetzt verlaufenden Leitungsstrom von gleicher Größenordnung feststellen. Zu diesem Zwecke habe ich oftmals, wenn das selbstregistrierende Elektrometer negative Werte aufzuzeichnen begann, sogleich auch Messungen nach der Wilsonschen Methode vorgenommen. Freilich wurde diese Absicht nur zu oft durch die bald einsetzenden Niederschläge vereitelt. Trotzdem konnte an fünf Tagen mit Sicherheit festgestellt werden, daß bei negativem Potentialgefälle auch der Leitungsstrom seine Richtung umkehrt, und daß sich auch hier, je nach der Größe des eben bestehenden — Potentialgefälles und der Leitfähigkeit ähnliche Absolutwerte einstellten, wie bei normalem Gefälle.

Eine besonders interessante Beobachtung konnte ich am 24. September 1909 zwischen 4^h und 5^h p. m. machen. Zu dieser Zeit zog im unmittelbaren Alpenvorlande ein Gewitter mit heftigem Regen von W nach E. Der Donner war deutlich hörbar. Die Bewölkung am Südhimmel reichte höchstens 40^0 über den Horizont herauf. Der ganze übrige Teil des Himmels, also auch das Zenith war völlig wolklos. Trotzdem herrschte anfangs — Potentialgefälle und — Ionenstrom. Von 4^{07} bis 4^{12} p. m. wurde gemessen:

$$\frac{dV}{dh} = -222 \frac{\text{Volt}}{\text{m}} \text{ (auf die Ebene reduziert),}$$

$$i_- = 0{,}84 \cdot 10^{-16} \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2} \left(\text{Gesamtstrom } i = 1{,}68 \cdot 10^{-16} \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}\right),$$

$$\lambda_- = 3{,}41 \cdot 10^{-5} E.S.E. (\text{Gesamtleitfähigkeit } \lambda = 0.68 \cdot 10^{-4} E.S.E.)$$

Als bald darauf das Gewitter ungefähr die Höhe des Beobachtungsortes erreicht hatte, zeigte das Saitenelektrometer bei jedem Blitze einen plötzlichen bald +, bald — Ausschlag, der in ca. $^1/_4$ min wieder auf 0 zurückging. Unter der Wirkung des fortwährend von + nach — wechselnden Potentialgefälles fand keine Einwanderung von Ionen in die Empfangsplatte statt. Der vertikale Leitungsstrom blieb etwa $^1/_2$ Stunde lang 0, bis das Gewitter abgezogen war, trotzdem der Himmel über dem Beobachtungsorte dauernd unbedeckt blieb. Nach dem Gewitter wurden wieder normale Werte gefunden.

b) Die in der Tabelle 3, Seite 348, aufgeführten Beobachtungsorte sind ausgesprochene Landstationen. Bei ihnen kann + Elektrizität im Überschusse dem Luftmeere zugeführt, und dadurch der vertikale Ionenstrom wenigstens teilweise kompensiert werden. In diesem Sinne wirkt die, namentlich durch Luftdruckschwankungen, Bodenerwärmungen und Windstau unterstützte „Bodenatmung", die infolge der Diaphragmenwirkung der oberflächlichen Bodenschichten nach H. Ebert solche + Ladungen aus dem ionisierenden Erdreiche austreten läßt und — Elektrizität im Boden durch Adsorption zurückhält. Über die Größenordnung dieses Effektes geben die Versuche H. Eberts und K. Kurz[1]) Aufschluß. Hienach beträgt der im Boden zurückgehaltene Betrag an freier negativer Elektrizität (= austretender Überschuß an positiver Elektrizität) je nach der Beschaffenheit der obersten Bodenschichten 1 bis 2,5 *E. S. E.* pro m² und Stunde. Dieser Wert kann nach neueren und noch unveröffentlichten Versuchen H. Eberts unter Umständen auf 5 bis 6 *E. S. E.* pro m² und Stunde ansteigen, so daß also etwa $^1/_3$ der im Vertikalstrom einwandernden + Elektrizität, die im Mittel zu 15,5 *E. S. E.* pro m² und Stunde berechnet wurde, allein durch die Wirkung der Bodenatmung kompensiert wird. Zur Deckung des Restes müssen allerdings, außer dem erwähnten und nur zeitweise nach der Erdoberfläche hingerichteten — Ionenstrom noch andere Faktoren tätig sein.

[1]) H. Ebert und K. Kurz. Phys. Z. 11, 398, 1910.

Auf dem Meere könnte die gesuchte Ionenproduktion durch Zerspritzen des See-(Salz-)Wassers bedingt sein, das nach Ph. Lenard dabei selbst negativ geladen zurückfällt und in die Luft positiv geladene Träger entsendet. Die positiven Ionen müßten dann durch Konvektionsströme der Luft nach oben hin entführt werden, wobei sich bei der dauernden Durchmischung der „Troposphäre" (untere Schicht bis zur oberen Inversion) schließlich ein angenähert stationärer Zustand herausbildet. Jedenfalls wäre, wie man sieht, die gleichzeitige Messung, oder besser noch eine fortlaufende Registrierung der Intensität des vertikalen Leitungsstromes an den verschiedensten Erdorten von größter Wichtigkeit.

2. Jährlicher Gang der luftelektrischen Elemente i_+, $\frac{dV}{dh}$ und λ_+.

Das Beobachtungsmaterial ist wohl zu spärlich, um daraus den jährlichen Gang der drei luftelektrischen Elemente i_+, $\frac{dV}{dh}$ und λ_+ deutlich hervortreten zu lassen (Tabellen 1 u. 2). Es scheint aber, daß der jährliche Gang des vertikalen Leitungsstromes i_+ im allgemeinen den des Potentialgefälles $\frac{dV}{dh}$ parallel geht, mit einem Maximum im Winter (Januar) und einem Minimum im Sommer (Juli). Doch sind die Abweichungen der Extremwerte voneinander beim Ionenstrom viel kleiner als beim Potentialgefälle (s. Tabelle 2). Es wirkt nämlich neben dem Potentialgefälle namentlich noch die Leitfähigkeit auf den vertikalen Leitungsstrom ein und zwar in entgegengesetztem Sinne, also ausgleichend. Aus Tabelle 2 ergibt sich nämlich, daß die Leitfähigkeit im allgemeinen gerade den entgegengesetzten jährlichen Verlauf nimmt als das Gefälle. Auf die Bedeutung des Hauptmaximums im Mai wurde bereits Seite 321 hingewiesen.

3. Einfluß meteorologischer Faktoren auf die luftelektrischen Elemente i_+, $\frac{dV}{dh}$ und λ_+.

Von größtem Einfluß auf die Leitfähigkeit und damit auch auf den Ionenstrom ist die Reinheit der Luft von Staub und nebeliger Trübung. Dies zeigt deutlich die Tabelle 4, in welcher das Beobachtungsmaterial nach dem Grade der Durchsichtigkeit der Luft geordnet ist. Recht deutlich tritt hierin auch der enorme Anstieg des Potentialgefälles bei Bodennebel und die gleichzeitige starke Verminderung der Leitfähigkeit hervor. Trotz des hohen Potentialgefälles bleibt, infolge der geringen Leitfähigkeit, der Ionenstrom (direkt gemessen) klein, was darauf hinweist, daß auch beim normalen vertikalen Leitungsstrom vorwiegend nur die leichtbeweglichen Ionen und nicht auch die viel zahlreicheren Molionen beteiligt sind. Es liefert daher auch das von H. Ebert in die luftelektrische Meßtechnik eingeführte Aspirationsverfahren richtige Werte für den Ionenstrom, die durchaus mit den hier direkt gemessenen vergleichbar sind.

Tabelle 4. **Luftreinheit.**

	$i_+ \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$	$\sigma \frac{E.S.E.}{\text{cm}^2}$	$\frac{dV}{dh} \frac{\text{Volt}}{\text{m}}$	$\lambda_+ E.S.E.$	Zahl der Tage
Klar . . .	$1{,}77 \cdot 10^{-16}$	$6{,}76 \cdot 10^{-4}$	255	$6{,}24 \cdot 10^{-5}$	65
Dunstig . .	1,28	7,32	276	4,18	69
Sehr dunstig	0,92	6,85	258	3,21	24
Nebel . . .	1,06	13,74	517	1,84	17

Hierher gehört auch der Einfluß der Windrichtung. Die Münchener Sternwarte liegt am Ostrande der Stadt. Alle von W, S-W und N-W kommenden Winde führen Staub und Ruß aus der Stadt mit sich und bewirken dadurch eine Molisierung der Ionen und bedeutende Abnahme der Leitfähigkeit, wie Tabelle 5 zeigt.

Tabelle 5. **Windrichtung.**

Windrichtung	$i_+ \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$	$\sigma \frac{E.S.E.}{\text{cm}^2}$	$\frac{dV}{dh} \frac{\text{Volt}}{\text{m}}$	$\lambda_+ E.S.E.$	Zahl der Tage
E	$1{,}99 \cdot 10^{-16}$	$6{,}29 \cdot 10^{-4}$	237	$7{,}56 \cdot 10^{-5}$	75
S	1,47	10,14	382	3,46	14
W	0,94	8,65	326	2,60	67
N	0,72	5,44	205	3,17	12

Allein der E-Wind führt hier reine Landluft zum Beobachtungsorte, weshalb wohl die zu dieser Zeit gemessenen Werte ihrem absoluten Betrage nach die richtigsten sind. Hienach wären für die hiesige Gegend folgende Werte die zutreffendsten:

Gesamtleitungsstrom $i = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{-16} = 2{,}4 \cdot 10^{-16} \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$

Gesamleitfähigkeit $\lambda = 2 \cdot 7{,}56 \cdot 10^{-5} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\, E.S.E.$

Dieser Wert für λ stimmt auch gut mit jenem überein, den H. Ebert[1]) auf dem Lande in der Nähe Münchens nach der Aspirationsmethode fand, nämlich $\lambda = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\, E.S.E.$ und jenem, den A. Dannderer[2]) in Bad Aibling, 42 km s.-ö. von Müuchen ermittelte, $\lambda = 2{,}7 \cdot 10^{-4}\, E.S.E.$

Das geringe Leitvermögen der Stadtluft, das unter Umständen auf den zehnten Teil des normalen Wertes herabsinken kann, wurde auch anderwärts beobachtet, so bei den Leitfähigkeitsmessungen in Potsdam[3]), Edinburgh[4]) und Sidney[5]) (vgl. auch Tabelle 3). Die Leitfähigkeit gibt also geradezu ein Maß für die physikalische Reinheit der Luft eines Ortes ab.

---

[1]) H. Ebert, Physikal. Zeitschr. 6, 826, 1905.
[2]) A. Daunderer, Dissert. l. c., S. 93.
[3]) K. Kähler, l. c., S. XVI.
[4]) G. A. Carse und D. Mac Owan, l. c., S. 464.
[5]) A. Pollock, Le Radium 6, 135, 1909.

Geradeso, wie Staub und Rauch, vermindert auch der Wasserdampf der Luft die Beweglichkeit der Ionen durch Molisierung. Daß es insbesondere die relative Feuchtigkeit ist, deren Anwachsen eine Herabminderung des Leitvermögens der Luft verursacht, wurde schon bei den ersten Zerstreuungsmessungen durch Elster und Geitel[1]) nachgewiesen und erklärt und ist seitdem vielfach bestätigt worden. Dieser Zusammenhang ergibt sich auch aus meinen Messungen, Tabelle 6.

Tabelle 6. **Relative Feuchtigkeit.**

°/o	$i_+ \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$	$\sigma \frac{E.S.E.}{\text{cm}^2}$	$\frac{dV}{dh} \frac{\text{Volt}}{\text{m}}$	λ_+ E.S.E.	Zahl der Tage
0—50	$1{,}70 \cdot 10^{-16}$	$5{,}69 \cdot 10^{-4}$	214	$7{,}14 \cdot 10^{-5}$	27
51—65	1,18	6,52	246	4,32	58
66—80	1,33	8,92	336	3,57	51
81—100	1,75	9,64	363	4,33	39

Dem Wiederansteigen von λ_+ bei den höchsten Feuchtigkeitsgraden 81—100 °/o liegt folgende Ursache zu Grunde. Im Frühjahre und namentlich im Herbste, zeigte das im Schatten aufgestellte Hygrometer nach Zubodensinken des Morgennebels noch außerordentlich hohe Feuchtigkeitsgrade an, während am Beobachtungsplatze bei klarem Sonnenscheine große Werte für i_+ (und λ_+) gemessen wurden. Würden bei der Mittelbildung diese Tage ausgeschaltet werden, so ergäben sich für die größten Werte der relativen Feuchtigkeit die kleinsten λ_+.

Ein Zusammenhang zwischen dem vertikalen Leitungsstrom und der relativen Feuchtigkeit ergab sich nicht. Dagegen tritt ein solcher deutlich hervor bei Ordnung des Materiales nach Dampfdruck-Gruppen (Tabelle 7).

[1]) J. Elster und H. Geitel, Sitz.-Ber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, math.-phys. Kl. **111** (IIa) 965, 1902.

Tabelle 7. **Dampfdruck.**

mm Hg	$i_+ \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$	$\sigma \frac{E.S.E.}{\text{cm}^2}$	$\frac{dV}{dh} \frac{\text{Volt}}{\text{m}}$	λ_+ E.S.E.	Zahl der Tage
0,0— 3,0	$1{,}86 \cdot 10^{-16}$	$12{,}19 \cdot 10^{-4}$	459	$3{,}65 \cdot 10^{-5}$	16
3,1— 6,0	1,64	9,51	358	4,12	61
6,1— 9,0	1,26	5,93	223	5,07	49
9,1—13.5	1,19	6,06	228	4,69	49

Der vertikale Ionenstrom i_+ und das Potentialgefälle sinken mit zunehmender absoluter Feuchtigkeit, während die Leitfähigkeit keinen regelmäßigen Gang erkennen läßt. Die Ursache des Absinkens des Leitungsstromes liegt wohl im Verhalten des Potentialgefälles, das, wie zuerst F. Exner fand, mit zunehmendem Dampfdrucke abnimmt. Allerdings konnte eine hinreichende Erklärung für diesen Zusammenhang, der sich an den meisten Beobachtungsorten zeigte, bisher noch nicht gefunden werden.

Aus Tabelle 8 geht hervor, daß zwischen der Temperatur der Luft (trockenes, beschattetes Thermometer) und der Leitfähigkeit λ_+ kein gesetzmäßiger Zusammenhang besteht.

Tabelle 8. **Lufttemperatur.**

C⁰	$i_+ \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$	$\sigma \frac{E.S.E.}{\text{cm}^2}$	$\frac{dV}{dh} \frac{\text{Volt}}{\text{m}}$	λ_+ E.S.E.	Zahl der Tage
—12⁰,0—0⁰,0	$2{,}30 \cdot 10^{-16}$	$13{,}09 \cdot 10^{-4}$	494	$4{,}19 \cdot 10^{-5}$	24
0,1— 5,0	1,36	10,72	404	3,03	26
5,1—10,0	1,48	6,77	255	5,22	27
10,1—15.0	1,23	5,77	218	5,09	30
15,1—20,0	1,22	6,29	237	4,64	41
20,1—26,0	1,22	5,76	217	5,06	27

Wohl aber besteht ein solcher zwischen der Bodenwärme und der Leitfähigkeit wie die Tabellen 1 und 2 erweisen. Dieses eigentümliche Verhalten läßt sich am besten durch die „Bodenatmung“ erklären, wie dies schon Seite 321 und Seite 351 auseinandergesetzt wurde. Im Verhalten von i_+ und $\frac{dV}{dh}$ gegenüber der Temperatur drückt sich auch in Tabelle 8 der jährliche Verlauf beider Elemente deutlich aus (vergleiche Tabellen 1 und 2).

Ganz entsprechend der Seite 351 entwickelten Anschauung wirkt auch der Luftdruck auf die Leitfähigkeit λ_+ ein. Nicht die absolute Größe des Luftdruckes ist maßgebend, sondern die Luftdruckschwankung. Dies ergibt sich deutlich aus Tabelle 9 und Tabelle 10.

Tabelle 9. **Luftdruckänderung.**

Barometer	$i_+ \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$	$\sigma \frac{E.S.E.}{\text{cm}^2}$	$\frac{dV}{dh} \frac{\text{Volt}}{\text{m}}$	λ_+ E.S.E.	Zahl der Tage
Steigt . .	$1{,}24 \cdot 10^{-16}$	$7{,}86 \cdot 10^{-4}$	296	$3{,}77 \cdot 10^{-5}$	36
Konstant .	1,41	7,39	278	4,56	66
Fällt . . .	1,55	8,11	305	4,57	73

Bei sinkendem Luftdrucke quellen Emanationen und fertig gebildete + Ionen im Überschusse aus dem Boden heraus, die Leitfähigkeit und damit der Ionenstrom steigen. Bei steigendem Luftdrucke ist dieser Prozeß abgestellt, Leitfähigkeit und Ionenstrom sinken. Konstanter Luftdruck, mit andauernden kurzen Schwankungen wirkt, wie Dannderer[1]) gezeigt hat, geradeso wie der fallende Luftdruck. Eine weitere Unterteilung des Beobachtungsmateriales nach diesem Gesichtspunkte wurde aber, seines geringen Umfanges wegen, hier nicht vorgenommen, woraus sich wohl die hohen Werte von λ_+ bei konstantem

[1]) A. Dannderer, Diss. l. c., S. 77.

Tabelle 10. **Luftdruckhöhe.**

mm Hg	$i_+ \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$	$\sigma \frac{E.S.E.}{\text{cm}^2}$	$\frac{dV}{dh} \frac{\text{Volt}}{\text{m}}$	$\lambda_+ E.S.E.$	Zahl der Tage
700,0—705,0	$1,38 \cdot 10^{-16}$	$10,74 \cdot 10^{-4}$	406	$3,07 \cdot 10^{-5}$	8
705,1—710,0	1,32	9,64	363	3,27	20
710,1—715,0	1,40	6,93	261	4,82	38
715,1—720,0	1,42	6,97	263	4,86	65
720,1—725,0	1,53	8,34	314	4,38	44

Barometerstande erklären. Daß mit zunehmendem Luftdrucke der Ionenstrom schwach ausgeprägt steigt (Tabelle 10), dürfte seinen Grund in der damit zumeist eintretenden Aufheiterung des Wetters haben; denn, wie schon aus den Tabellen 1 und 2 hervorgeht, ist der Leitungsstrom an heiteren Tagen größer als im Durchschnitt.

Demgemäß zeigt auch die Ordnung der Beobachtungen nach dem Grade der Bewölkung (zehnteilige Skala) eine sehr regelmäßige Abnahme des Ionenstromes und der Leitfähigkeit mit wachsender Bedeckung des Himmels (Tabelle 11).

Tabelle 11. **Bewölkungsgrad.**

Zehnteilige Skala	$i_+ \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$	$\sigma \frac{E.S.E.}{\text{cm}^2}$	$\frac{dV}{dh} \frac{\text{Volt}}{\text{m}}$	$\lambda_+ E.S.E$	Zahl der Tage
0—2	$1,89 \cdot 10^{-16}$	$9,12 \cdot 10^{-4}$	343	$4,96 \cdot 10^{-5}$	49
3—4	1,49	6,12	231	5,81	23
5—6	1,28	6,92	261	4,42	28
7—8	1,16	6,89	260	4,02	25
9—10	1,17	8,19	309	3,42	50

Überblickt man die vorstehenden Tabellen, so erscheint es als wahrscheinlich, daß die eigentliche unabhängige Variable unter den luftelektrischen Elementen i, $\frac{dV}{dh}$ und λ die Leitfähigkeit λ ist. Sie bestimmt im großen und ganzen den Gang des Potentialgefälles, beide zusammen den des Ionenstromes, und sie wiederum wird beeinflußt von zahlreichen meteorologischen Faktoren, sowie von der Beschaffenheit und Bestrahlung des Erdbodens. Es ist klar, daß bei der gemeinsamen Tätigkeit so vielerlei Einflüsse dieser Zusammenhang nicht immer deutlich zu Tage tritt. Der kurz „die Luftelektrizität" benannte Naturvorgang ist vielmehr ein ganz verwickelter Erscheinungskomplex, der erst in neuerer Zeit, namentlich durch die Arbeiten von Exner, Elster und Geitel, Ebert u. a. unserem Verständnisse näher gerückt wurde.

Die Ergebnisse der vorliegenden Messungen lassen sich etwa wie folgt zusammenfassen:

1. Es wird ein Apparat beschrieben, welcher nach der Methode von C. T. R. Wilson in genauer und einfacher Weise die elektrische Oberflächendichte und den vertikalen positiven elektrischen Leitungsstrom in absolutem Maße bestimmen läßt. Hiemit läßt sich das Potentialgefälle und die polare positive Leitfähigkeit berechnen. Im ganzen können also mit ein und demselben Apparat vier der wichtigsten luftelektrischen Elemente ermittelt werden, bei einer Meßdauer von etwa 7 Minuten.

2. An 97 heiteren, wenig bewölkten Tagen wurden folgende Werte, reduziert auf die Ebene, gefunden:

Elektrische Oberflächendichte $\sigma = 8{,}33 \cdot 10^{-4} \frac{E.S.E.}{\mathrm{cm}^2}$,

Potentialgefälle $\frac{dV}{dh} = 188 \frac{\mathrm{Volt}}{\mathrm{m}}$,

Gesamt-Leitungsstrom $i = 2{,}04 \cdot 10^{-16} \frac{\mathrm{Amp.}}{\mathrm{cm}^2}$,

Gesamt-Leitfähigkeit $\lambda = 0{,}98 \cdot 10^{-4}\, E.S.E.$

3. Staub, Rauch und zunehmende relative Feuchtigkeit vermindern den Ionenstrom und die Leitfähigkeit stark. Der normale vertikale Leitungsstrom wird also vorwiegend von den leichtbeweglichen Ionen getragen.

4. Bei zunehmendem Dampfdrucke sinkt der Ionenstrom und das Potentialgefälle, die Leitfähigkeit schwankt unregelmäßig.

5. Auch die vorstehenden Messungen bestätigen, daß nicht die Lufttemperatur, sondern die Bodenwärme von Einfluß auf die Werte i, λ und $\frac{dV}{dh}$ ist. Nicht die absolute Größe, sondern die Änderung des Luftdruckes wirkt auf i und λ ein. Beides weist auf die Bodenatmung hin, im Sinne der Ebertschen Theorie.

Die vorstehend mitgeteilten Messungen waren nur durch wiederholte Unterstützung seitens der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften möglich. Sie gewährte dem Erdmagnetischen Observatorium (Sternwarte) die Mittel zur Beschaffung des Benndorfschen Apparates, des Wilsonschen Apparates und verschiedener notwendigen Hilfsinstrumente. Es sei mir daher gestattet, der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften auch an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen.

Ganz besonderen Dank schulde ich auch Herrn Professor H. Ebert, welcher die luftelektrischen Beobachtungen am hiesigen Erdmagnetischen Observatorium seit Beginn auf das wirksamste fördert.

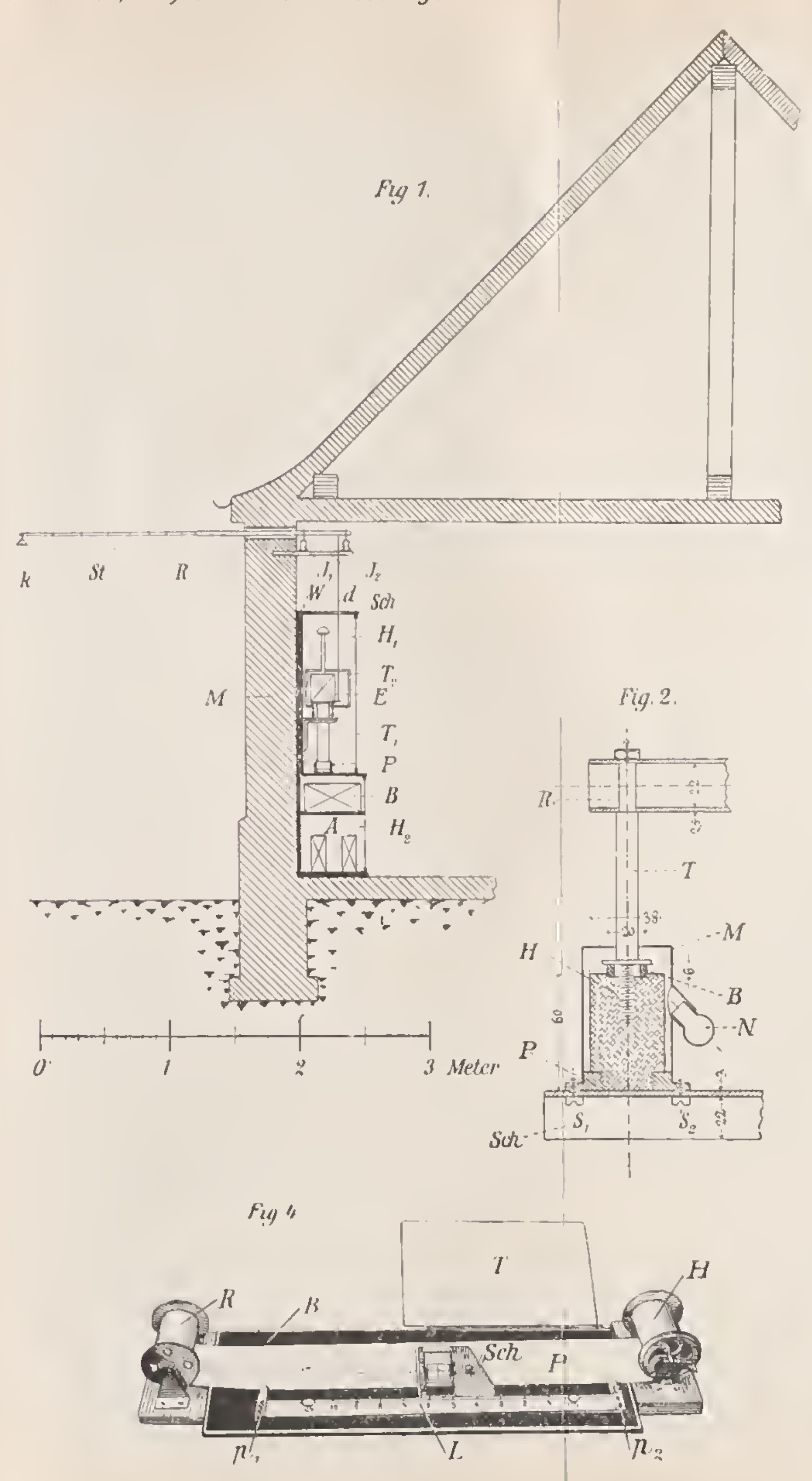


Fig. 3.

Fig. 5.

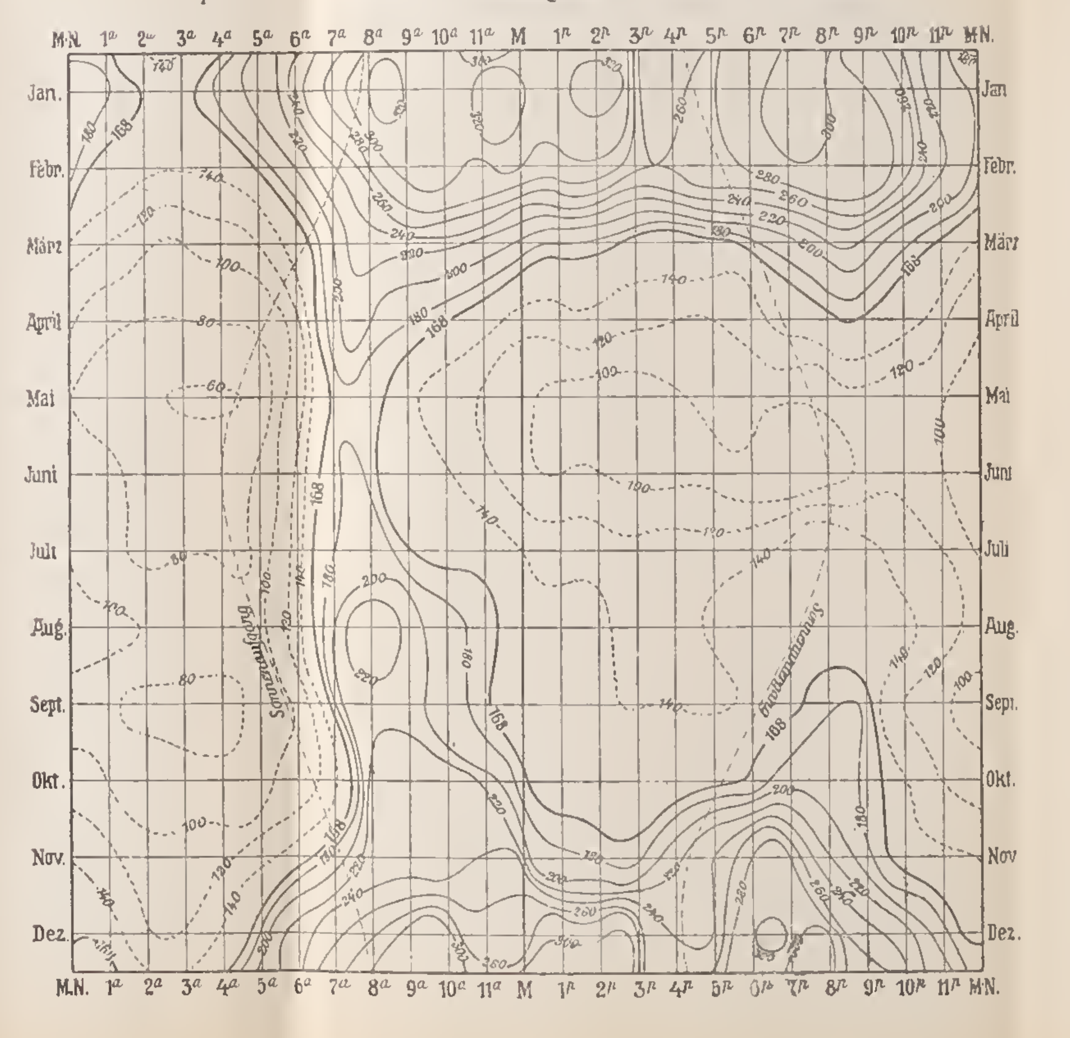
Jährlicher Gang des Pot. Gef. (P) und der Lufttemperatur (T)

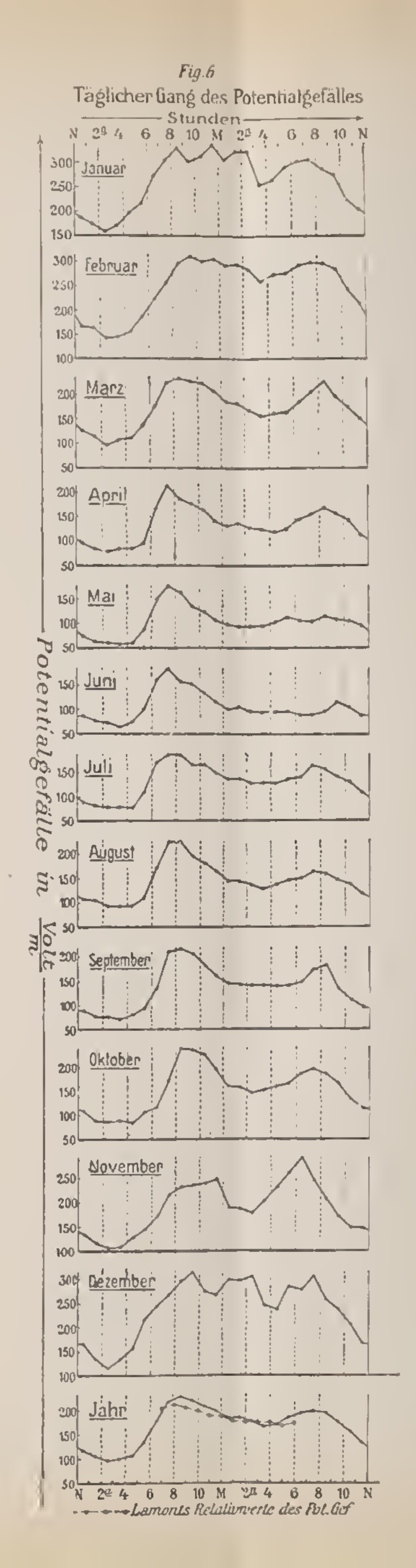
Lamonts Relativwerte des Pot. Gef. (L)

Jan. Febr. März April Mai Juni Juli Aug. Sept. Okt. Nov. Dez.

Pot. Gef. in Volt — Temp. in C° — Monate

Fig. 7.







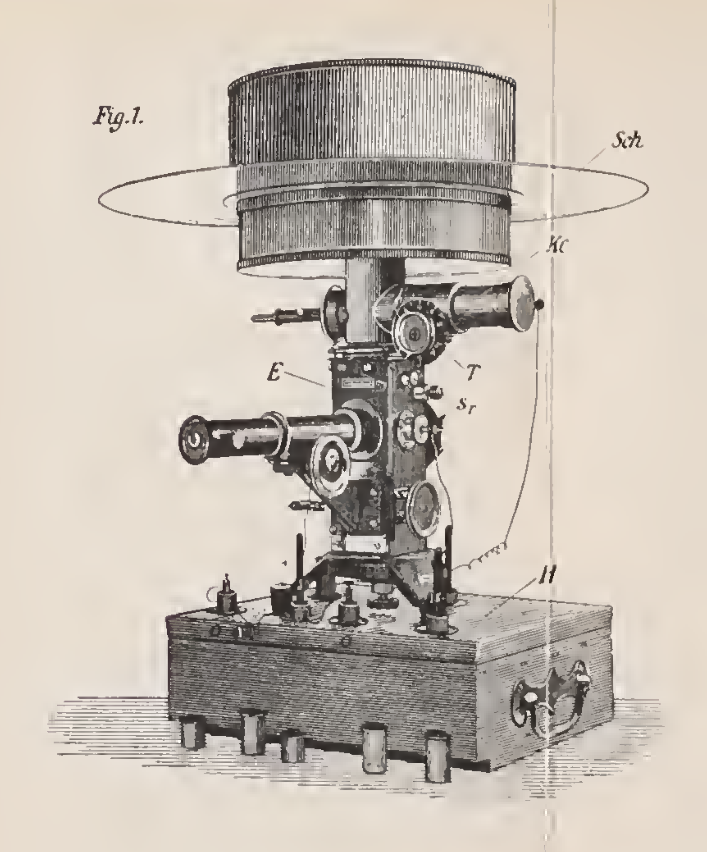


Fig. 1.

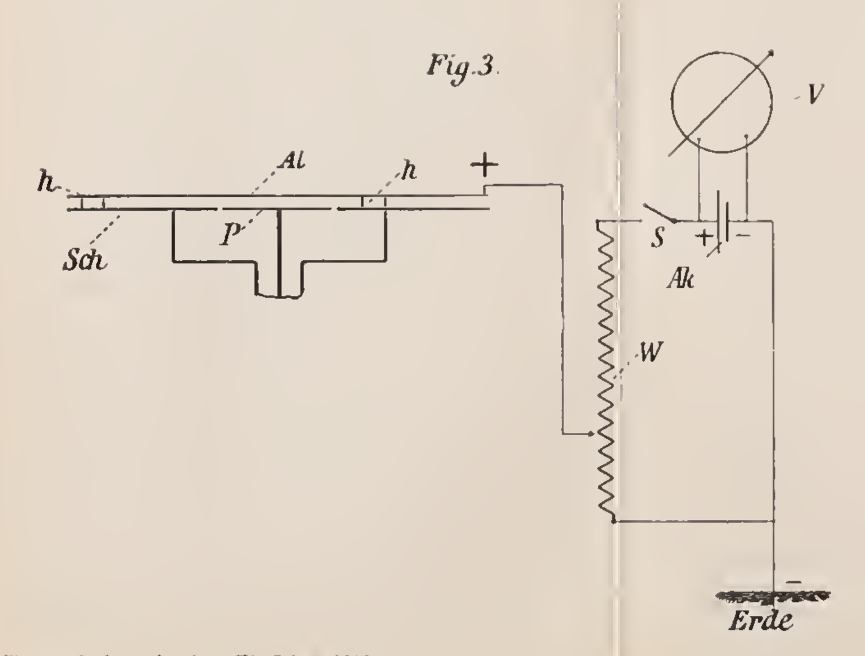


Fig. 3.

Fig. 2

D
P
Sch
t
G
Ko
O
e
st
r
B
J
A
R
h
s
E
S
St.
+100
+30
-30
-100
H
KB
M

Fig. 4.

Kompensator-Eichkurve

E.S.E. × 10²

Kompensator - Skalenteile



Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe.

Von W. H. Young.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 10. Juni 1911.

§ 1.

Herr Pringsheim[1]) hat auf die Tatsache aufmerksam gemacht, daß die Existenz von

$$\int_0^t \left| \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \right| dt \tag{1}$$

für die Konvergenz der Reihe

$$\sum \{b_n \cos nx - a_n \sin nx\}, \tag{2}$$

die ich als verwandte Reihe der Fourierschen Reihe

$$f(x) \backsim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3}$$

bezeichne, zwar hinreichend, aber nicht notwendig ist.

Es sei diese Bedingung erfüllt, dann wissen wir, daß die verwandte Reihe (2) nach

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{f(x+t) - f(x-t)\} \cot \frac{t}{2}\, dt \tag{4}$$

---

[1]) A. Pringsheim, „Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreis", 1900. Sitzungsber. d. math.-phys. Klasse der K. Bayer. Akad. d. Wiss. XXX, p. 87. In dieser Abhandlung betrachtet Pringsheim nur Integrale im Riemannschen Sinne; die Erweiterung auf Lebesguesche und Harnack-Lebesguesche Integrale folgt ohne weiteres.

konvergiert. Im entgegengesetzten Fall aber kann es wohl vorkommen, daß das Integral (4) im Riemannschen oder Harnack-Lebesgueschen Sinne als ein bedingt konvergentes existiert, obwohl es im Lebesgueschen Sinne, infolge der Nichtexistenz von (1), nicht existiert. Mit anderen Worten: die Existenz von

$$\lim_{\varepsilon=0} \cdot \int_{\varepsilon}^{t} \{f(x+t) - f(x-t)\} \cot\frac{t}{2} \cdot dt$$

erfordert nicht die Existenz von (1).

Die gewöhnlichen Bedingungen für die Konvergenz der Fourierschen Reihe (3) sind zweierlei

I) $\dfrac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t}$ mag einer Lebesgueschen Integration fähig sein;

oder:

II) $f(x)$ mag beschränkte Schwankung besitzen.

Dem Fall I) entspricht genau die Bedingung:

Ia) $\dfrac{f(x+t) - f(x-t)}{t}$ mag einer Lebesgueschen Integration fähig sein,

die für die Konvergenz der verwandten Reihe (2) genügt. Dem Falle II) entspricht eine Bedingung, die bis jetzt nicht formuliert wurde.

Bedenken wir nur, daß die Existenz von

$$\tfrac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$$

eine sozusagen zufällige Folge der Erfüllung der Bedingung II) ist, und daß deshalb der Ausdruck, welcher hinterher sich als Summe der Fourierschen Reihe (3) nachweist, a priori einen Sinn hat, so liegt es auf der Hand, im Falle der verwandten Reihe (2) eine ausdrückliche Voraussetzung der Existenz des Ausdrucks, welche die fragliche Summe darstellen soll, zu erwarten. Dieser Ausdruck bietet sich in der Form eines

Integrals dar, und das Ziel dieser Note in erster Linie ist, diese Erwartung zu bestätigen, indem ich zeige, daß mit dieser Zufügung die Bedingung II) auch hinreichend ist, die Konvergenz der verwandten Reihe (2) zu sichern. Ich schließe mit einem Satz allgemeineren Umfanges, welcher noch weiterer Verallgemeinerung fähig ist.

§ 2.

Theorem.

Ist $f(x)$ eine Funktion mit beschränkter Schwankung, so konvergiert die verwandte Reihe

$$\sum (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

der Fourierschen Reihe von f, nach

$$\lim_{n=\infty} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \{f(x+t) - f(x-t)\} \cot \frac{t}{2}\, dt,$$

vorausgesetzt, daß dieser Limes einen bestimmten, endlichen Wert hat.

Schreiben wir:

$$s_m = \sum_{n=1}^{m-1} (b_n \cos nx - a_n \sin nx),$$

wobei:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Durch einen gewöhnlichen Summationsprozeß erhalten wir:

$$s_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left\{ \frac{1}{2} \cot \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{t}{2} \cos \frac{2n-1}{2}\, t \right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \{ f(2t+x) - f(2t-x) \} \{ \cot t - \operatorname{cosec} t \cos 2\overline{n-1}\, t \}\, dt.$$

Schreiben wir der Kürze halber $f_1(t)$ anstatt

$$f(2t + x) - f(x - 2t),$$

so ist $f_1(t)$ von beschränkter Schwankung, hat im Punkte $t = 0$ den Wert Null und ist daselbst infolge der Voraussetzung stetig. Bezeichnen wir durch $P(t)$ und $-N(t)$ die positive und negative Schwankung von $f_1(t)$ im Intervall $(0, t)$, so ist:

$$f_1(t) = P(t) - N(t),$$

und es erweisen sich $P(t)$ und $N(t)$, wie $f_1(t)$ als stetig im Punkte $t = 0$, woselbst sie den Wert Null haben.

Nehmen wir eine positive Größe ε so klein an, daß für alle positiven Werte von $t < \varepsilon$, $P(t)$ und $N(t)$ beide $< e$ sind, und außerdem:

$$\left| f_1(t) \left\{ \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right\} \right| < e.$$

Betrachten wir dann nur solche Werte von n, daß

$$\frac{\pi}{n} < \varepsilon.$$

Wir haben nun

$$\pi s_n = \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} f_1(t) \cot \frac{t}{2}\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{n}} f_1(t) \frac{\cos t - \cos \overline{2n-1}\, t}{\sin t}\, dt$$

$$- \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} f_1(t) \operatorname{cosec} t \cos \overline{2n-1}\, t\, dt - \int_{\frac{\pi}{n}}^{\varepsilon} f_1(t) \operatorname{cosec} t \cos \overline{2n-1}\, t\, dt. \quad \text{(A)}.$$

Das Theorem von Riemann-Lebesgue läßt uns darauf schließen, daß das dritte Integral nach Null konvergiert, wenn n ohne Schranke wächst, da $f_1(t) \operatorname{cosec} t$ im Intervall $\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right)$ eine Lebesguesche Integration zuläßt.

Das zweite Integral spaltet man in die beiden folgenden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} f_1(t) \frac{\cos t - \cos \overline{2n-1}\, t}{t} dt$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{n}} f_1(t) \left\{ \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right\} \{\cos t - \cos \overline{2n-1}\, t\}\, dt,$$

deren zweites absolut genommen

$$\leq \left| 2 \int_0^{\frac{\pi}{n}} f_1(t) \left\{ \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right\} dt \right|$$

ist, also mit $\frac{1}{n}$ nach Null konvergiert, während für den Absolutwert des ersten sich ergibt:

$$\left| 2 \int_0^{\frac{\pi}{n}} f_1(t) \frac{\sin nt \sin \overline{n-1}\, t}{t} dt \right| \leq 2e \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left| \frac{\sin nt}{t} \right| dt$$

$$\leq 2e \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt < 2\pi e. \tag{5}$$

Um das letzte Integral in (A) zu behandeln, benützen wir die Voraussetzung, daß f_1 beschränkte Schwankung besitzt. Wir ersetzen zugleich $\operatorname{cosec} t$ durch $\frac{1}{t}$, was erlaubt ist, da ja:

$$\left| \int_{\frac{\pi}{n}}^{\varepsilon} f_1(t) \left\{ \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right\} \cos \overline{2n-1}\, t\, dt \right| < \int_{\frac{\pi}{n}}^{\varepsilon} |f_1(t)| \left\{ \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right\} dt < e\left(\varepsilon - \frac{\pi}{n}\right). \tag{6}$$

Nun wenden wir den zweiten Mittelwertsatz auf das Integral

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\varepsilon} P(t) \frac{\cos \overline{2n-1}\, t}{t} dt$$

zweimal an und erhalten als gleichwertig

$$\frac{n}{\pi} P(\varepsilon) \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \cos \overline{2n-1}\, t\, dt < \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{P(\varepsilon)}{\pi} < \frac{2e}{\pi}. \qquad (7)$$

In gleicher Weise

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\varepsilon} N(t) \frac{\cos \overline{2n-1}\, t}{t} dt < \frac{2e}{\pi}. \qquad (8)$$

Es hat sich also ergeben. daß die drei letzten Integrale in (A) einen Beitrag zu dem gesamten Grenzwerte liefern, der numerisch kleiner als $e\left\{2\pi + \varepsilon + \frac{4}{\pi}\right\}$ ist.

Da aber e beliebig klein ist, so ist dieser Beitrag Null. Es bleibt also, nach (A)

$$\lim_{n \to \infty} \pi s_n = \lim_{n \to \infty} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} f_1(t) \cot \frac{t}{2} dt,$$

womit das ausgesprochene Theorem bewiesen ist.

§ 3.

Es sei nun auf den kürzlich[1]) von mir hergeleiteten Satz hingewiesen, wonach die verwandten Reihen der Fourierschen Reihe von $f(x)$ und derjenigen von

$$\frac{1}{2 \sin u} \int_0^u \{f(x+2u) - f(x-2u)\}\, du$$

im Punkte $u = 0$ gleichzeitig konvergieren oder nicht konvergieren, und im letzteren Fall die Summen der beiden Reihen

[1]) „On the Convergence of a Fourier Series and of its allied Series". 1911. Proc. L. M. S.

einander gleich sind. Hiernach ergibt sich unmittelbar aus dem vorigen Paragraphen der folgende Satz, welcher als Erweiterung desjenigen von § 2 gelten kann:

Theorem.

Wenn

$$\frac{1}{u}\int_0^u \{f(x+u) - f(x-u)\}\, du,$$

als Funktion von u betrachtet, im Intervall $(0, u)$ beschränkte Schwankung besitzt, so konvergiert die verwandte Reihe der Fourierschen Reihe von $f(x)$ nach

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{4\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} du \operatorname{cosec}^2 \frac{u}{2}\int_0^u \{f(x+2t) - f(x-2t)\}\, dt,$$

angenommen, daß dieser Limes existiert.

Dieser Satz läßt sich folgendermaßen umgestalten, indem wir die Werte von $f(x)$ außerhalb des Intervalles $(-\pi, \pi)$ periodisch wiederholen und das unbestimmte Integral von $f(x)$ durch $F(x)$ bezeichnen. Wir erhalten alsdann folgenden Satz:

Wenn

$$\frac{1}{u}\{F(x+u) + F(x-u) - 2F(x)\},$$

als Funktion von u betrachtet, im Intervall $(0, u)$ beschränkte Schwankung besitzt, so konvergiert die verwandte Reihe der Fourierschen Reihe von $f(x)$ nach

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty u^{-2}\{F(x+u) + F(x-u) - 2F(x)\}\, du,$$

angenommen, daß dieses Integral im Harnack-Lebesgueschen Sinne existiert.

Wir schließen sogar weiter, daß, wenn

$$\frac{1}{u}\int_0^u \{f(x+u) - f(x-u)\}\, du,$$

d. i.

$$\frac{F(x+u)+F(x-u)-2F(x)}{u}$$

eine Funktion des Veränderlichen u mit beschränkter Schwankung ist, so konvergiert die verwandte Reihe gegen

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\infty}\frac{f(x+u)-f(x-u)}{u}\,du,$$

vorausgesetzt, daß dieser Limes bestimmt und endlich ist.

Denn man hat:

$$\frac{F(x+u)+F(x-u)-2F(x)}{u}$$

$$=\int\limits_{u}^{\infty}\frac{F(x+u)+F(x-u)-2F(x)}{u^2}\,du-\int\limits_{u}^{\infty}\frac{f(x+u)-f(x-u)}{u}\,du.$$

Da nun die linke Seite dieser Gleichung als Funktion beschränkter Schwankung jedenfalls einen bestimmten und endlichen Grenzwert besitzt, wenn u gegen Null konvergiert, so konvergieren beide Integrale auf der rechten Seite, oder es konvergiert keines von beiden. Letzteres tritt aber sicher ein, wenn der Grenzwert der linken Seite verschieden von Null ist, da die linke Seite durch u dividiert als Integrand in einem der beiden Integrale auftritt. Deshalb konvergieren die beiden Integrale gegen denselben bestimmten endlichen Wert, oder es konvergiert keiner der beiden. Der gesuchte Schluß folgt unmittelbar.

Endlich sei bemerkt, daß die Beweismethode, durch welche wir die Existenz des bestimmten und endlichen

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\infty}\frac{f(x+u)-f(x-u)}{u}\,du$$

als hinreichende Bedingung für die Konvergenz der verwandten Reihe der Fourierschen Reihe von $f(x)$ erkannt haben, auch die Notwendigkeit dieser Bedingung nachweist, im Falle, daß entweder $f(x)$ selbst oder aber $\varphi(u)$, wobei $\varphi(0) = 0$,

$$\varphi(u) = \frac{F(x+u) + F(x-u) - 2F(x)}{u}, \quad (0 < u),$$

nicht nur beschränkte Schwankung besitzt, sondern auch stetig ist.

§ 4.

Beispiel.

Setzen wir im Intervalle $\frac{\pi}{r!} < t < \frac{\pi}{(r-1)!}$

$$f(t) = (-1)^r \frac{1}{r\{\log r\}^{k+1}}, \quad (0 < k \leq 1;\ r = 2, 3, \ldots).$$

Und ferner

$$f(0) = 0, \quad f(t) = -f(-t), \quad f(t \pm 2\pi) = f(t).$$

Diese streckenweise konstante Funktion $f(t)$ hat beschränkte Schwankung. Denn in irgend einer im Intervall $(-\pi, \pi)$ enthaltenen Strecke kann die Schwankung die Summe der Sprünge nicht überschreiten. Deshalb bleibt die Schwankung in einer solchen Strecke stets unter der Summe der konvergenten Reihe

$$2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r(\log r)^{k+1}}.$$

Wir haben aber

$$\int_{\frac{\pi}{r!}}^{\frac{\pi}{(r-1)!}} \frac{f(t)}{t}\, dt = f\left\{\frac{\pi}{(r-1)!}\right\} \int_{\frac{\pi}{r!}}^{\frac{\pi}{(r-1)!}} \frac{dt}{t}$$

$$= f\left\{\frac{\pi}{(r-1)!}\right\} \log \frac{\frac{\pi}{(r-1)!}}{\frac{\pi}{r!}} = (-1)^r \frac{1}{r(\log r)^k},$$

während

$$\int_{\frac{\pi}{r!}}^{\frac{\pi}{(r-1)!}} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt = \frac{1}{r(\log r)^k}.$$

Da nun

$$\sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r\{\log r\}^k}$$

konvergiert, dagegen

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r\{\log r\}^k}$$

divergiert, so leuchtet ein, daß $\int_0^{\pi} \frac{f(t)}{t}\, dt$ zwar als bedingt konvergentes, nicht aber als absolut konvergentes Integral existiert.

Man hat nämlich, wenn $\frac{\pi}{r!} < t < \frac{\pi}{(r-1)!}$:

$$\left|\int_{\frac{\pi}{r!}}^{t} \frac{f(t)}{t}\, dt\right| < \left|\int_{\frac{\pi}{r!}}^{\frac{\pi}{(r-1)!}} \frac{f(t)}{t}\, dt\right|,$$

mithin unterscheidet sich

$$\int_{t}^{\pi} \frac{f(t)}{t}\, dt \quad \text{von} \quad \int_{\frac{\pi}{r!}}^{\pi} \frac{f(t)}{t}\, dt$$

höchstens um $\frac{1}{r\{\log r\}^k}$. Nimmt nun t, und deshalb auch $\frac{1}{r}$, beständig ab, so konvergiert $\int_t^{\pi} \frac{f(t)}{t}\, dt$ gegen denselben endlichen und bestimmten Wert wie

$$\int_{\frac{\pi}{r!}}^{\pi} \frac{f(t)}{t}\, dt, \quad \text{d. i. gegen} \quad \sum_{r=2}^{\infty} (-)^r \frac{1}{r\{\log r\}^k};$$

aber

$$\int_{t}^{\pi} \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt \quad \text{und} \quad \int_{\frac{\pi}{r!}}^{\pi} \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt$$

divergieren gleichzeitig mit

$$\sum_{r=2}^{r} \frac{1}{r\{\log r\}^k}.$$

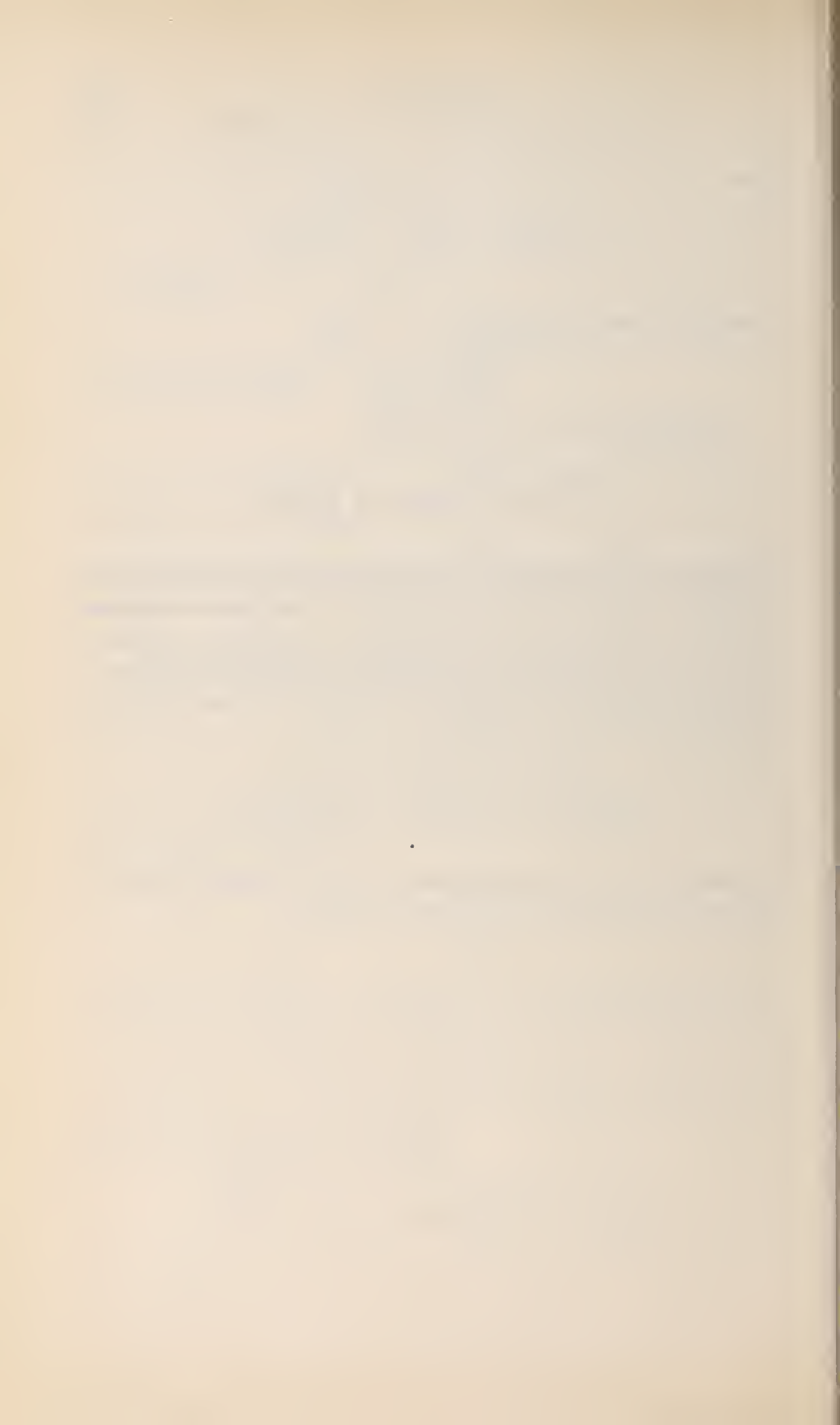
Daraus folgt, daß

$$\int_{0}^{\pi} \frac{f(t) - f(-t)}{t} dt = 2 \int_{0}^{\pi} \frac{f(t)}{t} dt$$

ebenfalls als bedingt konvergentes (Riemannsches) Integral, nicht aber als absolut konvergentes (also nicht als Lebesguesches) Integral existiert. Da nun $f(t)$ eine Funktion mit beschränkter Schwankung ist, so konvergiert die verwandte Reihe der Fourierschen Reihe von $f(x)$ gegen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \{f(x+t) - f(x-t)\} \cot \frac{t}{2} dt,$$

obwohl auch dieses Integral nur als bedingt konvergentes existiert.



Durchlöcherte Berge und orographische Fenster.

Von **Siegmund Günther.**

Vorgetragen in der Sitzung am 1. Juli 1911.

Seit längerer Zeit darauf ausgehend, solche Oberflächenformen auf ihr geographisches Vorkommen und auf ihre genetischen Verhältnisse zu prüfen, welche durch die Besonderheit ihrer äußeren Erscheinung, durch ihren malerischen Charakter ins Auge fallen, hat der Verfasser derartigen Gebilden eine Reihe von Abhandlungen[1]) gewidmet. Zu diesen ungewöhnlichen Naturformen kann man nur ausnahmsweise auch die Höhlen rechnen, denn zumeist liegen diese verborgen und müssen besonders aufgesucht werden, wenn man sich über ihre Eigenart näher unterrichten will. Immerhin gibt es unter ihnen auch einzelne Exemplare, welche jedem Beschauer sich sofort bemerklich machen und ein Recht darauf haben, als pittoreske Naturphänomene angesprochen zu werden. Das sind in erster Linie jene Hohlräume, welche ein ganzes Bergmassiv durchsetzen und somit ganz zutreffend als orographische Fenster[2]) bezeichnet werden können.

---

[1]) Glaziale Denudationsgebilde im mittleren Eisacktale, Sitzungsber. d. K. Bayer. Akad. d. Wissensch., Math.-phys. Kl., 1902, S. 459 ff.; Erdpyramiden und Büßerschnee als gleichartige Erosionsgebilde, ebenda, 1904, S. 394 ff.; Neue Beiträge zur Theorie der Erosionsfiguren, ebenda, 1906, S. 477 ff.; Ein Naturmodell der Dünenbildung, ebenda, 1908, S. 139 ff.; Wackelsteine, ebenda, 1910, S. 316 ff.; Pittoreske Erosionsgebilde, Wissenschaftl. Rundschau, 1911, S. 157 ff.

[2]) Das Beiwort dürfte unerläßlich sein, weil bereits die Stratigraphie auf das Hauptwort die Hand gelegt und den Begriff Geologi-

Von ihnen, die im Zusammenhange anscheinend noch niemals betrachtet worden sind, soll im folgenden gehandelt werden[1].) Allerdings muß dabei noch einer Einschränkung gedacht werden, weil sonst das Gebiet einerseits zu ausgedehnt werden würde, und weil zweitens auch eine Klasse von Vorkommnissen mit einzubeziehen wäre, deren Wesen doch in mancher Hinsicht ein sehr verschiedenes ist. Diese Klasse umfaßt die sogenannten Felsentore und Naturbrücken.

Was zunächst die ersteren anlangt, als deren klassischer Vertreter das berühmte Prebischtor der Sächsischen Schweiz gelten kann[2]), so ist ja eine gewisse Analogie zu den uns be-

---

sches Fenster geprägt hat. Wir lesen bei Alb. Heim (Der Bau der Schweizer Alpen, Neujahrsblatt d. Naturforsch. Gesellsch. auf das Jahr 1908, Zürich, S. 17): „Ein Erosionsloch, durch das die junge Unterlage unter einer Decke älterer Gesteine herausschaut, heißt ein Fenster." Ebenso gebraucht dieses Wort W. Paulcke (Beitrag zur Geologie des „Unterengadiner Fensters", Verhandl. d. Naturwissensch. Ver. zu Karlsruhe, 23. Band, S. 31 ff.). Die Darstellung des Unterengadins als Fenster in solchem Sinne geht diesem Autor zufolge zurück auf P. Termier (Les nappes des Alpes Orientales et la synthèse des Alpes, Bull. de la Soc. Géol. de France, (4), 2. Band, 1909). Während das Wort hier mithin bloß figürlich gebraucht wird, nehmen wir es in buchstäblichem Sinne, sowie das auch, wovon später, die spanische Sprache tut. Das Gebirge hat eine Öffnung, durch welche, wenn die Umstände sonst günstig gelagert sind, das Firmament hindurchschaut, durch welches man, wie durch ein künstlich hergestelltes Fenster, auf die andere Seite hinüberblicken kann.

[1]) Bei der Sammlung des sehr zerstreuten und, wie erwähnt, noch nicht umfassend dargestellten Materiales haben dem Verfasser zwei mit der wissenschaftlichen Alpinistik besonders vertraute Forscher ihre Unterstützung geliehen, Prof. Dr. Albert Heim in Zürich und Professor Eberhard Fugger in Salzburg. Beide wiesen auf minder bekannte Literatur und auch auf überhaupt noch nicht beschriebene Fälle hin. Ihnen beiden sei deshalb verbindlicher Dank für ihre Mitwirkung ausgesprochen. Solchen schuldet der Verfasser auch Herrn Professor Belar (Laibach).

[2]) Von der Bildung solcher Naturbogen, besser Felstore, handeln A. v. Gutbier (Geognostische Skizzen aus der Sächsischen Schweiz, Leipzig 1858, S. 98 ff.) und A. Hettner, Gebirgsbau und Oberflächengestaltung der Sächsischen Schweiz, Stuttgart 1887, S. 294 ff.). Die all-

schäftigenden Gebilden unverkennbar, aber es ist bei ihnen die Entstehung, bei welcher die Korrasion eine entscheidende Rolle spielt, so einfach zu erklären, daß eine spezielle Untersuchung kaum am Platze erscheint. Ein Musterbeispiel, das man ebensowohl als Felsentor, wie auch als Naturbrücke aufzufassen berechtigt ist, liegt unmittelbar dem Gollinger Wasserfalle vor; man kann da den Auswaschungsvorgang auf das genaueste verfolgen[1]). Auch gewisse litorale Höhlen, die eine Felsmasse vollständig durchdringen, seien bloß kurz berührt, denn auch bei ihnen ist es zweifellos, daß die Bran-

---

gemeinen Fragen, auf welche es ankommt, hat in sehr gedrängter, aber allen wichtigen Punkten gerecht werdender Darstellung behandelt J. Früh (Über Naturbrücken und verwandte Formen mit spezieller Berücksichtigung der Schweiz, St. Gallen 1905). Als besonders beachtenswerte Formen nennt er nach P. Egli (Beitrag zur Kenntnis der Höhlen in der Schweiz, Vierteljahrsschr. d. Naturforsch. Gesellsch. in Zürich, 1905, S. 296) die Naturbrücke im Hölltobel (Kanton Schwyz), die „Pierre Pertuis" bei Tavannes (Schweizer Jura), die „Kärpfbrücke" (Kanton Glarus), den „Pont d'Arc" (Martel, Les Cévennes, Paris 1890, S. 291; Penck, Morphologie der Erdoberfläche, 2. Band, Stuttgart 1894, S. 73; im Dép. d'Ardèche) und je ein interessantes Beispiel aus dem Tale Toggenburg (bei Krummenau), bei Rapperswil („Martinsbrünneli"), bei Gondo an der Simplonstraße und im nordamerikanischen Staate Arizona. Beigefügt zu werden verdient aus der Schweiz noch der „Pont mystérieux" aus der Klamm Gouffre de la Tête-Noire zwischen Martigny und Chamonix. Es leuchtet ein (Früh, a. a. O., S. 12), daß die örtliche Nomenklatur für derartige Gebilde eine sehr reichhaltige sein muß; zumal für verkarstete Länder gilt dies (vgl. W. v. Knebel, Höhlenkunde mit besonderer Berücksichtigung der Karstphänomene, Braunschweig 1906). So kann man dergleichen schon im Bereiche des manche charakteristische Karstform aufweisenden Fränkischen Jura konstatieren; es sei nur an die bekannte Riesenburg erinnert.

[1]) Verwiesen sei auch auf das in seiner äußeren Gestalt einem künstlich hergestellten Durchlaß überaus ähnliche Felsentor Claforàt (furlanisch = pietra forata, durchbohrter Fels) in der Nähe von Enemonzo. Von einem Falle im Kl. Walsertale berichtet Förderreuther (Die Allgäuer Alpen, Kempten 1907, S. 76), von einem zweiten (bei Unteremmendorf in der Oberpfalz) eine vom Nordbayerischen Verkehrsverein herausgegebene Ortsbeschreibung (Das Altmühltal, Nürnberg, s. a., S. 64).

dungswoge, welche durch ungemessene Zeiträume das zermürbte und in seiner Struktur Verschiedenheiten aufweisende Felsgestein am Strande bearbeitete, dem fensterbildenden Faktor gleich zu achten ist. Die Insel Helgoland[1]) und die nor-



Fig. 1a.

[1]) Als zuverlässige Berater für den die früheren und gegenwärtigen Zustände der einsamen Insel Studierenden können die folgenden Veröffentlichungen genannt werden: K. M. W. Wiebel, Die Insel Helgoland: Untersuchungen über deren Größe in Vorzeit und Gegenwart vom Standpunkt der Geschichte und Geologie, Hamburg 1848; E. Lindemann, Die Nordseeinsel Helgoland in topographischer, geschichtlicher, sanitärer Beziehung, Berlin 1890; Tittel, Die natürlichen Veränderungen Helgolands und die Quellen über dieselben, Leipzig 1894.

mannische Küste Frankreichs[1]) gestatten die Verfolgung des Prozesses, und zwar enthält vorzugsweise die erstere zahlreiche Zerstörungen in verschiedenen Stadien; tiefe Löcher sind in den Uferfels hineingespült, und endlich klafft das breite



Fig. 1 b.

Tor, welches jedoch nur selten eine längere Lebensdauer besitzt und zuletzt zusammenbricht. Das im Jahre 1865 eingestürzte Mörmersgatt (Fig. 1a) gibt einen vortrefflichen Beleg in dieser Beziehung[2]); ein hinsichtlich der Breitenausdehnung sehr verschiedener tritt in die Erscheinung in Fig. 1b, welche wir nach einer Photographie von E. Chaix wiedergeben. Der schmale Felsenspalt findet sich im Granit der Kanalinsel Jersey. Weit dauerhafter wird allem Vermuten nach der „Arco naturale“ (Fig. 2) auf der Insel Lacroma nächst

[1]) Vgl. G. v. Zahn, Die zerstörende Arbeit des Meeres an Steilküsten nach Beobachtungen in der Bretagne und Normandie in den Jahren 1907 und 1908, Halle a. S. 1909.

[2]) Wiebel, a. a. O., S. 205.

Ragusa[1]) sich erweisen, weil er etwas über der normalen Wasserlinie liegt und angesichts des fast gänzlichen Fehlens von Ebbe und Flut im Adriatischen Meere die Brandung nur ausnahmsweise und gelegentlich ihr Zerstörungswerk fortzusetzen vermag. Was diese Durchbohrung einer Küstenwand im kleinen, das ist im großen das viel besprochene Loch, welches sich auf der norwegischen Insel Torghatten durch einen recht stattlichen Bergklotz hindurchzieht[2]) und von uns einer eingehenden Erörterung schon um deswillen zu unterziehen ist, weil wir auf diese Weise einen natürlichen Übergang zu unserem Hauptprobleme erhalten.

Die nördlich von Trondjem die Küste Norwegens begleitenden Felseilande sind nach Vibe, dessen einschlägige Beschreibung[3]) wohl die beste vorhandene ist, reich an Zerklüf-

---

[1]) Als Resultat der Klippenbrandung kennzeichnet ihn richtig Band (Dalmatien, das Land der Sonne, Wien-Leipzig, s. a., S. 87 ff.). Wohl genau ebenso verhält es sich mit dem „Bürgermeistertor“ auf der nördlich von Norwegen gelegenen Bäreninsel (O. Torell-A. E. Nordenskiöld, Die schwedischen Expeditionen nach Spitzbergen und Bären-Eiland in den Jahren 1861, 1864 und 1868, deutsch von L. Passarge, Jena 1869, S. 391). Andere einschlägige Beispiele zitiert Früh (a. a. O., S. 24 ff.) von Neu-Seeland und Irland, sowie von der Normandie („Roche perçée“ bei Lorient). Hierüber gibt auch Aufschluß F. Ratzel (Die Erde und ihr Leben, 1. Band, Leipzig 1902, S. 378 ff.). In Kalifornien, China, Japan, überall, wo die Brandungswoge einer Steilküste stark zusetzt, lassen sich Felstore nachweisen, deren Familienähnlichkeit mit denen von Helgoland unverkennbar ist.

[2]) Das Wort würde deutsch durch „Markthut“ wiederzugeben sein. Die Etymologie wird beim Betrachten der Abbildung verständlich; auf ziemlich flachem Grunde, der die Krempe des Hutes abgibt, erhebt sich der Fels einem Bienenkorbe ähnlich. Er ist mehrfach angebrochen und in der Mitte ganz durchlöchert. Zahlreiche kleine Scheren umsäumen den Inselfuß.

[3]) A. Vibe, Küsten und Meer Norwegens, Petermanns Geographische Mitteilungen, Ergänzungsheft Nr. 1, Gotha 1860, S. 6 ff. Vom 65. Parallel an ändert sich das Aussehen der vom Festland losgelösten Inseln; die Böschung wird steiler, die Basis der spitz aufragenden Berge kleiner, das Gesamtbild großartiger. „Torghatten bietet eines von diesen wunderbaren Naturschauspielen dar, das wegen seiner riesenhaften, im-



Fig. 2.

ponierenden Dimensionen umsoviel größeres Erstaunen bei dem Beschauer erweckt". Aus weiterer Entfernung geht der Anblick des Vorlandes verloren, so daß der Fels direkt aus dem Wasser aufzusteigen und auch viel höher zu sein scheint, als er in Wirklichkeit ist. So hat ihn denn auch L. v. Buch (Reise durch Norwegen und Lappland, 1. Teil, Berlin 1815, S. 273) gewaltig überschätzt, nämlich auf 2000 Fuß, während die Höhe nicht ganz 1000 Fuß beträgt. Es ist dies deshalb begreiflich, weil er die Insel nur aus weiter Ferne sah, wie er denn auch von der Durchbohrung gar nicht spricht. Nachstehend seine eigenen Worte: „Nun zeigt sich die sonderbare Gestalt Torghalten (sic!), die schon von sehr weit Helgelands Grenzen bezeichnet; das ist ein Berg wie eine Pyramide steil und prallig, bis vielleicht 2000′ Höhe. Man sieht ihn

tungen; eine solche geht auch Ridoehullet[1]) auf Moskenäsö (68° 2′ n. Br.) quer durch den Inselkörper hindurch. Alle diese Höhlen treten aber weit in den Hintergrund, wenn man sie (Fig. 3) mit Torghatten (65° 24′ n. Br.) vergleicht. Eine hohe, gewölbte Öffnung durchdringt in der Horizontalen — der Meeresabstand der beiden Mundlöcher des Stollens ist nahezu gleich — den ganzen Felskoloß; die Wände steigen senkrecht an und sind geglättet, so daß man fast versucht wäre, an eine menschliche Tätigkeit zu denken. „Es ist ein unbeschreiblich schöner und erhabener Anblick, durch dieses



Fig. 3.

auf viele Meilen im Meer und er dient häufig den Schiffern zum Merkzeichen". Früh (a. a. O., S. 26) erwähnt, daß da ein guter Beleg negativer Strandverschiebung vorliegt.

[1]) „Hullet" ist gleichbedeutend mit Loch. Die anderen Höhlen reichen nicht bis zur gegenüberliegenden Bergwand, obwohl sie zum Teil auch eine beträchtliche Länge haben und Vibe einmal 250 Schritte weit in eine solche eindrang, ohne bis an das Ende zu gelangen.

Riesenteleskop das außen liegende Meer mit den unzähligen Inseln, Scheren und den davor sich brechenden Wellen zu beschauen, wenn dies alles von der Sonne beleuchtet erscheint.“ Nach v. Knebel[1]) beträgt die Seehöhe des Tunnelbodens 124 m, seine Länge 160 m, seine durchschnittliche Breite 17 m, und die Höhe des Hohlraumes schwankt zwischen 20 m und 75 m.

Darüber, daß die Wellen durch eine allerdings eigenartige Abrasion die Höhle gebildet haben, kann ein Zweifel kaum herrschen. Heutzutage wären sie hiezu freilich nicht mehr imstande, da ja, wie wir sahen, die Brandung jetzt nur noch den Sockel des Inselberges bespült. In früheren Zeiten dagegen war das anders, und wir haben ja gerade an der norwegischen Küste die allerbeste Gelegenheit, uns über die stetige negative Veränderung in der Lage der Küstenlinie zu orientieren, weil die bekannten, von vielen Reisenden beschriebenen Strandlinien nichts anderes als Wassermarken der Vergangenheit sind. Die auf sie bezüglichen Arbeiten der Norweger Mohn, Pettersen, Hansen, Kjerulf usw. hat Lehmann, verbunden mit eigenen Beobachtungen, in Deutschland bekannt gemacht[2]), und in einem Einzelfalle wurde von Bravais dargetan[3]), daß ein Blasentanghorizont zur Bestimmung einer vorzeitlichen Strandlinie ebensogut wie eine von den Wogen herausgebrochene Hohlkehle verwendet werden kann. Es ist zwar nicht in Abrede zu stellen, daß die uns zugänglichen Einschnitte und Terrassen durchschnittlich niedriger als der Durchbruch am Torghatten gelegen sind und im wesentlichen mehr an den Steilküsten der Fjorde als an der freien Meeresküste vorkommen[4]). Gleichwohl wird an der Abrasionshypothese

---

[1]) W. v. Knebel, Höhlenkunde, S. 174.

[2]) R. Lehmann, Zur Strandlinienfrage, Zeitschr. f. d. ges. Naturwissenschaften, 53. Band, S. 280 ff.; Über ehemalige Strandlinien im anstehenden Fels in Norwegen, Halle a. d. Saale 1879.

[3]) Vgl. hiezu Martins-C. Vogt, Von Spitzbergen zur Sahara 1. Teil, Jena 1872, S. 152.

[4]) Auf diese bemerkenswerte Tatsache lenkte unsere Aufmerksamkeit, wie es scheint, zuerst A. Penck (Morphologie der Erdoberfläche, 2. Band, Stuttgart 1894, S. 566).

nicht zu zweifeln sein, weil die Örtlichkeit allzu entschieden für sie spricht, und weil für sie auch ein von Vibe (a. a. O.) hervorgehobenes Moment ins Gewicht fällt. Der Boden des Tunnels ist so gut wie eben und von feinem Sande bedeckt, was in jedem Falle auf eine ausgiebige Arbeit des Wassers hinweist. Aber selbstverständlich muß das bewegte Wasser eine Stelle gefunden haben, an der es seinen Destruktionseffekt leichter als anderswo betätigen konnte, und insofern sind die Betrachtungen, welche demnächst über Durchstoßungshöhlen überhaupt anzustellen sein werden, auch für diesen Grenzfall maßgebend. Genau das gleiche muß für je eine ähnliche Höhlenbildung gelten, welche in dem zitierten Werk v. Knebels (a. a. O.) von Island und den Fär-Öern angeführt werden. Hier zeigt sich die Torhöhleninsel, die somit ihr auszeichnendes Merkmal im Namen erkennen läßt, dort erscheint die Nadelinsel von einer perforierenden Strandhöhle durchschnitten. Grundsätzlich sind solche Strandhöhlen nicht verschieden von anderen bekannten Naturspielen dieser Art, wie wir sie etwa in der Fingalshöhle der Basaltinsel Staffa oder in den wegen charakteristischer Farbenphänomene diesen Namen führenden blauen Grotten von Capri und Busi (Dalmatien) kennen. Die Stoßkraft des brandenden Meeres war entweder nicht groß genug oder die Mächtigkeit der Gesteinsmasse war zu groß, und so bildete sich nur jene Hohlform heraus, für welche neuerdings das Wort Halbhöhle[1]) gebräuchlich geworden ist.

Wir wenden uns nunmehr der Bergdurchbohrung im engerem Sinne zu, den Naturtunnels, die sich in größerer Höhe befinden, bei deren Aushöhlung andere Kräfte, als die bisher in Betracht gezogenen, als hauptsächlich tätig anzunehmen sind. Das Material, welches zur Entscheidung der einschlägigen morphologischen Fragen zu Gebote steht, wird sich wahrscheinlich noch sehr vermehren lassen; für den Augen-

---

[1]) Über Halbhöhlen und die Formen, welche sich diesem Gattungsbegriffe einordnen lassen, verbreitet sich v. Knebel (a. a. O., S. 171 ff.).

blick indessen sind es die folgenden Erscheinungen, auf deren Studium unsere Erklärung der orographischen Fenster beruht. Im ganzen handelt es sich um siebzehn Örtlichkeiten:

1. Breitenstein in Oberbayern,
2. Drachenloch am Untersberg,
3. Nixlöcher an der Drachenwand im Salzkammergut,
4. Teufelslöcher am Hochkönig in den Berchtesgadener Alpen,
5. Melkerloch am Birnhorn im Mitterpinzgau,
6. Prestrelenik und Prisanig in den Grenzgebieten von Krain, Kärnten und Venetien,
7. Martinsloch an den Tschingelhörnern (Grenze von Glarus und Graubünden),
8. Säntisgruppe mit mehreren Fenstern,
9. Wildkirchlihöhle im Kanton Appenzell (Innerrhoden),
10. Mürtschenstock am Walensee,
11. Hochloch am Kistenpaß (Grenze von Glarus und Graubünden),
12. Böser Faulen im Kanton Glarus,
13. Chriesiloch am Pilatus,
14. Martinsloch am Eiger (Berner Oberland),
15. Aiguilles Rouges in der Montblancgruppe,
16. Monte tafonato in Korsika,
17. Sierra de la Ventana in Argentinien.

Ehe wir in die Besprechung der Einzelheiten eintreten, wollen wir uns mit den Möglichkeiten beschäftigen, von denen a priori die Fensterbildung abhängen kann. Es ist leicht einzusehen, daß petrographische, tektonische, erosive Bedingungen gegeben sein müssen, wenn in namhafter Entfernung vom Erdboden die Agentien, von deren Vorhandensein jedwede Höhle abhängig ist, mit hinreichender Kraft einsetzen sollen, um die Durchlochung eines vielleicht nicht einmal besonders mächtigen Felsrückens zuwege zu bringen.

Daß die Gesteinsbeschaffenheit nicht gleichgültig ist, bedarf keines Beweises. Denn, wenn der Fels ganz homogen

ist, wird sich weit weniger leicht ein Ansatzpunkt zur Herausschälung einer zunächst nur geringfügigeren Menge von Materie ergeben, als wenn sich die betreffende Wand aus Substanzen von abweichender Widerstandskraft gegen äußere Einwirkungen zusammensetzt. Weiches Gestein, in härteres eingebettet, wird rascher und leichter erodiert, und es ist bekannt, daß es in ähnlichen Fällen zu ganz merkwürdigen Halbhöhlen- und sogar Seebildungen kommen kann[1]. Für minder wahrscheinlich möchten wir es hingegen halten, daß einzig und allein die Verschiedenartigkeit der Gesteine, aus denen ein Gebirgsglied besteht, die Entstehung eines wirklichen Tunnels zu veranlassen imstande war. Es müssen da vielmehr noch jene anderen Ursachen mitwirken, auf welche vorhin hingewiesen ward. Daß tektonische Veränderungen hier weit einflußreicher sind, als man vielleicht auf den ersten Blick zu glauben geneigt sein könnte, wird eine Durchmusterung der obigen Tabelle außer Zweifel stellen. Diejenigen Bewegungen, welche sich radial vollziehen und Sprünge, Verwerfungen, Horst- und Grabenbildung im Gefolge haben, werden nicht viel zu bedeuten haben, wie denn auch in Massengebirgen, die unter dem Zeichen solcher Vertikalkräfte stehen, durchgehende Naturhöhlen nicht vorkommen. Desto bedeutsamer sind die tangentialen, in Lateralschub sich auslösenden Bewegungsimpulse, welche den Faltengebirgen zum Dasein verholfen haben, und gerade in diesen letzteren sind auch die

[1] Als ein typisches Beispiel möge der kleine Telpssee im Karwendelgebirge dienen, der von R. Schaefer (Über die geologischen Verhältnisse des Karwendels in der Gegend von Hinterriß und um den Scharfreiter, München 1888, S. 27) als reines Erosionsbecken definiert worden ist. Eine Reihe von Schichten, die unter ungefähr 45° fallen, streicht am steilen Bergabhange zutage aus, und unter jenen der Triasperiode ist der Plattenkalk den Kößener Schichten an Widerstandsfähigkeit gegen die Ausnagung durch die Atmosphärilien weit überlegen. Deshalb bildet er einen festen Rand um die Aushöhlung, welche in den obersten Triasbänken und auch noch in dem darüber liegenden untersten Jura vor sich ging, und als die so präformierte Mulde sich nach und nach mit Wasser füllte, war die Seebildung vollzogen.

durchbohrten Berge zu Hause. Fallen doch von unseren vierzehn Vorkommnissen nicht weniger als zwölf auf die Alpen, das klassische Gebirge des Faltungsprozesses. Es ist denkbar, daß ein Loch unmittelbar aufgequetscht wird[1]; zumeist allerdings wird nur jene Stelle einer Falte, bei welcher die stärkste Materialbeanspruchung zu konstatieren ist, den Angriffen der zerstörenden Kräfte am meisten ausgesetzt sein. Wenn eine gewöhnliche Höhle in der Nähe eines Berggipfels entstanden ist, so wird gewiß an eine nicht unerhebliche Mitwirkung der geodynamischen Einflüsse zu denken sein[2]. Und so gut man gewisse Seen als tektonische Bildungen, nämlich als durch Aufsprengung einer Antiklinale entstanden sich denken kann[3], ebensowohl wird man sich die Vorbereitung einer Durchlochung in solcher Weise zurechtlegen können. Freilich aber wird gewöhnlich der dritte der oben genannten Faktoren notwendig sein, um zu Ende zu führen, was durch

[1] Die früher vom Verfasser (Handbuch der Geophysik, 2. Band, Stuttgart 1899, S. 900) ausgesprochene Ansicht, daß die Geotektonik mit der Höhlenbildung nicht allzuviel zu tun haben möge, ist derselbe einigermaßen zu modifizieren geneigt. Gerade die Höhlen, insbesondere auch diejenigen des Karstes, für welche Gebirgsformation jene ja eine so gewichtige Rolle spielen, legen die Überzeugung nahe, daß die Erosion, so wichtig sie in Karstregionen sich nach der mechanischen wie chemischen Seite betätigt, nicht ausreicht, um der Vielgestaltigkeit der bezüglichen Phänomene gerecht zu werden.

[2] Speziell für die in sehr großer Höhe gelegene Höhle an einem der bekanntesten bayerischen Aussichtsberge ist eine tektonische Entstehungsursache bestimmt in Anspruch genommen worden (J. Baumann, Eine Höhle im Wendelstein, Mitteil. d. Deutsch-Österreich. Alpenver., 9. Jahrgang, S. 261 ff.). Den Gedanken scheint zuerst Buckland (Über die Entstehung der Höhlen, N. Jahrb. f. Mineral., Geol. und Paläontol., 1837, S. 74) angedeutet zu haben.

[3] So erklärt Desor die bekannten Kombenseen im Schweizer Jura (Sur l'origine des lacs Suisses, Annales des sciences physiques et naturelles, 1870, S. 182 ff.). Man hat wohl, wie dies zumal durch O. Peschel (Neue Probleme der vergleichenden Erdkunde, Stuttgart 1883, S. 165 ff.) geschah, die Desorsche Seenklassifikation zu sehr schematisch verallgemeinert, und deshalb hat sie manch begründeten Wiederspruch erfahren, aber ein gesunder Kern liegt ihr allem Anscheine nach doch zu Grunde.

die beiden anderen begonnen und vielleicht bis zu einem gewissen Grade schon vollendet worden war.

Welche Modalität der Erosion dabei in Betracht kommt, wird in jedem Sonderfalle Gegenstand einer selbständigen Untersuchung sein müssen. Natürlich wird auch ein Zusammengreifen verschiedener Formen des Auftretens destruktiver Kräfte nicht ausgeschlossen sein. Im folgenden sollen also jetzt die



Fig. 4.

vorhin aufgezählten Fälle auf ihre individuelle Eigenart geprüft werden.

1. Die Höhlung am Breitenstein, einem Nachbarberge des Wendelsteins, erweist sich als ein Randfenster, so daß auf der einen Seite der Wand nur eine sehr geringe Dicke zukommt. Auch die Tiefe der Lücke ist nur eine geringe, und es wird deshalb angenommen werden dürfen, daß das rinnende Wasser eine durch Verwitterung gelockerte Stelle in der vorspringenden Bergflanke allmählich erweitert und in eine Höhle umgewandelt hat, deren gegenüberliegende Wandung zuletzt ebenfalls zermürbt und endlich entfernt worden ist. Unsere Abbildung (Fig. 4) wird genügen, um die Wahrscheinlichkeit einer solchen Deutung des genetischen Vorganges darzutun.

2. Der die oberbayerische Ebene beherrschende, sagenreiche Untersberg ist überaus reich an Höhlen, von welchen diejenigen, in deren Innerem sich Eis das ganze Jahr hindurch erhält, einer sorgfältigen Untersuchung und Beschreibung durch Fugger[1]) teilhaftig geworden sind. Von ihnen abgesehen, zeichnet sich das sogenannte Mausloch durch stattliche Dimensionen aus; es durchsetzt in einer Höhe von 689 m den Berg weithin, endet jedoch schließlich in einem vertikalen Schlunde, der in größerer Tiefe Wasser enthält. Für uns ist wichtiger das Drachenloch[2]), welches indessen auch mehr nur als Randfenster zu betrachten ist. Nur befindet es sich nicht an der Seite, sondern nahe dem Kamme des Berges. Es ist etwa 6 m hoch, 3 bis 4 m breit. Von einem geeigneten Punkte der Landstraße zwischen Grödig und St. Leonhard aus kann man durch

[1]) Fugger, Beobachtungen in den Eishöhlen des Untersberges bei Salzburg, Salzburg 1888.

[2]) Die Tradition verlegt mit Vorliebe in Berghöhlen die Wohnstätte der Fabeltiere, deren Realität noch bis in die neuere Zeit herein kaum ernsthaft angezweifelt wurde (Goethe: „In Höhlen wohnt der Drachen alte Brut“). Im Zusammenhange hat, was sich über die verdächtigen Örtlichkeiten erkunden ließ, dargestellt Freylauff (Salzburger Volkssagen, Wien-Pest-Leipzig 1880).

das Loch den blauen Himmel wahrnehmen. Früher existierte ein ähnlicher Felsbogen unmittelbar vor den sogenannten „Windlöchern“, allein derselbe ist seit dem Jahre 1875, aus welchem Fuggers Zeichnung[1]) stammt, in sich zusammengebrochen.

3. Zwischen den drei Seen Fuschl-, Mond- und St. Wolfgangssee erhebt sich ein Gebirgsstock, der in etwa 800 m Höhe einen teilweise vertorften Grund, das „Wildmoos“, umschließt. Nördlich begrenzt die Mulde die bis zu 1169 m ansteigende Drachenwand, und an dieser befinden sich zwei Fenster, deren eines vom Marktflecken Mondsee aus gesehen werden kann. Das andere, das Nixloch im engeren Sinne[2]), liegt ungefähr 10 m unter der Kammhöhe an einem Orte, wo die Felswand 60 m Dicke aufweist. Die Durchbohrung schien früher keine vollständige zu sein, indem Trümmergestein den jenseitigen Ausgang verstopfte, aber bei nochmaliger Begehung des Terrains fand sich, daß eine allerdings schmale Öffnung existierte, durch welche Wasser auslief. Nach Fugger hatte sich hier der alte See, von dem jetzt im tiefer gelegenen Eibensee nur noch ein schwacher Rest zu erkennen ist, einen Durchgang durch das ihn umgebende Gestein erzwungen; an dem benachbarten Feldberg seien alte Strandmarken, Aushöhlungen, die nur von dem Wellenschlage des bewegten Wassers herrühren können, deutlich zu unterscheiden. Das petrographische Moment macht sich bei dieser Höhlenbildung sehr deutlich geltend. Die Basis der Drachenwand wird gebildet von Raibler Schichten, die an der Nordseite anstehen und sehr undurchlässig sind, während die Perforation sich gerade an der Trennungsfläche zwischen

[1]) Fugger, a. a. O., S. 74.

[2]) Hierüber gibt Aufschluß eine Abhandlung von Fugger (Salzburgs Seen, VI., Mitteil. d. Gesellschaft f. Salzb. Landeskunde, 43. Band, S. 91 ff.). Eine anderweite Schilderung der offenbar sehr interessanten Gegend scheint es nicht zu geben, auch nicht in den alpinen Fachzeitschriften. „Nix“ ist in der Volkssprache einerlei mit jener emailartigen Überkleidung der Wände und Böden vieler Tropfsteingrotten („gours“ im Französischen), welche anderwärts auch „Bergmilch“ genannt und von den Landleuten als Spezifikum gegen Menschen- und Viehkrankheiten angesehen wird.

jenen und dem darüber gelagerten Hauptdolomit befindet. Wenn Fuggers Vermutung zutrifft, so wäre, was die Durchgrabung des Felsens anlangt, eine gewisse Ähnlichkeit zwischen dem Loche der Drachenwand und dem der Insel Torghatten (S. 378) unverkennbar.

4. Der Weg auf die Wetterwand am Hochkönig, der höchsten Erhebung des unter dem Namen Übergossene Alp bekannten, in das Salzachtal vorspringenden Massivs führt zu zwei Felslöchern, bei denen statt des Drachen der Teufel Namengeber war. Man kann dieselben auch von geeignetem Standpunkte im Tale aus sehen. Die Angabe des Trautweinschen „Führers", daß nur das eine der beiden Teufelslöcher passierbar sei, ist in den späteren Ausgaben des Buches weggeblieben. Eine wissenschaftliche Charakteristik der beiden Öffnungen, die wohl auch noch mehr in die Klasse der Felstore gehören, dürfte bis jetzt noch nicht versucht worden sein.

5. Mit den Drachen- und Teufelslöchern konkurrieren als Schauplätze alter Märchen die Melkerlöcher[1]); sie kennzeichnen einen Ort, an dem der Böse einen Sennen geholt hat, der mit der seinem Herrn gehörenden Milch unredliche Manipulationen vorgenommen hat. Als Naturfenster ist nur eines von diesen Löchern zu bezeichnen, und zwar gehört dasselbe dem Mitterhorn des Birnhornstockes an, welcher südlich gegen das Tal von Leogang, westlich gegen die Ebene von Lofer abfällt. Nach Norden hat der Tunnel nur eine große Öffnung, nach Süden öffnen sich zwei Mundlöcher, ein kleines oberes in Kreuzform, ein größeres unteres von mehr länglicher Gestalt[2]). Da der Gang sehr hoch (2150 m) gelegen ist, so genießt man eine prächtige Aussicht in das Salzach- und Saalachtal, sowie auf die Kette der Großen Tauern. Die Dimensionen sind: Länge gegen 6 m, Breite 3 m, Höhe über 2 m. Die Literatur kennt

---

[1]) Vgl. hiezu Freylauff (a. a. O., S. 359 ff.).

[2]) Diese Einzelheiten hat (s. o.) der Verfasser Herrn Prof. Fugger zu danken; bei Trautwein ist von dem Melkerloch nur als von „gewaltigem natürlichem Durchgang" die Rede.

zwei Aufsätze über das Pinzgauer Melkerloch[1]). Daß das letztere seine Eigenschaft, ein richtiges orographisches Fenster geworden zu sein, in letzter Linie nur der Erosion der Atmosphärilien verdankt, erhellt aus dem Umstande, daß die Bergwand am südlichen Steilabsturze nur höchstens 20 cm dick gewesen ist. Die Höhle als solche wird, da angesichts der Homogeneität des Triaskalkes Ungleichheiten der Struktur nicht ins Gewicht fallen dürften, tektonisch präformiert und durch fortgesetzte denudatorische Eingriffe zu dem gemacht worden sein, was sie heute ist.

6. Der nördliche Gipfel der Kaningruppe, der Prestrelenik, wird, wie Gstirner[2]) berichtet, von einem Naturtunnel durchsetzt, der selbstredend auch zu einem Volksmythus den Anlaß gegeben hat. Was den Bergnamen betrifft, so soll das Wort auf Deutsch „der Durchschossene" heißen[3]). Eine Skizze der Durchbohrung hat auch der ältere Marinelli, der hochverdiente Erforscher der Friauler Berge — zu denen als Grenzgebiet auch der Kanin zu rechnen ist — in seiner Beschreibung der Täler des oberen Tagliamento und seiner Nebenflüsse gegegeben[4]). Auffallen mag, daß die Lücke in zweien unserer besten Alpenführer, bei Trautwein und in dem von Frischauf bearbeiteten, sonst nie versagenden dritten Bande der Meyerschen Reisebücher („Deutsche Alpen") unerwähnt geblieben ist. Wohl aber ist hier (Leipzig 1887, S. 245) namhaft gemacht das „große Felsloch" am 2555 m hohen Prisanig, welches auf die Station Kronau der Tarvis-Laibacher Eisenbahn herabschaut. Die „Internationale Mono-Gesellschaft" in München hat für ihr Mono-Album auch eine hübsche Abbildung dieses Ortes herstellen lassen (Fig. 5), und im Begleittexte heißt es:

---

[1]) Zeitschr. d. Deutsch. u. Österreich. Alpenver., 8. Band, S. 236; Tourist (herausgeg. von G. Jaeger), 15. Jahrgang, S. 2.

[2]) A. Gstirner, Die Julischen Alpen, Zeitschr. usw., 36. Band, S. 373.

[3]) Der Stamm des Wortes ist wahrscheinlich das serbokroatische prestrici, welches „durchschneiden" bedeutet. Der Prestrelenik wäre dann „der durchschnittene Berg".

[4]) G. Marinelli, Guida del Canal del Ferro, Udine 1894, S. 111.

„Wer von Kronau auf dem vielbenützten Übergange über den Verschetzsattel in das sagenberühmte Trentatal wandert, wird im Aufstiege zur Voßhütte nicht allzu schwer an der rechten Gipfelkante des Prisanig ein Loch entdecken, durch welches nicht selten „der Nebel gar neckisch hervorquillt“; es ist das berühmte „Fenster des Prisanig“, welches übrigens nur mittelst einer schwierigen Felskletterei erreicht werden kann.

7. Weitaus zu den bekanntesten Naturfenstern gehört das Glarner Martinsloch, und es bietet somit auch dem, der sich mit der Entstehung dieser Bildungen beschäftigen will, aus dem Grunde ein höheres Interesse, weil die Bedingungen des Vor-

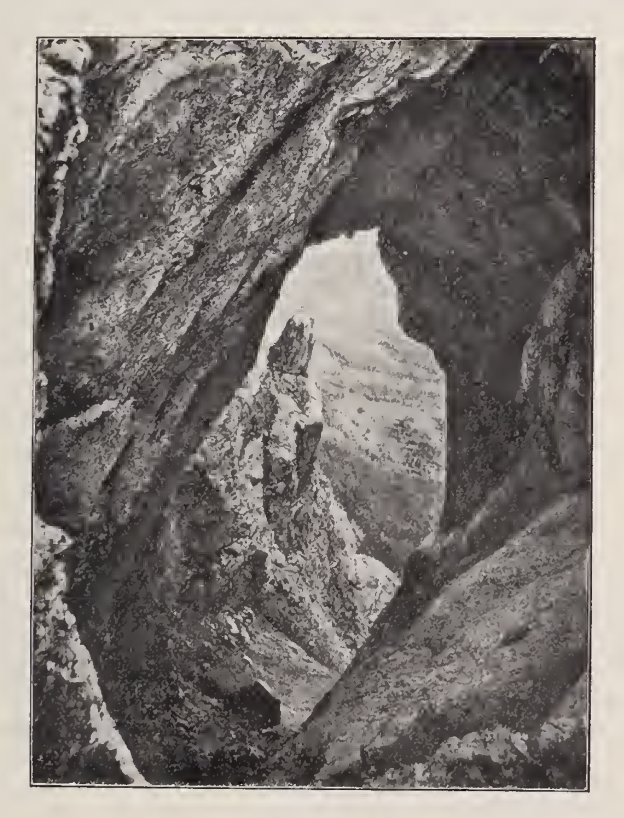


Fig. 5.

ganges, an sich ziemlich kompliziert, durch eine ganze Reihe von Untersuchungen, welche zwar an sich ein anderes, höher liegendes Ziel hatten, indirekt aber doch auch die uns angehenden kausalen Fragen klärten, weit besser zu übersehen sind, als dies in vielen anderen Fällen möglich ist. Was das Loch einem größeren Publikum merkwürdig macht, ist seine Eigenschaft als Gnomon oder Sonnenzeiger; an zwei Tagen des Jahres, am 12. März und am 1. Oktober, bescheint durch dasselbe die Sonne die Kirche des durch die Bergsturzkatastrophe von 1880 nur zu berühmt gewordenen Dorfes Elm. Gerade hier ist, wie unsere Figur 6 ausweist, eine ganz besonders interessante Stelle tektonischer Umgestaltung. Wir befinden uns nämlich im Bereiche der vielgenannten Glarner Doppelfalte, deren wahre Natur zuerst 1884 von M. Bertrand erkannt, in den neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts aber durch Schardt und Lugeon vollständig erschlossen worden ist[1]. Wir wissen jetzt, daß wir es in diesen Gebirgsteilen, deren Vertikalgliederung zuerst gar nicht erschlossen werden zu können schien, nicht sowohl mit einer Überschiebung, als mit einer Überfaltung („nappe de recouvrement") zu tun haben. Paläozoische, mesozoische und tertiäre Schichten wurden in merkwürdigster Weise in einander hinein „gewalzt", so daß der permische Verrucano über den eozänen Flysch zu liegen kam. „Die Tschingelspitzen sind von der Verwitterung aus dem Verrucanoschiefer herausmodelliert, der selbst nur die Basis eines höheren abgewitterten Gebirges war. Der helle Kalkstein unter der weithin auffallenden ebenen Überschiebungsfläche ist der verknetete Jurakalk des verkehrten Mittelschenkels der Glarner Faltendecken. Ein Keil der unterliegenden Flyschschiefer ist in den Kalk hineingewalzt und hat, zusammen mit einem kleinen Vertikalbruch, die Auswitterung des Martinslochs veranlaßt"[2]. Man wird sich kaum einen treffenderen Beleg dafür denken können, daß die Lochbildung gelegentlich fast

---

[1]) Alb. Heim, a. a. O., S. 5 ff.

[2]) Ebenda, S. 25.

ausschließlich auf tektonischem Wege[1]), mit nur geringfügiger Hilfsaktion von Verwitterung und Denudation, vor sich gehen kann, indem allerdings der Umstand, daß der Kontraktionsprozeß der Erdrinde sehr verschiedenartige Gesteinsarten miteinander in innige Berührung gebracht hat, dss seinige beitrug.

8. 9. 10. 11. 12. 13. Alle diese Vorkommnisse, auf welche Heim unsere Aufmerksamkeit hinlenkte, gehören der gleichen tektonischen Region an, sind also mutmaßlich auch durch die inneren Bewegungen der Gebirgsteile vorbereitet worden und haben nachher allmählich die Fensterform der Gegenwart angenommen. Die Säntisgruppe zeigt sie da, wo der Schratten-

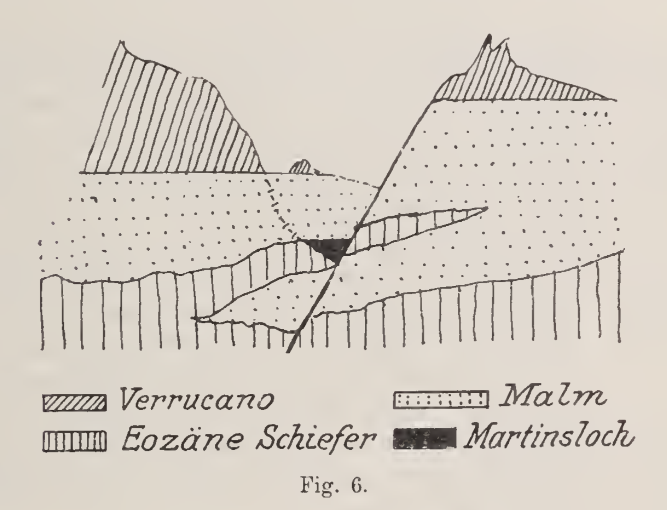


Fig. 6.

[1]) Über die mechanische Seite des geologisch gelösten Auswalzungsproblemes hat sich Heim an anderem Orte des näheren ausgesprochen (Geologie der Hochalpen zwischen Reuß und Rhein, Beitr. z. Geolog. Karte d. Schweiz, 25. Lieferung, Bern 1891, S. 172 ff.). Vgl. auch dessen großes Werk (Untersuchungen über den Mechanismus der Gebirgsbildung, Basel 1878, Atlas, Tafel II), bei dessen Abfassung allerdings die erst seitdem gewonnenen neuen Einsichten über die Erweiterung des Faltungsbegriffes, wie sie sich seit 20 Jahren durchgesetzt haben, noch nicht zur Geltung hatten gelangen können. Der erwähnte Begriff ist indessen davon unabhängig.

kalk, von Hause aus horizontal abgelagert, eine Senkrechtstellung erfahren hat, wo mithin auch das sichtbare Zeichen einer großartigen Erdrevolution gegeben ist. Die 150 m lange Felshöhle, welche die Wildkirchli-Grotte mit dem Hochplateau der Ebenalp verbindet und im Roman „Ekkehard" eine gewisse Rolle spielt, gehört den Außenbezirken des Säntissystemes an und unterlag also wohl auch analogen Entstehungsgesetzen, indem hier nur die Auswaschung des rinnenden Wassers unentbehrlich war, wenn der gewundene Gang zustande kommen sollte. Der Nordgrat des Mürtschenstocks weist im Malm mehrere Löcher auf; durchlocht ist auch der Nordgrat des Bösen Faulen, wie man sich von Richisau im Klöntal aus überzeugen kann[1]). Das „Hochloch" perforiert den Kreidekalk; ein Anzeichen für die Möglichkeit, daß jedwede Formation bei diesen Phänomenen beteiligt sein kann. Das „Chriesiloch" dürfte einer literarischen Erwähnung zuerst in der Pilatus-Monographie des wackeren Alpenforschers Cappeler[2]) teilhaftig geworden sein. Es findet sich ebenfalls im erwähnten Schrattenkalk und stellt sich dar als überdeckter Kamin von 6 bis 7 m Höhe, der sich ganz nahe an der Spitze (nur wenige Minuten von Pilatus-Kulm entfernt) eines der besuchtesten Aussichtsberge der Schweiz befindet. Aus Figur 7 erhellt, daß der unterirdische Gang gegen den Horizont geneigt ist; es führt der übliche Weg vom Hotel „Klimsenhorn" zum höchsten Gipfel hindurch, und zwar müssen 52 Stufen überwunden werden. Daß nicht die Erosion allein diese Felsdurchbohrung bewirkt haben kann, ist wohl ebenso einleuchtend, wie etwa bei der oben (S. 385) genannten Höhle auf der Höhe des Wendelsteins.

14. Früh, der anhangsweise auch der Bergdurchbohrungen in engerem, d. h. in unserem Sinne gedenkt, erinnert (a. a. O.,

---

[1]) Ob die Lokalbezeichnung „Dreckloch" sich auf diese Gratöffnung oder auf eine andere Höhlenbildung des Faulenmassivs bezieht, muß hier unentschieden gelassen werden.

[2]) Marci Antonii Cappelerii Pilati Montis Historia, ab amico in lucem protracta atque Academicis Helvetiae Societatibus sacra, Basel 1767. Dort ist den Höhlen ein besonderer Abschnitt eingeräumt.



Fig. 7.

S. 127) daran, daß am Eiger, dem mächtigen Nebenberge der Jungfrau, ein schon vom alten J. J. Scheuchzer (*Οὐρεσιφοί-της* helveticus sive Itinera per Helvetiae alpinas regiones facta annis 1702—7 et 1709—11, 1. Band, Leiden 1723, S. 482) erwähntes Martinsloch sich befindet. Am 13. März und 11. Oktober wird durch dasselbe Grindelwald beschienen. Wir möchten auf die volkskundlich bemerkenswerte Tatsache aufmerksam machen, daß uns in dieser Besprechung schweizerischer Naturmerkwürdigkeiten einer ganz bestimmten Art das Wort „Martinsloch" bereits zweimal, daneben aber auch ein „Martinsbrünneli" (S. 375) begegnet ist.

15. Nur mit wenigen Worten gedenkt der bekannte Montblancforscher Favre[1]) einer Stelle, die zweifellos ebenfalls der von uns hier behandelten Gruppe angehört. Er sagt nämlich von der — durch ihre wilde Zerrissenheit auch dem Talwanderer auffallenden — Aiguille Rouge, sie sei „perçée à jour". Da, wo diese Durchlochung sich findet, ruhen mesozoische Schichten unmittelbar auf dem Gneis auf; es ist folglich auch da eine tektonisch-petrographische Ursache anzunehmen, welche das Terrain für die zerstörenden Kräfte zugerichtet hat.

---

[1]) A. Favre, Recherches géologiques dans les parties de la Savoie, du Piemont et de la Suisse voisines du Montblanc, 2. Band, Paris-Genf 1867, S. 323.

16. Die Insel Korsika ist, am meisten in ihrem nördlichen Teile, durch ein Phänomen geradezu ausgezeichnet, welches wohl nirgendwo anders in solcher Großartigkeit und Verbreitung beobachtet wird. Das sind die Tafoni (franz. Tafons) oder Felslöcher, und schon der Umstand, daß der korsische Dialekt dafür ein eigenes Wort geprägt hat, läßt erkennen, daß man es mit einer spezifischen Eigentümlichkeit des Landes zu tun habe. Penck hat[1]) sogar den Vorschlag gemacht, diese Provinzialbezeichnung direkt der wissenschaftlichen Terminologie einzuverleiben, und es würde sich das auch empfohlen haben, weil damit ein scharfer Begriff verbunden gewesen wäre. Natürlich kommen solche Tafoni nicht bloß da vor, wo sie zuerst diese ihre Benennung erhalten haben, sondern sie sind u. a. auch für die Sächsische Schweiz charakteristisch. Die früher viel umstrittenen „Opferkessel" des böhmisch-schlesischen Grenzgebirges gehören in dieselbe Kategorie[2]), mag auch der genetische Vorgang nicht durchaus der nämliche gewesen sein.

Überraschend spärlich ist die literarische Ausbeute, welche man beim Durchmustern der von Korsika handelnden Schriften bezüglich der Tafonis macht. Das überaus fleißig gearbeitete Verzeichnis, welches Prinz Bonaparte seinem Prachtwerke über die Insel beigegeben hat[3]), liefert den Beweis, wie stiefmütterlich überhaupt die geologisch-morphologische Seite der korsischen Landeskunde gegenüber der historisch-ethnographischen weggekommen ist. Auch in jenem Werke selbst geschieht der so auffälligen Felsbildungen keine Erwähnung, wenngleich der Autor die Route Bastia – Saint-Florent kennt[4]), und gerade

---

[1]) A. Penck, Morphologie der Erdoberfläche, 1. Band, Stuttgart 1894, S. 214 ff.

[2]) Diese Hohlformen wurden zusammenhängend abgehandelt vom Verfasser (Zur Frage der durch Verwitterung entstehenden Gesteinsaushöhlungen, Prometheus, 1909, 20. Jahrgang, Nr. 21 und 22).

[3]) Prince Roland Bonaparte, Une excursion en Corse, Paris 1891, S. 147 ff.

[4]) A. a. O., S. 52.

bei einer Wanderung über den Col de Teghime ergibt sich eine überraschende Gelegenheit zu Tafoni-Studien; ist doch einmal eine Felswand mit solcher Regelmäßigkeit durchlöchert, daß man unwillkürlich den Eindruck eines Kolumbariums bekommt. Das war auch schon dem sonst gar nicht geologisch fühlenden Landschaftsmaler Lear aufgefallen [1]), der die malerische Großartigkeit solcher Felspartien richtig erfaßt hat. Sehr

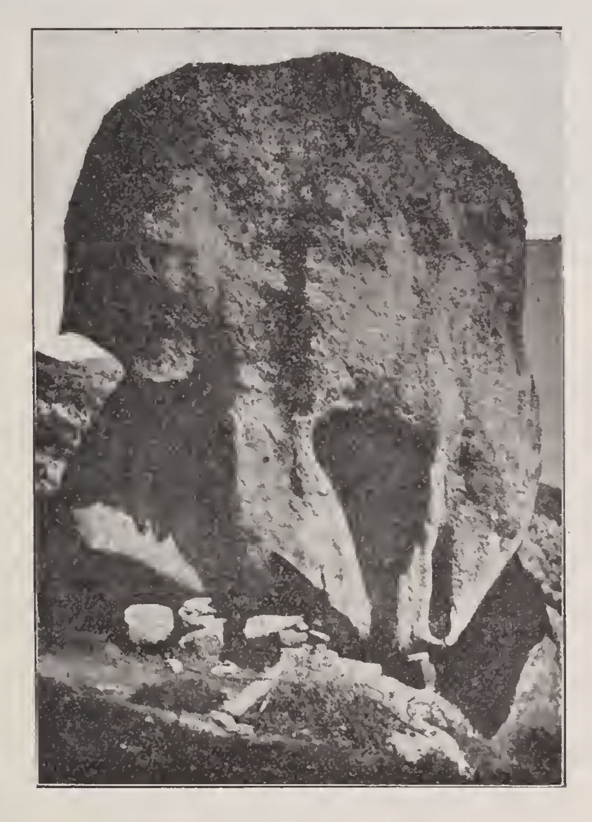


Fig. 8.

[1]) E. Lear, Journal of a Landskape Painter. London 1870. S. 211: „This pass of picheresquely overhanging rocks, with immense hollows or caves below them, is very fine."

zu bemerken ist das Nichtgebundensein an bestimmte Formationen; die Tafonis kommen im Sandstein (Elbsandsteingebirge), Kalk, Schiefer, Granit gleichmäßig vor. Unsere Abbildung[1]) (Fig. 8) macht uns mit einem „tafonierten" Urgesteinsfels bekannt, der von geradezu abenteuerlichen, tief einschneidenden Höhlungen durchsetzt ist.

Im Nordosten Korsikas erhebt sich der Monte dei tafoni, im Nordwesten der Monte tafonato. Deutet der Name des erstgenannten Berges darauf hin, das derselbe eine Fülle von solchen Löchern trägt, so ist vom anderen schon etymologisch vorauszusetzen, er sei ein perforierter Berg. Und so verhält es sich auch in der Tat. In großer Höhe zieht sich durch den Bergkörper eine angenähert horizontale Öffnung, in welcher, wie die Bevölkerung behauptet, ab und zu Mouflons, die jetzt nur noch auf den beiden westlichen Mittelmeerinseln sich aufhaltenden Wildschafe, eine Zuflucht suchen. Genaueres ist vom Monte tafonato nicht bekannt, weil seine Besteigung als eine ausnehmend schwierige angesehen wird.

Daß in der Entstehung dieses Naturtunnels nicht ein Sonderfall, sondern lediglich eine quantitative Steigerung der Kraftleistungen zu erkennen ist, welche überhaupt die Tafoni-Bildung veranlaßt haben, bedarf keines Beweises, so daß also auch bloß die generelle Frage hier erörtert zu werden braucht. Penck denkt, indem er sich auch auf die einschlägigen Untersuchungen eines norwegischen und eines amerikanischen Gelehrten bezieht[2]), an eine reine Verwitterungserschei-

---

[1]) Dieselbe stammt von der von Ajaccio aus viel besuchten „Bergerie".

[2]) H. Reusch, Jagtaggelser over iskuret Fjeld og frevitret Fjeld, Vedenskap Selbskap Forhandlingar, Kristiania 1878, Nr. 7; M. E. Wadsworth, Some Instances of Atmospheric Action in Sandstone, Proceedings of the Boston Society of Natural History, 1883, S. 207 ff. Reusch widmet den „Tafonier", wie sie in der dänisch-norwegischen Sprache heißen, mehrere Seiten desjenigen Teiles seiner Abhandlung, welcher die Verwitterungserscheinungen des archäischen Gesteines behandelt (S. 24 ff.). Die Abbildungen (zumal bei Punto di Lisa und Niolo) erinnern sehr an unsere achte Figur. Als Anfangsstadium der Tafoni-Bildung zeigen sich gewöhnlich längliche Einschnitte nach Maßgabe der



Fig. 9.

nung. Nun kann es wohl keinem Zweifel unterliegen, daß die gewöhnliche Verwitterung bei der Ausarbeitung derartiger Hohlformen primär in Betracht zu kommen hat; die Tatsache jedoch, daß eine ganz typische Regionalverbreitung der Tafoni unverkennbar ist, legt den Gedanken nahe, daß da, wo eine geographische Konzentration der Erscheinung zutage tritt, doch noch an ein anderes Agens gedacht werden muß. Als ein solches dürfte in Korsika die Deflation, die Erosion der bewegten Luft, in erster Linie Beachtung verdienen. Die Exposition der besonders stark „tafonierten" Felshänge scheint dafür zu sprechen, daß West- und Südwestwinde es

hiefür sehr bezeichnenden Fig. 9, welche dem K. Reallehrer Dr. F. Fischer in Fürth verdankt wird und den im Bette des Regenflusses (bei Nittenau im Bayerischen Wald) gelegenen Granitblock Schoberstein darstellt. Eine auch mit trefflichen Bildern ausgestattete Charakteristik pfälzischer Tafonis, welche auch der Ansichten von R. Beck und O. M. Reis über den Einfluß der Winderosion Erwähnung tut, ist in allerjüngster Zeit von D. Haeberle gegeben worden (Über Kleinformen der Verwitterung im Hauptbuntsandstein des Pfälzerwaldes, Heidelberg 1911).

sind, welche an der Auskolkung der kleineren und größeren Löcher im Gesteine sich vorwiegend beteiligen, und die Wucht der Weststürme ist allenthalben auf der Insel wohl bekannt. Anemologische Beobachtungen gibt es für Korsika leider nur in geringer Anzahl, aber angesichts der großen Übereinstimmung, welche sich im physischen Verhalten der beiden Westinseln offenbart[1]), kann man sich einigermaßen an das halten, was durch Eredias Eifer[2]) für Sardinien ermittelt worden ist. Das Regime westlicher Luftströmungen ist ohne Zweifel das vorherrschende und maßgebende[3]). Und demgemäß wird wohl dem heftigen Anpralle der Luft an die Felswände eine energischere Bearbeitung der schon an sich durch Verwitterung und Erosion des Regenwassers stark beanspruchten Stellen zuzuschreiben sein. Die Durchbohrung des Monte Tafonato insonderheit wäre ohne Rekurs auf eine durch lange Zeiträume stetig in gleichem Sinne wirkende Aktion kaum zu verstehen.

17. Das einzige außereuropäische Beispiel, welches diese in jeder Hinsicht nur den Charakter einer ersten, vorläufigen Zusammenstellung tragende Liste namhaft zu machen vermag, gehört dem Staate Buenos Aires der Argentinischen Republik an; das Mittelgebirge, welches in Frage kommt, enthält den höchsten Gipfel der Provinz (1280 m) und führt seinen Namen Sierra de la Ventana[4]) eben von dem

[1]) Der darauf aufmerksam gewordene Beobachter nimmt auch auf Sardinien oft genug richtige Tafoni wahr, wenn auch nicht in so merkwürdiger Scharung, wie auf der nördlichen Nachbarinsel.

[2]) F. Eredia, J venti in Sardegna — nello Stretto di Messina, Rivista maritima, 1907, 2. Heft; 1908, 3. Heft.

[3]) Wir lesen bei J. Hann (Handbuch der Klimatologie, 3. Auflage, 3. Band, Stuttgart 1911, S. 128 ff.): „Der nördliche und mittlere Teil von Italien liegt auf einer Zugstraße von Barometerminima, die im Winterhalbjahre häufig, vom Golf von Genua oder vom westlichen und südlichen Mittelmeer kommend, nach Osten und Nordosten weiterziehen und zu Regenstürmen Veranlassung geben . . . Der Golf von Genua, das Ligurische und Tyrrhenische Meer, sowie namentlich auch die Adria sind der Ort fast stäudiger Barometerminima."

[4]) Ventana, spanisch = Fenster (englisch Window).

Naturspiele, welches uns hier angeht. Die ernstere Beachtung eines Naturforschers hat das Gebirge anscheinend erst damals gefunden, als Darwin auf seiner Weltreise sich kurze Zeit in der Nähe der argentinischen Hauptstadt aufhielt[1]). Später hat dann Aguirre eine Beschreibung des Berglandes gegeben[2]), und an diese knüpfen die Veröffentlichungen von



Fig. 10.

[1]) Ch. Darwin, Voyage of a Naturalist round the World, London 1870 (2. Auflage), S. 170.

[2]) E. Aguirre, La geología de las Sierras Bayas, Anales de la Sociedad Cientifica Argentina, 8. Band, Buenos Aires 1879.

Hauthal[1]) an, welche für uns selbst die Führerrolle übernehmen.

Das Fenster, welches dem Gebirgszuge zu seiner Bezeichung verhalf, ist in dessen höchstem Kamme durchgebrochen; es hält eine genaue meridionale Richtung ein, und in Figur 10 erkennen wir es so, wie es von der Südseite gesehen erscheint. Der Fuß der Partialerhebung, die es umschließt, liegt 1140 m, der höchste Punkt der Kammlinie liegt 1190 m über dem Meere. Die Beschaffenheit und Anordnung des Gesteines ist an sich der Fensterbildung günstig, und so ist denn auch die ganze Sierra de la Ventana reich an Höhlen. Das Gebirge ist das Resultat einer überaus kräftigen Faltenbildung, und da ist es nun bezeichnend, daß sämtliche Höhlen da liegen, wo sich die stärkst gefaltenen, also mindest widerstandsfähigen Stellen befinden, wo demzufolge auch die Erosionstätigkeit der Atmosphärilien die geeignetsten Angriffspunkte findet. Mit Aguirre hält Hauthal dafür[2]), daß es hauptsächlich das fließende Wasser gewesen ist, welches die eben durch den Faltungsprozeß in den Sätteln der stark geneigten Falten entstandenen Hohlräume weiter vertiefte und in einem Einzelfalle das einseitige zum durchgehenden Loch erweiterte. Ein nach Süden abfließender Bach ist jetzt noch vorhanden, und die Felsen in der Nähe des Fensters erweisen sich als derart geglättet, daß man deutlich erkennen kann, es sei hier Wasser herabgelaufen. Das Grundmotiv der Fensterbildung war ein tektonisches; die Detailausgestaltung war korrasiver Natur. Ob man für diese letztere auch jetzt noch an die eigenartige Glazialhypothese von Aguirre[3]) appellieren oder

---

[1]) R. Hauthal, La Sierra de la Ventana, Revista del Museo de La Plata, 1892, III, S. 7 ff.; Excursión á la Sierra de la Ventana, Contribuciones al conocimiento de la geología de la provincia de Buenos Aires, Nr. 1, Juli 1901.

[2]) Hauthal, Excursión etc., S. 16.

[3]) Derselbe nahm an, es sei dermaleinst der Berg von einer Eishaube bedeckt gewesen, und deren Schmelzwasser habe am meisten dazu beigetragen, das Gefüge der Felsen zu lösen. Daß es auch in Ländern,

einfach an die in dieser subtropischen Gegend sehr ergiebigen Herbstregen[1]) denken soll, wird subjektivem Urteile überlassen bleiben müssen. Jedenfalls kann sich das argentinische Gebirgsfenster, was sein Interesse für die uns hier beschäftigenden Fragen anbelangt, mit allen seinen europäischen Konkurrenten vollauf messen, sowie sie uns im Verlaufe dieser Abhandlung bekannt geworden sind. —

Daß es deren noch sehr viel mehr geben wird, ist gewiß. Schwerlich aber wird ein neues Vorkommen der Betrachtung unterstellt werden, auf welches unsere Erklärungsweise, deren Spielraum sich als ein sehr weiter ergeben hat, nicht gleichfalls Anwendung fände. Je nach Umständen darf eine Kombination, welche auf strukturelle Abweichung, Gebirgsbau und Gesteinsauflösung gleichmäßig Rücksicht nimmt, das Recht beanspruchen, für die Entstehung der orographischen Fenster den Kausalzusammenhang ermitteln zu können.

---

welche sich gegenwärtig eines warmen Klimas erfreuen, früher eine „Eiszeit“ gegeben haben kann, ist nicht in Abrede zu stellen. Mannigfaltige Zeichen einer solchen Periode will Siemiradzki (Eine Forschungsreise in Patagonien, Petermanns Geogr. Mitteil., 39. Band, S. 56) in einer nicht sehr viel südlicher gelegenen argentinischen Gegend aufgefunden haben.

[1]) Im Küstengebiete ist der März, der auf der Südhalbkugel mit unserem September übereinstimmt, der niederschlagreichste Monat (Hann, a. a. O., S. 538).



Über einen Versuch zur Optik der bewegten Körper.

Von **M. Laue.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 1. Juli 1911.

Im Jahre 1904 machte Michelson[1]) den Vorschlag zu einem Interferenzversuch, welcher mit der Drehung der Erde um ihre Achse in einem ähnlichen Zusammenhange steht, wie der bekannte, von ihm, Morley und Miller des öfteren durchgeführte Versuch zu deren translatorischen Bewegung. Das Wesentlichste dabei ist, daß zwei kohärente Strahlen einen Kreis auf der Erde in entgegengesetztem Sinn durchlaufen, und daß die von ihnen dazu benötigten Zeiten durch den Interferenzversuch miteinander verglichen werden. Der Versuch bezweckt die Entscheidung der aus dem Gedankenkreise der Stokesschen Theorie stammenden Frage, ob der Äther in der Nähe der Erde deren Drehung mitmacht oder nicht. Im ersten Falle ist kein Einfluß der Drehung auf die Lage des mittelsten Interferenzstreifens gleicher Phase zu erwarten, wohl aber im zweiten Fall. Wir wollen hier zusehen, was die verschiedenen elektrodynamischen Theorien der bewegten Körper erwarten lassen, ob sich vielleicht aus dem Versuch eine Entscheidung zwischen ihnen herbeiführen läßt. Wir denken da in erster Linie an die Relativitätstheorie und die Lorentzsche Theorie des ruhenden Äthers, welche man vielleicht um des Gegensatzes willen passend als „Absoluttheorie" bezeichnet; und zwar an deren ältere Form, denn jene spätere, 1904 veröffentlichte unterscheidet sich, soweit Vorgänge im leeren Raum oder in der nach beiden Theorien (auch bei Bewegung) davon nicht merklich verschiedenen Luft

[1]) A. A. Michelson, Phil. Mag. (6) 8, 716, 1904.

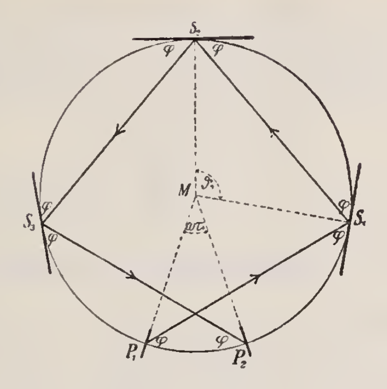
in Frage kommen, von der Relativitätstheorie schon in den Grundgleichungen überhaupt nicht. Daneben wollen wir auch die Theorien von Cohn und Hertz streifen.

a) Relativitätstheorie.

Wir setzen zunächst eine vereinfachte Versuchsanordnung voraus. Der Versuch spiele sich in einer Ebene ab, welche um eine zu ihr senkrechte, in einem berechtigten[1]) Bezugssystem K^0 ruhende Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert; der Schnittpunkt der Achse mit der Ebene sei M. Um M beschreiben wir einen Kreis mit dem Radius r, in einem Punkt P seiner Peripherie liege senkrecht zu ihr die spiegelnde Platte, welche nach Michelsons Vorschlag die kohärenten Strahlen zunächst trennt, um sie nach ihrer Rückkehr vereinigt in das Beobachtungsfernrohr zu werfen. In $(n-1)$ weiteren Punkten desselben Kreises, welche mit P zusammen die Ecken eines regulären n-Ecks bilden, stellen wir Spiegel auf, welche die beiden Strahlen einander zuwerfen sollen. Wir bemerken zugleich, daß die Geschwindigkeit gegen das System K^0 für alle Punkte dieser Ebene ihren absoluten Wert niemals ändert, daß somit — auf das genannte System bezogen — auch alle Strecken ihre Längen dauernd beibehalten.

Die erste Frage ist nun, ob es überhaupt eine Aufstellung der Spiegel gibt, bei welcher beide von P ausgehende Strahlen wieder nach demselben Punkt P zurückgelangen. Der positiv (das soll heißen: im Sinne der Rotation) umlaufende Strahl wird, bezogen auf das System K, Sehnen jenes Kreises zurücklegen, welche länger sind als die Seiten des n-Ecks; denn während er von einem zu dem anderen Spiegel fortschreitet, bewegt sich der letztere um eine gewisse Strecke ungefähr in der Richtung des Strahls. Da aber alle diese Sehnen gleichlang sind, treffen sie den Kreis alle unter dem gleichen Winkel φ. (Die Figur veranschaulicht dies für den Fall

[1]) Ein gegen ein berechtigtes System K^0 rotierendes System ist kein berechtigtes.



Die Bahn des positiv umlaufenden Strahls bezogen auf das System K^0.
P_1 die Platte P beim Abgang des Strahles,
P_2 die Platte P bei der Rückkehr des Strahles,
S_1, S_2, S_3, die Spiegel zu den Zeiten, da sie den Strahl reflektieren:

$n = 4$.) Stellen wir die Spiegel tangential zum Kreis, so wird somit Einfalls- und Reflexionswinkel gleich. Dies stimmt aber mit dem Reflexionsgesetz überein. Denn die Translationsgeschwindigkeit der Spiegel liegt tangential zu ihrer Fläche, ist somit ohne Einfluß. Die Rotation dürfen wir aber für die Betrachtung der Reflexion an den Spiegeln und ebenso für die Reflexion an der Platte in P erfahrungsgemäß vernachlässigen. Bei dieser Stellung der Spiegel wird also der positiv umlaufende Strahl, wenn er P in der geeigneten Richtung verläßt, auch wieder exakt nach P zurückkehren. Dasselbe aber gilt für den negativ umlaufenden Strahl; denn auch für ihn werden jetzt Einfalls- und Reflexionswinkel einander gleich, so daß er n gleiche Sehnen zurücklegen und so, wenn er P in der passenden Richtung verließ, auch wieder nach P gelangen wird. Die Winkel, unter welchen beide Strahlen auf die Platte in P auffallen (φ in der Figur), sind die gleichen, unter welchen sie sie verließen; daher werden sie auch von dieser, wie sie vorher an ihr aus einem einheitlichen Strahl entstanden, zu einem einheitlichen Strahl zusammengesetzt.

Die Zeit τ_+, welche der positiv umlaufende Strahl braucht, läßt sich mit dem Zentriwinkel ϑ_+, welcher einer der von ihm zurückgelegten Sehnen entspricht, in die Beziehung

$$\tau_+ = \frac{2\,n\,r}{c} \sin \frac{\vartheta_+}{2} \tag{1}$$

setzen; sie sagt aus, daß der Strahl n Sehnen von der Länge $2\,r \sin \frac{\vartheta_+}{2}$ mit der Geschwindigkeit c zurücklegt. Wäre nun die Rotationsgeschwindigkeit ω Null, so wäre $n\,\vartheta_+ = 2\,\pi$; so aber ist $n\,\vartheta_+$ größer um den Winkel $\omega\,\tau_+$, welchen P während der Zeit τ_+ zurücklegt (vgl. die Figur); also:

$$n\,\vartheta_+ = 2\,\pi + \omega\,\tau_+. \tag{2}$$

Die Elimination von ϑ_+ aus 1) und 2) ergibt

$$\tau_+ = \frac{2\,n\,r}{c} \sin \left\{ \frac{1}{n} \left(\pi + \frac{\omega\,\tau_+}{2}\right) \right\}. \tag{3}$$

Analog findet man für den negativ laufenden Strahl die Zeit

$$\tau_- = \frac{2\,n\,r}{c} \sin \left\{ \frac{1}{n} \left(\pi - \frac{\omega\,\tau_-}{2}\right) \right\}. \tag{3a}$$

Die Differenz beider ist nach der Formel:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) \sin \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

$$\varDelta\,\tau = \tau_+ - \tau_- = \frac{4\,n\,r}{c} \cos \left\{ \frac{\pi}{n} + \frac{\omega\,\varDelta\,\tau}{4\,n} \right\} \sin \left\{ \frac{\omega}{4\,n} (\tau_+ + \tau_-) \right\}. \tag{4}$$

Soweit ist die Rechnung streng; vernachlässigen wir nun $\omega\,\varDelta\,\tau$ gegen π, so können wir hier den Cosinus gleich $\cos \frac{\pi}{n}$ und außerdem

$$\omega (\tau_+ + \tau_-) = 2\,\omega\,\tau_0$$

setzen, wobei τ_0 die Umlaufszeit im Fall $\omega = 0$ bedeutet; d. h. nach 1) und 2)

$$\tau_0 = \frac{2\,n\,r}{c} \sin \frac{\pi}{n}.$$

Vernachlässigen wir ferner $\omega^2 \tau_0^2$ gegen 1, so können wir $\sin \frac{\omega}{2n} \tau_0 = \frac{\omega}{2n} \tau_0$ setzen und finden als Näherungswert

$$\varDelta \tau = \frac{2 n \omega r^2}{c^2} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Der Inhalt F des n-Ecks ist aber

$$F = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n};$$

also ist

5) $$\varDelta \tau = \frac{4}{c^2} \omega F.$$

Nach Michelsons Vorschlag wäre $F = 10^{10}$ cm², während ω von derselben Ordnung wie die Drehgeschwindigkeit Ω der Erde (10^{-4} sec^{-1}) ist. Daraus ergibt sich für $\varDelta \tau$ die Größenordnung 10^{-15} sec; sie ist durch Interferenzversuche mit sichtbarem Licht leicht nachzuweisen.

Nun ist freilich zu bedenken, daß der Punkt M nicht ruhend und die Ebene des Versuches nicht senkrecht zur Erdachse gewählt werden kann. Vielmehr hat der Mittelpunkt M des n-Ecks selbst eine Translationsgeschwindigkeit zu einem gegen die Sonne ruhenden Bezugssystem K^0, welche sich additiv aus zwei Teilen zusammensetzt. Der erste davon ist die Translationsgeschwindigkeit des Erdmittelpunktes, der zweite rührt von der Drehung der Erde um ihre Achse her. Der erste Teil darf aber für die Dauer eines Versuches als unveränderlich angesehen werden und auch der zweite ändert sich während der Zeit τ eines Umlaufs höchstens um $\omega R \tau_0^2$, wobei R der Radius der Erde, d. h. gleich $6 . 10^8$ cm ist. Dieser Betrag ist unter den obigen Annahmen von der Größenordnung 10^{-5} cm/sec, also vollständig zu vernachlässigen. Eine konstante Translationsgeschwindigkeit ist aber dem Relativitätsprinzip zufolge ohne jeden Einfluß auf die Lage der Interferenzstreifen im Fernrohre; der Punkt M ruht dabei eben in einem anderen berechtigtem System K. Die Form des n-Ecks bezogen auf K^0 wird dadurch freilich verändert, da infolge

der Lorentzkontraktion aus dem Kreis um M eine Ellipse wird. Daß sich ferner die Lage der Ebene in diesem System während der Zeit τ ändert, bewirkt, daß beide Strahlen um einen Winkel von der Ordnung von $\omega \tau_0$ $(= 10^{-9})$ aus der Ebene abgelenkt werden. Dieser liegt aber weit unterhalb der Grenze des Auflösungsvermögens des Fernrohrs.

In Betracht zu ziehen ist dagegen, daß die Rotationsgeschwindigkeit ω nicht die Drehgeschwindigkeit der Erde Ω ist; vielmehr ist, wenn φ die geographische Breite des Beobachtungsortes bedeutet,

$$\omega = \Omega \sin \varphi,$$

also nach 5)

$$\Delta \tau = \frac{4}{c^2} \Omega F \sin \varphi. \tag{6}$$

Am Äquator $(\varphi = 0)$ ist somit keine Verschiebung der Streifen vorhanden, und beim Übergange von der nördlichen zur südlichen Halbkugel muß sie ihr Zeichen umkehren.

b) Absoluttheorie.

Ruht der Punkt M in dem bevorzugten Bezugssystem dieser Theorie, so gelten alle Betrachtungen, welche wir unter a) über die Stellung der Spiegel angestellt haben, unverändert; denn das geometrische Gesetz der Reflexion am bewegten Spiegel ist allen elektromagnetischen Theorien gemeinsam. Ebenso läßt sich die zu Gleichung 5) führende Berechnung Schritt für Schritt übertragen. Ein Unterschied zwischen den Theorien tritt erst auf, wenn der Punkt M noch eine translatorische Geschwindigkeit v erhält, welche aber aus denselben Gründen wie oben als zeitlich konstant betrachtet werden darf (auch die Lagenänderung der Ebene ist aus den angegebenen Gründen belanglos). Nach der Elektronentheorie bleibt nämlich der um M beschriebene Kreis dabei unverändert, während nach der Relativitätstheorie, wie erwähnt, aus ihm eine Ellipse wird. Dies hat einmal zur Folge, daß nach der Elektronentheorie jetzt die beiden Strahlen nicht mehr den gleichen Weg zurücklegen, sondern die Platte in P in ver-

schiedenen Punkten und unter anderen Winkeln erreichen als wie sie sie verlassen haben. Doch sind diese Änderungen höchstens von der zweiten Ordnung in $\frac{v}{c}$, also unbeobachtbar klein. Ebenso wird sich die Differenz $\Delta\tau$ vielleicht um Größen zweiter und höherer Ordnung ändern, was aber wiederum nicht beobachtet werden kann. Also wird auch hier Gleichung 6) eine ausreichende Näherung darstellen; es läßt sich somit aus dem vorgeschlagenen Versuch keinenfalls eine Entscheidung zwischen Relativitätstheorie und der Theorie des ruhenden Äthers treffen.

c) Die Cohnsche Elektrodynamik.

Die Frage, welches Ergebnis der in Rede stehende Versuch nach dieser Theorie haben muß, hat eigentlich Cohn selbst in einer seiner Abhandlungen schon beantwortet [1]). Ergänzen wir seine kurzen Andeutungen, so lautet seine Überlegung wie folgt: Man denke sich die Ebene des Versuches an einer beliebigen Stelle der Erde tangential zu ihr. Die Zeit dt, welche das Licht zur Durchlaufung der Strecke ds (gemessen auf der Erde) braucht, wird um $\frac{\mathfrak{q}_s\, ds}{c^2}$ verlängert, wenn ds sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ bewegt. Infolgedessen ist die Durchlaufungszeit des positiv umlaufenden Strahls um $\frac{1}{c^2}\oint \mathfrak{q}_s\, ds$ länger als im Falle verschwindender Rotation, und für den negativ umlaufenden Strahl um ebensoviel kleiner. Wenden wir auf dies Linienintegral den Stokesschen Satz an, so finden wir somit

$$\Delta\tau = \tau_+ - \tau_- = \frac{2}{c^2}\oint \mathfrak{q}_s\, ds = \frac{2}{c^2} F \operatorname{rot}_n \mathfrak{q}.$$

Nun ist aber, wenn Ω die Geschwindigkeit der Erddrehung bedeutet,

$$|\operatorname{rot}\mathfrak{q}| = 2\,\Omega,$$

[1]) E. Cohn, Berliner Berichte 1904, p. 1404 (vgl. besonders p. 1410 unten).

also, wenn φ die geographische Breite ist,

$$\mathrm{rot}_n \mathfrak{q} = 2\,\Omega \sin\varphi;$$

und in Übereinstimmung mit 6)

$$\Delta\tau = \frac{4}{c^2}\,\Omega F \sin\varphi.$$

Zweifelhaft kann dabei freilich erscheinen, ob wir das Linienintegral über den Umfang des n-Ecks ausführen dürfen; denn die Strahlen werden, bezogen auf die rotierende Ebene, keine gradlinigen Bahnen beschreiben. Die Berücksichtigung dieses Umstandes würde aber nur eine Korrektion höherer Ordnung an $\Delta\tau$ bewirken.

d) Theorie von Hertz.

Sehr einfach ist die Entscheidung nach dieser Theorie. Der Versuch wird in Luft angestellt, welche die Bewegung der Erde mitmacht. Alle Teile der Anordnung einschließlich der Luft behalten ihre Lage zueinander dauernd bei; also ist kein Einfluß der Bewegung vorhanden, sondern $\Delta\tau = 0$. Denn in einem wie ein starrer Körper bewegten System verlaufen alle elektromagnetischen Vorgänge wie bei Ruhe.

Wir sehen somit, daß alle Theorien, welche für die Optik bewegter Körper ernstlich in Frage kommen — die Hertzsche gehörte schon wegen des Fizeauschen Interferenzversuches über die Mitführung des Lichtes nie dazu — über den in Frage stehenden Effekt einig sind. Eine Entscheidung zwischen ihnen läßt der Versuch nicht zu. Trotzdem wäre es sehr wünschenswert, daß er ausgeführt würde; denn die Optik der bewegten Körper ist nicht so reich an exakten Versuchen, als daß ihr nicht jede Verbreiterung ihrer experimentellen Grundlagen von Nutzen wäre.

München, Institut für theoretische Physik, Juni 1911.

Über die räumliche Verteilung der Sterne im schematischen Sternsystem.

Von **H. Seeliger.**

Vorgetragen in der Sitzung am 10. Juni 1911.

1.

Dem Problem der räumlichen Verteilung der Sterne in unserem Sternsystem habe ich außer einigen supplementären Untersuchungen[1]) zwei größere Arbeiten, die ich im folgenden mit I und II[2]) bezeichnen werde, gewidmet. Indem ich nun weitere Betrachtungen hinzuzufügen gedenke, scheint es mir angezeigt den Inhalt meiner früheren Arbeiten kurz zusammenzufassen, denn ich glaube mich nicht zu irren, wenn ich behaupte, die Tendenz der genannten Arbeiten sei von mancher Seite nicht richtig beurteilt worden.

Betrachtungen über die räumliche Verteilung der Sterne müssen selbstverständlich solche über die scheinbare Verteilung der Sterne von verschiedener Helligkeit vorhergehen. Als ich anfing mich mit dem Gegenstande zu beschäftigen, lag ein einigermaßen bearbeitetes Material an Beobachtungsdaten nicht vor. Ich begann deshalb damit ein solches herbeizuschaffen, indem ich die Sterne der Bonner Durchmusterungen nach

---

[1]) a) Über die Größenklassen der teleskopischen Sterne der Bonner Durchmusterungen. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1898. — b) Über die Verteilung der Sterne am Himmel. Ebenda 1899.

[2]) I. Betrachtungen über die räumliche Verteilung der Sterne. Abhandlungen der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften in München, II. Kl., XIX. Bd., III. Abt., 1898. — II. unter gleichem Titel (2. Abhandlung). Ebenda, XXV. Bd., 3. Abhandl., 1909.

Größe und Lage abzählen ließ [1]). Schon ein flüchtiger Anblick der so entstandenen Tabellen zeigte, daß frühere Feststellungen, die nur auf ganz unsicheren Abschätzungen beruhen konnten, zum Teil gänzlich verfehlt waren. Schiaparellis Arbeit über die Verteilung der mit freiem Auge sichtbaren Sterne erschien mehrere Jahre später (1889). Der zweite Schritt, der auszuführen war, bestand darin, die Bonner Größenschätzungen mit einer sicheren, d. h. photometrischen Skala in Verbindung zu setzen und dies wurde erst durch die photometrischen Arbeiten der Harvard-Sternwarte ermöglicht. Durch die dort erhaltenen Resultate konnte ich die Größen der D. M. bis zur 9.2 Größe in ihrer Abhängigkeit von der Lage zur Milchstraße untersuchen und zuerst eine provisorische (in (a) und (I)) und dann eine verbesserte (b) Reduktion auf photometrische Größen vornehmen.

In der Folge zeigte sich, daß nur eine recht genaue Feststellung der Zahlen A_m, d. i. der Anzahlen der Sterne von den hellsten bis zu einer photometrisch bestimmten Größe m herab, brauchbar ist und daß eine beiläufige Angabe über die A_m ebensowenig wie eine rohe Darstellung ermittelter A_m in großen Zügen geeignet ist, einen Beitrag zur Kenntnis der räumlichen Verteilung der Sterne zu liefern, vielmehr, daß solche Versuche nur Verwirrung anrichten können. Eine möglichst sorgfältige Festlegung der Bonner Größenschätzungen in der photometrischen Skala war deshalb eine sehr nötige Vorarbeit, deren Resultate leider oft genug nicht die genügende Beachtung gefunden hat. Für schwächere Sterne, als in der Bonner Durchmusterung in erforderlicher Vollständigkeit vorkommen, also für Sterne schwächer als von der Größe 9.2, fehlt es auch jetzt noch an genügend gesicherten Angaben und wenn auch, wie II art. IV angibt, einige Fixpunkte sich herstellen lassen, so ist deren Festlegung, vielleicht mit Aus-

---

[1]) a) Über die Verteilung der Sterne auf der nördlichen Halbkugel nach der Bonner Durchmusterung. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1884. — b) Über die Verteilung der Sterne auf der südlichen Halbkugel nach Schönfelds Durchmusterung. Ebenda 1886.

nahme der Resultate aus den Herschelschen Sterneichungen, doch keineswegs ebenso gesichert, wie es etwa die Angaben, welche auf der D. M. beruhen, sind. Indessen ist zu hoffen, daß die Hauptschwierigkeit, nämlich die photometrische Bestimmung genügend schwacher Sterne an vielen Punkten des Himmels, in naher Zukunft sehr erheblich vermindert werden wird.

Was den Zusammenhang zwischen der scheinbaren Verteilung der Sterne mit der räumlichen betrifft, so habe ich die nötigen Formeln vor 13 Jahren in I entwickelt. Ich habe dann in II die Voraussetzungen, auf denen diese Formeln beruhen, sehr verallgemeinert, indem ich u. a. sowohl auf eine allgemeine Absorption als auch darauf Rücksicht nahm, daß die Häufigkeitsfunktion φ der Leuchtkräfte i die Entfernung r von uns explizite enthalten kann. Bewegt sich i in dem endlichen Spielraum 0 bis $H(r)$, ist weiter $\psi(r)$ der Betrag der Absorption dergestalt, daß die scheinbare Helligkeit h in der Entfernung r durch

$$h = \frac{i\,\psi(r)}{r^2}$$

gegeben ist, ist ferner r_1 die Entfernung, in der die Grenze des Sternsystems in jener Richtung sich befindet, in welcher der betrachtete Himmelsteil ω liegt, auf den die Zahlen A_m sich beziehen, π_m die mittlere Parallaxe der Sterne der Größen m, dann entstehen Formeln, von denen nur die für A_m angeführt werden mögen und zwar für den Fall, daß $\frac{\psi(r)\,H(r)}{r^2}$ eine abnehmende Funktion ist.:

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \omega\int_0^{\sigma} D\,r^2\,d\,r \int_{h_m \frac{r^2}{\psi(r)}}^{H} \varphi(x, r)\,d\,x;\quad r_1 > \sigma \\ A_m &= \omega\int_0^{r_1} D\,r^2\,d\,r \int_{h_m \frac{r^2}{\psi(r)}}^{H} \varphi(x, r)\,d\,x;\quad r_1 < \sigma \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(I)}$$

Hierbei ist σ bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{H(\sigma)\cdot\psi(\sigma)}{\sigma^2} = h_m$$

und $D(r)$ ist die Funktion, welche die Dichtigkeit der Sternverteilung angibt. Läßt man noch H_1 eine Konstante sein und setzt

$$H(r) = H_1 F(r); \quad \frac{r^2}{F(r)\,\psi(r)} = \varrho^2, \; r = f(\varrho),$$

führt weiter die zwei Funktionen $\Delta(\varrho)$ und Φ ein durch

$$\Delta(\varrho) = D\,[f(\varrho)]\cdot\left(\frac{f(\varrho)}{\varrho}\right)^2 f'(\varrho); \quad \Phi(y,\varrho) = F(r)\cdot\varphi\,[y\,F(r), r],$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \omega\cdot\int_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_m}}} \Delta(\varrho)\,\varrho^2\,d\varrho\cdot\int_{h_m\varrho^2}^{H_1}\Phi(y,\varrho)\,dy; \; m < n \\ A_m &= \omega\int_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_n}}} \Delta(\varrho)\,\varrho^2\,d\varrho\int_{h_m\varrho^2}^{H_1}\Phi(y,\varrho)\,dy; \; m > n \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II)}$$

Es ist dabei die Sterngröße n definiert durch

$$h_n\,r_1^2 = H(r_1)\,\psi(r_1).$$

Ferner ergibt sich für die m. Parallaxen

$$\frac{\pi_m}{0''2}\cdot\int_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_m}}}\Delta(\varrho)\cdot\varrho^4\cdot\Phi(h_m\varrho^2,\varrho)\,d\varrho = \int_0^{\sqrt{\frac{H_1}{h_m}}}\Delta(\varrho)\cdot\frac{\varrho^4}{f(\varrho)}\,\Phi(h_m\varrho^2,\varrho)\,d\varrho, \qquad \text{(III)}$$

solange $m < n$. Für größere m ist in den Grenzen der Integrale h_m durch h_n zu ersetzen. Schließlich sei noch erwähnt, daß für $F(r) = 1$ sich ergibt

$$D(r) = \frac{\psi(r) - \frac{1}{2} r \psi'(r)}{\psi^{\frac{5}{2}}(r)} \cdot \varDelta\left(\frac{r}{\sqrt{\psi(r)}}\right)$$

und speziell für $\varDelta(\varrho) = \varrho^{-\lambda}$

$$D(r) = r^{-\lambda} \cdot \frac{\psi(r) - \frac{1}{2} r \psi'(r)}{\psi^{\frac{5}{2}-\lambda}(r)}.$$

Bei der Ausarbeitung von (I) waren nur bei Bestimmungen des Apex der Sonnenbewegung gelegentlich erhaltene mittlere Parallaxenwerte bekannt und etwa gleichzeitig hatte Herr Kapteyn seine bekannten Parallaxenbestimmungen aus den Eigenbewegungen veröffentlicht. Deshalb trat damals die Frage als besonders wichtig in den Vordergrund, ob durch Ermittlung der Zahlen A_m allein ein Beitrag zur Erkenntnis der räumlichen Verteilung der Sterne erlangt werden kann. Daß diese Frage prinzipiell bejaht werden muß, zeigen die Formeln (I) oder (II). Ist, wie angenommen werden soll, die Funktion φ überall dieselbe oder enthält sie wenigstens r nicht explizite, dann sind die beiden Funktionen $\varDelta$ und φ durch zwei sogenannte Integralgleichungen, wenn auch wohl nicht immer eindeutig, bestimmt. Ferner ersieht man aus den Formeln (II), daß dort die Dichtigkeit D gar nicht vorkommt, sondern nur die Funktion $\varDelta(\varrho)$ und daß man also zur Kenntnis von D noch die Absorption braucht oder die Berechtigung von ihr absehen zu dürfen anerkennen muß.

Dadurch, daß in gewissem Sinne von den m. Parallaxen gar kein Gebrauch gemacht wird, ist das ganze Problem wesentlich vereinfacht, denn die Ermittlung der Zahlen A_m bis zu größeren Werten von m bietet, wie schon erwähnt, zwar nicht geringe praktische Schwierigkeiten dar, aber wesentliche Beiträge zur Lösung sind mit Sicherheit in absehbarer Zeit zu erwarten. Ich habe deshalb schon vor 13 Jahren diese Aufgabe der praktischen Astronomie als eine der wichtigsten und lohnendsten bezeichnet für Beobachter, die über die nötigen Hilfsmittel, wie Einrichtungen zu photographischen Daueraufnahmen, verfügen.

Bei der überaus verwickelten, von Ort zu Ort schnell wechselnden Sternverteilung am Himmel wird man sich vorerst begnügen können, die von mir als „typisch" bezeichnete räumliche Verteilung der Sterne zu studieren. In der Tat bietet diese einen passenden Rahmen für die spätere Einordnung des Details, dessen Erkenntnis doch sicherlich weniger wichtig ist. Kurz gesagt, entsteht dieses typische Bild des Sternsystems dadurch, daß man von den sicherlich weniger auffallenden Verschiedenheiten absieht, die man beim Vorwärtsschreiten längs eines galaktischen Breitenkreises antrifft und die Sterndichtigkeit also nur als Funktion dieser Breite und der Entfernung r auffaßt. Die Arbeit I beschäftigt sich hauptsächlich mit dieser typischen Sternverteilung. Zur Bestimmung von Δ und φ aus den Integralgleichungen (II) reichte das verfügbare Material nicht aus, da für Werte $m > 10$ damals nur die Resultate der Herschelschen Sterneichungen vorlagen und es wäre nicht möglich gewesen, etwas über die Funktion Δ auszusagen, wenn ich nicht die merkwürdige Tatsache gefunden hätte, daß die Größe

$$a_m = \log \frac{A_{m+\frac{1}{2}}}{A_{m-\frac{1}{2}}}$$

innerhalb derselben galaktischen Breite nahezu unveränderlich ist für die in der D. M. vorkommenden Sterne, aber für alle m, die kleiner als etwa 9.2 sind und daß eine systematische Abhängigkeit von m nicht hervortritt.

Dagegen zeigte sich bei den aus den Herschelschen Eichungen abgeleiteten A_m eine starke Verminderung und zwar war diese um so bedeutender, je größer die galaktische Breite war. Des näheren konnte man also die Zahlen A_m bis zu den Sternen der 10. Größe durch die Formel

$$A_m = c \cdot h_m^{\frac{\lambda-3}{2}}$$

darstellen, wo λ mit der galaktischen Breite variierte, für die schwächeren Sterne aber war diese Darstellung nicht mehr möglich. Die einfachste und naheliegendste Interpretation

dieser Tatsachen auf Grund der entwickelten Formel war diese: 1. Die Dichtigkeit oder die Sternfülle nimmt wie $r^{-\lambda}$ ab; 2. das Sternsystem ist begrenzt und seine Grenze liegt dort, wo die hellsten Sterne ($i = H$) die scheinbare Größe n haben, für welchen Wert von m die einfache Formel

$$A_m = c\, h_m^{\frac{\lambda-3}{2}}$$

zu gelten aufhört. Dieses n ist in der Nähe der Milchstraße erheblich größer als an ihren Polen und scheint sich sukzessive zu verkleinern, wenn man sich von der Milchstraße entfernt, wonach also das Sternsystem in der Richtung, in welcher die Milchstraße liegt, seine größte Ausdehnung zeigt. Daraus muß weiter gefolgert werden, daß die Milchstraße mit der ganzen Konstitution des Sternsystems zusammenhängt. Zur Feststellung dieser Sachlage ist die Kenntnis der Funktion φ nicht erforderlich, insbesondere ist die Feststellung des Dichtigkeitsgesetzes $\Delta(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ davon ganz unabhängig und so war zum ersten Male und zwar ohne umfangreiche Rechnungen eine Vorstellung von der räumlichen Anordnung im Fixsternsystem gewonnen, die nicht auf vagen Hypothesen beruhte. Die genauere Angabe der Größe n, welche die Grenze des Sternsystems definiert, läßt sich allerdings nur mit einer bestimmten Funktion φ ausführen, aber der Einfluß derselben auf diese Bestimmung ist nicht sehr bedeutend. Ähnliches gilt für die Verwertung der Veränderlichkeit des Exponenten λ zur Feststellung der Kurven gleicher Dichtigkeit insofern, als diese mangels genauerer Zahlen A_m für die schwachen Sterne in verschiedenen galaktischen Breiten zuerst hypothetisch gewonnen werden mußten. Diese letzteren Ausrechnungen in (I) habe ich übrigens ausdrücklich nur als Beispiel bezeichnet, um die ganze Methode zu illustrieren.

Es ist schon erwähnt worden, daß ich in der zweiten Abhandlung (II) die Grundformeln auf allgemeineren Prämissen entwickelt habe, also mit Rücksicht auf eine etwaige Absorption etc. Es geschah dies keineswegs, um einem mehr oder weniger unfruchtbaren Formalismus zu genügen, sondern weil

mit solchen Formeln sich ganz strenge und mühelos gewisse Betrachtungen anstellen lassen, die von andrer Seite in höchst umständlicher und auch nicht immer zutreffender Weise versucht worden sind. Daneben habe ich die allerdings geringen Fortschritte, die in der Feststellung der Zahlen A_m für schwächere Sterne seit 1898 erzielt worden sind, berücksichtigt und die vermeintlichen Fortschritte kritisiert, auch Betrachtungen allgemeinerer Art, wie über die Helligkeit des Himmelsgrundes, die ich schon früher[1]) angeregt hatte, weitergeführt. Ich habe mich dabei auf das von mir als schematisch bezeichnete Sternsystem beschränkt, weil für dieses allein die nötigen Daten von ausreichender Zuverlässigkeit vorhanden zu sein schienen. Als schematisches Sternsystem habe ich dasjenige bezeichnet, bei welchem auch die Abhängigkeit von der galaktischen Breite außer Betracht bleibt. Es werden also die Anzahlen A_m, ebenso wie mittleren Parallaxen π_m für den ganzen Himmel ermittelt. Das Studium dieses schematischen Sternsystems, das sich vom wahren natürlich sehr viel weiter entfernt als das typische und bei dem die auftretenden Mittelwerte nicht in allen Punkten eine genau definierbare Bedeutung haben, bietet trotzdem ein gewisses Interesse dar. Namentlich ist die Benutzung und Ausprobierung der angewandten Methoden in einem so viel einfacheren Falle, dem viel sicherer bestimmte Daten unterlegt werden können, einigermaßen instruktiv. Bei der Darstellung der m. Parallaxen und auch bei der Verwertung der Zahlen A_m für schwache Sterne ist, wie erwähnt, die Kenntnis von φ nötig. Ich habe nun in II einen Ansatz verwendet, der zuerst von Herrn Comstock aus den bisher beobachteten Parallaxen abgeleitet worden ist und dessen Gültigkeitsbereich ich allerdings überschätzt habe. Für ganz große i aber gibt diese Formel mit einiger Sicherheit die Eigenschaft von $\varphi(i)$ zu erkennen, die in meiner Theorie die größte Bedeutung hat, nämlich die starke Abnahme von $\varphi(i)$ mit wachsendem i so zwar, daß, wenn i drei oder vier nega-

[1]) Über kosmische Staubmassen und das Zodiakallicht. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften. München 1901.

tiven Sterngrößen entspricht, $\varphi(i)$ gleich Null gesetzt werden kann. Da die räumliche Dichtigkeit Δ von der Kenntnis von φ unabhängig ist, so habe ich also tatsächlich die genannte Formel nicht bei der Ableitung dieser Dichtigkeit benutzt. Ich habe meinen Rechnungen mit der Comstockschen Formel im wesentlichen nur einen informatorischen Charakter zugesprochen (vgl. II, S. 22), ihre Sicherheit für nicht ganz große i nicht hoch, aber vielleicht doch noch zu hoch angeschlagen. Ich glaube jetzt auch, daß für mittlere i die Funktion $\varphi(i)$ viel stärker abfällt, als die Formel angibt und daß auch die beobachteten Parallaxen ein gleiches Verhalten andeuten. Aber das von den direkt bestimmten Parallaxen gelieferte Material reicht keineswegs hin, um genauere Angaben machen zu können. Dazu kommt noch der Umstand, daß man wohl berechtigt sein kann, $\varphi(i)$ als unabhängig vom Ort zu betrachten, daß damit aber nicht gesagt ist, daß in kleineren Bezirken sich schon diese mittleren Zustände genau genug aussprechen werden. Die meßbaren Parallaxen, und hier kommt ihr absoluter Wert in Betracht, sind bestenfalls auf 4 bis 5 hundertel Sekunden genau bestimmbar. Parallaxen, die unter diesem Betrage liegen, sind durchaus illusorisch und die aus ihnen berechneten Leuchtkräfte gänzlich problematisch. Man muß sich aber auf die Sterne beschränken, deren Parallaxen größer als etwa 0″05 sind und das ist ein außerordentlich kleiner Raum gegenüber dem, den unser Sternsystem einnimmt. Zudem hat dieser eine exzeptionelle Lage, nämlich sicherlich nicht sehr weit von den innersten Partien des Sternsystems entfernt.

Bekanntlich hat Herr Kapteyn aus den Eigenbewegungen der Sterne und dem hieraus hervorgehenden Apex der Sonnenbewegung zuerst systematisch die mittleren Parallaxen π_m abgeleitet. Ich glaube nicht, daß man in den Verdacht kommen muß, das große Verdienst dieser Bemühungen verkleinern zu wollen, wenn man hinzufügt, daß diese Parallaxen auf hypothetischer Grundlage ruhen und daß bis jetzt jeder Nachweis der Unschädlichkeit dieser sicherlich nicht ganz zutreffenden Hypothesen fehlt. Es scheint mir deshalb nach keiner Rich-

tung begründet, wenn man die Darstellung dieser Parallaxen für ebenso wichtig wie die der Zahlen A_m, namentlich der von mir aus der D. M. gefolgerten, ansieht. Der Versuch, etwa die Kapteynschen Parallaxen genau darzustellen und den Zahlen A_m ganz unbefriedigend zu entsprechen, kann unmöglich als berechtigt angesehen werden.

Die Kapteynschen Parallaxen lassen sich mit der Annahme allerdings starker Absorption und sehr verschieden verlaufenden φ leicht darstellen. Sieht man aber von Absorptionen ab, so ist diese Darstellung mit einigen Umständlichkeiten verbunden. In II, S. 44 habe ich indessen erwähnt, daß diese Darstellung immerhin in gewissen Umfange nicht schwer zu erreichen ist. Ich konnte dies sagen, da ich vor Jahren eine ganze Serie solcher Rechnungen ausgeführt, aber nicht veröffentlicht hatte, weil die zu Grunde gelegten A_m mir nicht genügend genau erschienen. Andererseits muß ich zugeben, daß die Sache insofern anders liegt, als in II erwähnt wurde, als ein anderer Umstand hier größere Bedeutung erlangt, als ich vermutete. Die Abweichungen zwischen den berechneten und tatsächlich festgestellten A_m treten in stärkerem Maße hauptsächlich für kleine, zum Teil für sehr kleine m auf und da diese A_m schon wegen ihrer relativen Kleinheit unsicher sind, hat die Mißstimmung wohl keine entscheidende Bedeutung.

Ich möchte nun noch den Inhalt der folgenden Auseinandersetzungen zusammenfassen, die sich ausschließlich auf das schematische Sternsystem beziehen und eine Ergänzung zu meinen früheren Arbeiten liefern sollen. Im ersten Artikel werden allgemeine Betrachtungen über die Häufigkeitsfunktion φ der absoluten Leuchtkräfte i und ihre Veränderung mit der Zeit angestellt. Es wird dann gezeigt, wie man aus den Sternzahlen A_m allein, wenn diese in genügender Ausdehnung ermittelt vorliegen, für das endliche schematische Sternsystem sowohl die mit der Dichtigkeit zusammenhängende Funktion $\Delta(\varrho)$ als auch die Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ bestimmen kann. In erster Annäherung ist die in Frage kommende Integralgleichung leicht zu integrieren. Die gegenwärtig noch sehr

rudimentäre Kenntnis des Verlaufs von A_m für $m > 10$ läßt selbstverständlich nur eine provisorische Bestimmung von φ zu. Immerhin ist es merkwürdig, daß diese Bestimmung auf einen ähnlichen Verlauf von $\varphi(i)$ führt, wie der Versuch der Darstellung der Kapteynschen Parallaxen weiterhin ergibt.

Im zweiten Artikel wird eine numerische Darstellung der Kapteynschen Parallaxen wirklich durchgeführt. Bei dem immerhin hypothetischen Charakter dieser Parallaxen genügt gegenwärtig sicherlich eine Annäherung. Wie schon aus den früheren Bemerkungen hervorgeht, und die folgende Rechnung bestätigt diese, ist ein Erfolg nur möglich, wenn man $\Delta(\varrho)$ etwas abändert, da der Ausdruck $\Delta(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ stets zu den „normalen" Parallaxen führen muß. Es zeigt sich aber, daß die Abweichungen des neuen Δ gegen das alte nur in der nächsten Umgebung des Sonnensystems stärker hervortritt. Schon in der Entfernung 2, die einer Parallaxe 0″1 entspricht, ist die Differenz zwischen den beiden Δ schon auf 20% gesunken, in der Entfernung 4 beträgt sie nur noch 6%. Man darf also behaupten, daß die Dichtigkeitsverteilung im Sternsystem in ihrem allgemeinen Verlauf auch bei Akzeptierung der Kapteynschen Parallaxen sich so gestaltet, wie meine Arbeit vom Jahre 1898 aus allgemeinen Überlegungen angegeben hat. Die Grenze des schematischen Sternsystems liegt nach den jetzt vorliegenden Rechnungen in der Entfernung 910, was einer Parallaxe 0″00022 entspricht.

Schließlich wird der Einfluß einer Absorption unter zwei Annahmen untersucht. Nach der ersten ist der Absorptionskoeffizient proportional der an jeder Stelle des Sternsystems stattfindenden wirklichen Dichtigkeit D. Die zweite setzt eine „allgemeine" Absorption voraus, wonach der Absorptionskoeffizient konstant ist. Als hypothetisches Prinzip wird angenommen, daß die Dichtigkeit D nicht auf größeren Strecken bedeutend anwachsen darf. Dann ergibt sich, daß beide Absorptionen sehr gering sein müssen. Die Absorption beträgt für Sterne an der Grenze des Sternsystems im ersten Falle

0.34, im zweiten 0.27 Größenklassen und die Ausdehnung des Systems verkleinert sich dementsprechend. Sie wird durch 770 bzw. 805 Siriusweiten angegeben, wobei eine Siriusweite nach meinem Vorschlage einer Parallaxe 0″2 entspricht. Die wahren Dichtigkeiten D zeigen in beiden Fällen nahezu denselben Verlauf und nehmen etwas langsamer ab, wie in dem Falle, in dem von jeder Absorption abgesehen wird.

2.

Wenn man Häufigkeits- oder Verteilungsfunktionen von der Art des φ auf Grund von Abzählungen bestimmen will, so kann dies natürlich nur mit einer beschränkten Genauigkeit geschehen, denn selbst im Falle, daß eine überaus große Menge von Einzelgegenständen vorliegt, werden Schwankungen gegen einen normalen durch eine mathematische Formel darstellbaren Verlauf auftreten, auch können einzelne als Abnormitäten zu bezeichnete Dinge isoliert vorkommen. Sehr oft, vielleicht in der Regel, verläuft die Verteilungsfunktion so, daß sie für bestimmte Werte des Arguments ein Maximum aufweist und von diesem nach beiden Seiten, aber gewöhnlich unsymmetrisch abfällt. Für große oder kleine Argumente, manchmal auch für beide wird die Funktion klein werden, was natürlich von der Wahl des Arguments abhängt und sich dadurch ausspricht, daß hier nur wenige Exemplare des „Kollektivgegenstandes" vorkommen. Immer werden sie über eine gewisse Grenze hinaus, nach der einen oder anderen oder auch nach beiden Seiten schließlich ganz fehlen. Um also aus dem Resultate der Abzählung, also aus den Angaben der sogenannten Verteilungstafel, eine mathematische Formel für die Häufigkeit aufstellen zu können, muß, da von einer absolut genauen Darstellung keine Rede sein kann, gewissermaßen eine Idealisierung vorgenommen werden. Außerhalb der Grenzen des Arguments, wo Werte der Verteilungsfunktion nicht mehr durch Exemplare vertreten sind, wird man nach Belieben die Funktionswerte als klein genug oder auch als genau der Null gleich annehmen können. Das erste Verfahren, das darauf

hinauskommt die Argumentenwerte bis ins Unendliche sich ausdehnen zu lassen, ist in vielen Fällen das analytisch Einfachere und wird sowohl in der Fehlertheorie wie auch in der Kollektivmaßlehre fast ausschließlich eingeschlagen. Aber dies Verfahren ist trotzdem nicht immer das naturgemäße und es kann vorkommen, daß gewisse Eigenschaften dadurch verdeckt werden, die sehr deutlich hervortreten, wenn man die Argumentwerte von vornherein auf ein endliches Intervall einschränkt und somit gewissermaßen die Idealisierung im entgegengesetzten Sinne vornimmt.

Was speziell die Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ der absoluten Leuchtkräfte betrifft, so ist von vornherein selbstverständlich, daß Leuchtkräfte, die einen gewissen endlichen Wert H überschreiten, überhaupt nicht vorkommen. Es kann sich nur darum handeln, welchen Betrag man diesem Grenzwerte H zuerteilen soll. Die Genauigkeit der direkt beobachteten Parallaxen wird nun gewiß n i c h t unterschätzt, wenn man behauptet, daß der a b s o l u t e Wert einer Parallaxe, der sich aus den Messungen kleiner als vielleicht 0″04 oder 0″05 ergibt, wirklich als unter dieser Grenze liegend angesehen werden kann. Für einen Stern von der Helligkeit m und der Parallaxe π'' wird seine Größe m_0 in der Entfernung 1, die in meinen Rechnungen immer der Parallaxe 0″2 entspricht, gegeben sein durch:

$$m_0 = m + 3.495 + 5 \log \pi''.$$

Man wird danach, da m_0 die Leuchtkraft in Größenklassen ausdrückt, gegenwärtig nicht nachweisen können, daß Sterne beobachtet worden sind, deren m_0 unter 3 bis 4 negativen Einheiten liegt, was auch die bisher gemessenen Parallaxen, deren Zahl doch immerhin 2—300 ist, bestätigen. Im übrigen würden etwaige abnorme Fälle das Gesagte auch nicht widerlegen können. Die Beschränkung der Leuchtkräfte auf ein Intervall in dem H einige negative Einheiten ist — aus dem Folgenden wird — 4.3 hervorgehen, — deckt nun in der Tat Eigentümlichkeiten des Sternsystems auf, die im anderen Falle

nicht ohne weiteres erkennbar sind. Man mag diese Beschränkung als einen Kunstgriff bezeichnen; jedenfalls ist er erlaubt und hat sich als sehr nützlich erwiesen.

Ich hatte schon früher bemerkt, daß sich $\varphi(i)$ wegen der fortschreitenden Abkühlung der Sterne mit der Zeit verändert und deshalb sehr verschiedene Formen annehmen kann. Selbst wenn z. B. $\varphi(0)$ für irgend eine Zeit der Null gleich wäre, so wird diese Eigenschaft mit der Zeit verloren gehen und es ist nicht unwahrscheinlich, daß mit dem Fortschreiten der Zeit $\varphi(i)$ für große i einen stärkeren Abfall aufweisen wird; sicherlich wird sich H verkleinern müssen. Im übrigen hängt die Veränderung mit der Zeit von verwickelten Umständen ab und wenn man nicht willkürliche Annahmen hinzufügen will, läßt sie sich nur ganz allgemein charakterisieren. Jedem Stern wird zu einer bestimmten Zeit t ein bestimmter Wert des Differentialquotienten

$$-\frac{di}{dt} = \xi$$

eigentümlich sein. ξ ist wesentlich positiv und wird von t und i abhängen. Es sei nun $A \cdot di$ die dem φ proportionale Anzahl der Sterne, welche zur Zeit t eine zwischen i und $i + di$ liegende Leuchtkraft besitzen. Ein gewisser Prozentsatz dieser Sterne wird einen zwischen ξ und $\xi + d\xi$ gelegenen Wert von $-\frac{di}{dt}$ haben. Es wird also die Anzahl dieser Sterne sein:

$$A(t, i) \cdot \psi(i, \xi, t)\, d\xi \cdot di,$$

wenn man mit ψ eine auch von t und i abhängige Verteilungsfunktion bezeichnet, welche den Entwicklungszustand des Sternsystems charakterisiert. Dabei wird

$$\int_{\sigma}^{\sigma'} \psi(i, \xi, t)\, d\xi = 1$$

sein müssen für jedes i und t. σ und σ' können unter Umständen, und im allgemeinen wird man dies annehmen dürfen,

$\pm\infty$ sein. Nun wird die Zahl der Sterne mit der Leuchtkraft i zur Zeit $t + dt$, denen außerdem der Wert ξ von $\frac{di}{dt}$ zukommt, dieselbe sein, wie die Zahl der Sterne, deren i zur Zeit t, $i - \xi\, dt$ war, also gleich sein

$$A(t, i - \xi\, dt) \cdot \psi(i - \xi\, dt, \xi, t) \cdot d\xi\, di$$

und da ξ alle Werte von σ bis σ' annehmen kann, wird man haben

$$A(t + dt, i) = \int_{\sigma}^{\sigma'} d\xi \cdot A(t, i - \xi\, dt)\, \psi(i - \xi\, dt, \xi, t)$$

und hieraus ergibt sich

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\int_{\sigma}^{\sigma'} \frac{\partial (A \cdot \psi)}{\partial i}\, \xi \cdot d\xi.$$

Ist, was man in den meisten Fällen erreichen kann, σ und σ' unabhängig von i, so wird

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial (A f)}{\partial i}; \qquad f(i, t) = \int_{\sigma}^{\sigma'} \psi(i, t, \xi) \cdot \xi \cdot d\xi.$$

A und f sind also Funktionen der beiden Variablen i und t. Diese partielle Differentialgleichung ist nur in speziellen Fällen integrabel. Wenn z. B. f entweder i oder t nicht enthält, was in dem allgemeineren Ansatz

$$f = \varphi(i) \cdot \chi(t)$$

zusammengefaßt werden kann, dann ergibt sich sofort

$$A(t, i) = \frac{1}{\varphi(i)} \cdot F\left\{\int \chi(t)\, dt - \int \frac{di}{\varphi(i)}\right\},$$

worin F eine willkürliche Funktion bedeutet. Ist, um den Fall, in dem die Integrationsgrenzen von i abhängig sind, zu

illustrieren, in jedem Punkt direkt $-\frac{di}{dt} = \varphi(i, t)$, ohne daß eine Verteilungsfunktion ψ wirksam wird, so ergibt sich

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\varphi(i, t) \cdot \frac{\partial A}{\partial i},$$

und falls weiter φ t nicht explizite enthält,

$$A = F\left(A - \int \frac{di}{\varphi(i)}\right).$$

Wenn auch von vornherein die Zulässigkeit der Annahme, daß $\varphi(i) = 0$ für $i \geqq H$ unzweifelhaft feststeht, besonders wenn H als eine erst noch zu bestimmende Größe betrachtet wird, so wird doch der große Vorteil, den diese Annahme darbietet, erst hervortreten, wenn man die Tatsache berücksichtigt, daß die Anzahlen A_m und zwar für die kleinsten Werte von m bis zu etwa $m = 9$ oder 10 sehr genähert durch die Formel

$$\log A_m = a + b \cdot m \qquad \text{oder} \qquad A_m = \gamma \cdot h_m^{\frac{\lambda - 3}{2}}$$

dargestellt werden können. Im speziellen hatte ich gefunden

$$\log A_m = 4.394 + 0.514\,(m - 7.5),$$

woraus $\lambda = 0.43$ folgt. Es ist, wenn man will, ein glücklicher Zufall, daß sich diese einfache Formel den Abzählungen so zufriedenstellend anschmiegt, wobei ausdrücklich konstatiert werden muß, daß meine sorgfältigen Ermittlungen der Zahlen A_m diese Übereinstimmung um so mehr hervortreten ließen, als die Sicherheit dieser Zahlen zunahm. Für sehr kleine m werden die A_m sehr klein und im Sinne einer Statistik, die mit großen Mengen zu rechnen hat, illusorisch. Wenn man aber an dem analytischen Charakter der vorkommenden Funktionen festhält, wird man die Gültigkeit der gefundenen Formel auch für kleine m anerkennen müssen oder dies wenigstens tun können. Da man außerdem dem schematischen Sternsystem eine angemessene Ausdehnung zuerkennen muß, ist die Anwendbarkeit der oben gegebenen Hauptformel II für $0 < m < n$ zweifellos. Dann

folgt aber, wie ich in I schon, dann strenger in II, S. 14 nachgewiesen habe, eindeutig, daß $\Delta(\varrho) = \varrho^{-\lambda}$ sein muß.

Die Methode, die ich in (I) diskutiert habe und die in der Tat unter den gemachten Voraussetzungen erlaubt aus den Abzählungsresultaten A_m allein die beiden Funktionen $\Delta(\varrho)$ und $\varphi(i)$ zu bestimmen, besteht in der Anwendung der beiden Formeln II, wo nur der Einfachheit wegen $\omega = 1$ gesetzt und von einer expliziten Abhängigkeit der Funktion φ von ϱ abgesehen wird:

$$A_m = \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(\varrho) \cdot \varrho^2 \, d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^{H} \varphi(y) \, dy; \quad m < n \tag{1}$$

$$A_m = \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(\varrho) \varrho^2 \, d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^{H} \varphi(y) \, dy; \quad m > n. \tag{2}$$

Dabei ist die Grenze des Sternsystems gegeben durch

$$r_1 = \sqrt{\frac{H}{h_n}}.$$

Man sieht also, daß zur Bestimmung von r_1 außer m auch H bekannt sein muß, worauf noch zurückzukommen sein wird. Die beiden Integralgleichungen, welche leicht auf die übliche Form (vgl. II, S. 13) von Integralgleichungen der ersten Art gebracht werden können, bestimmen die beiden Funktionen Δ und φ, im allgemeinen wohl nicht eindeutig. Um weitere Kontrollen bzw. Entscheidungen zu gewinnen, können die m. Parallaxen, wenn man ihnen die nötige Sicherheit zuerkennen will, herangezogen werden, wobei natürlich nur der Fall $m < n$ in Frage kommen wird. Auf diese Weise liegt also eine dritte Integralgleichung vor, die ebenfalls die Funktionen Δ und φ und die Größe H enthält. Der hierbei einzuschlagende Weg ist wegen der speziellen Formen der Integralgleichungen vielleicht in jedem einzelnen Fall einfacher

numerisch zu verfolgen, als durch allgemeine Entwicklungen. Glücklicherweise wird die Sachlage durch die von mir aufgedeckten Gesetzmäßigkeiten im schematischen Sternsystem überaus einfach und durchsichtig, indem aus der Gleichung (1) hervorging, daß die Funktion Δ jedenfalls angenähert durch $\gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ dargestellt wird. Hierfür ist dann die Bestimmung der Funktion φ aus (2) strenge und sehr einfach auszuführen. Was die mittleren Parallaxen π_m betrifft, so genügt es, wenn der Einfluß der Absorption beiseite gelassen wird, die Integralgleichung heranzuziehen

$$\frac{\pi_m''}{0''2} = \frac{\int\limits_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(\varrho) \cdot \varrho^3 \cdot \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho}{\int\limits_0^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(\varrho) \cdot \varrho^4\, \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho}. \tag{3}$$

Wie ich in den beiden früheren Arbeiten erwähnt habe, ergibt (3) das Resultat, daß die Funktion $\Delta(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ strenge genommen niemals andere als „normale“ Parallaxen liefern kann, d. h. solche, die durch die Formel

$$\pi_m'' = \Gamma \cdot h_m^{\frac{1}{2}}$$

gegeben sind. Es zeigt sich aber und ist wohl auch von vornherein zu übersehen, daß verhältnismäßig kleine Änderungen im Verlaufe von $\Delta(\varrho)$, die nur für relativ kleine ϱ von der Formel $\gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ stärker abweichen und somit das Bild, das man von der Dichtigkeitsverteilung im Sternsystem erlangt hat, nur geringfügig modifizieren, recht beträchtliche Änderungen in den Werten π_m erzeugen. Man wird also erwarten dürfen, durch solche Änderungen von Δ einen angenäherten Anschluß an die Kapteynschen m. Parallaxen erreichen zu können. Die weiteren Rechnungen werden in der Tat das Gesagte bestätigen. Indessen hört das Problem damit auf ein

rein mathematisches zu sein und man wird durch versuchsweises Rechnen, wie es scheint, leichter zum Ende gelangen. Da nämlich durch eine Veränderung von Δ auch eine Veränderung der Zahlen A_m notwendigerweise eintreten muß, wird man durch Berücksichtigung der m. Parallaxenwerte nicht mehr erreichen können, als eine gerade noch erträgliche Übereinstimmung mit den direkt ermittelten Abzählungsresultaten A_m und dann kommt ein Moment in die Betrachtung, das sich nicht genau präzisieren läßt. Indessen läßt sich der Weg der weiteren sukzessiven Annäherungen immerhin skizzieren. Mit dem veränderten Wert von $\Delta(\varrho)$ ist die Integralgleichung (2) von neuem aufzulösen; man erhält so einen neuen Wert von φ und behandelt mit diesem die Integralgleichung (3) zur Gewinnung eines verbesserten Wertes von Δ u. s. f. Aber die Behandlung der Integralgleichung (2) hört dann auf so einfach, wie früher, zu sein, da man auf Formen kommt, die, wie es scheint, noch nicht behobene Schwierigkeiten darbieten. — Der erste Schritt auf dem Weg der Annäherungen aber ist, wie erwähnt, sehr leicht auszuführen. Die Gleichungen (1) und (2) geben, wenn $\Delta = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$ gesetzt wird, nachdem sie differenziert worden sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A_m}{\partial h_m} &= -\gamma \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \cdot \int_0^1 x^{4-\lambda} \cdot \varphi(Hx^2)\,dx; \quad m < n \\ \frac{\partial A_m}{\partial h_m} &= -\gamma \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \int_0^{\sqrt{\frac{h_m}{h_n}}} x^{4-\lambda}\,\varphi(Hx^2)\,dx; \quad m > n \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Setzt man

$$\xi = \sqrt{\frac{h_m}{h_n}}, \quad \frac{\partial A_m}{\partial h_m} = f(\xi),$$

so wird die 2. Integralgleichung:

$$f(\xi) = -\gamma \left(\frac{H}{h_n}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \cdot \frac{1}{\xi^{5-\lambda}} \int_0^{\xi} x^{4-\lambda}\,\varphi(Hx^2)\,dx$$

und hieraus folgt ohne weiteres

$$\gamma \varphi(H\xi^2) = -\left(\frac{h_n}{H}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \cdot \frac{1}{\xi^{4-\lambda}} \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi^{5-\lambda} f(\xi)].$$

Die beiden Formeln (4) zeigen, daß für $m = n$ der erste Differentialquotient $\frac{d A_m}{d h_m}$ stetig verläuft. Das gleiche findet statt für den zweiten Differentialquotienten, wenn $\varphi(H) = 0$. Danach muß die Funktion ψ im folgenden Ausdruck gewählt werden. Für den brigg. Logarithmus von A_m werde nun gesetzt:

$$\log A_m = a_1 + b_1(m-n) + c_1 \psi(m-n).$$

Ist weiter

$$\varepsilon = 0.43429\ldots, \quad a = \frac{a_1}{\varepsilon}; \quad b = \frac{b_1}{\varepsilon}, \quad c = \frac{c_1}{\varepsilon},$$

so wird

$$\log \text{nat} A_m = a + b(m-n) + c\psi(m-n),$$

also

$$\frac{d A_m}{d h_m} = -\frac{5\varepsilon}{2 h_m} \cdot e^{a+b(m-n)+c\psi(m-n)} \cdot \{b + c\psi'(m-n)\}.$$

Nach der empirischen Formel für $\log A_m$ $(m < n)$ war $5 b_1 = 3 - \lambda$ und dieser Wert muß nach den obigen Bemerkungen beibehalten werden. Da weiter $m - n = -5 \log \xi$ ist, erhält man

$$\frac{\partial(\xi^{5-\lambda} f(\xi))}{\partial \xi} = + \frac{25 \varepsilon^2 c}{2 h_n \xi} \cdot e^{a + c\psi(-5\log\xi)}$$
$$\times \{[b + c\psi'(-5\log\xi)]\psi'(-5\log\xi) + \psi''(-5\log\xi)\}.$$

Führt man zur Abkürzung Γ ein

$$\Gamma = -\frac{25\varepsilon^2 c}{2 h_n \gamma}\left(\frac{h_n}{H}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}},$$

so wird

$$\varphi(H\xi^2) = \Gamma \cdot e^{-\frac{(5-\lambda)}{\varepsilon}\log\xi + c\psi(-5\log\xi)}$$
$$\times \{b\psi'(-5\log\xi) + \psi''(-5\log\xi) + c\psi'^2(-5\log\xi)\}.$$

Setzt man nun noch $\xi = \sqrt{\frac{i}{H}}$ so wird

$$\varphi(i) = \Gamma \cdot e^{-\frac{5-\lambda}{2\varepsilon}\log\left(\frac{i}{H}\right) + c\psi\left(-\frac{5}{2}\log\frac{i}{H}\right)}$$
$$\times\left\{b\,\psi'\left(-\frac{5}{2}\log\frac{i}{H}\right) + \psi''\left(-\frac{5}{2}\log\frac{i}{H}\right) + c\,\psi'^2\left(-\frac{5}{2}\log\frac{i}{H}\right)\right\}.$$

Will man, was vielleicht plausibel erscheint, $\varphi(H) = 0$ voraussetzen, so könnte man z. B. $\psi(x) = x^p$ setzen, wo p ein wenig größer als 2 ist. Gegenwärtig ist man noch weit entfernt davon für ψ einen irgendwie zuverlässigen Wert zu erlangen; dazu müßte eine weit größere Anzahl gut bestimmter Werte der Zahlen A_m für $m > n$ vorliegen. Man wird deshalb keine ernsten Bedenken dagegen erheben können, wenn genähert $\psi(x) = x^2$ gesetzt wird, da es sich zunächst nur um orientierende Rechnungen handeln kann. Macht man also den interpolatorischen Ansatz

$$\log A_m = a_1 + b_1(n - n) + c_1(m - n)^2,$$

so wird

$$\varphi(i) = 2\,\Gamma \cdot e^{-\frac{5-\lambda}{2\varepsilon}\log\frac{i}{H} + \frac{25}{4}c_1\left(\log\frac{i}{H}\right)^2}$$
$$\times\left\{1 - \frac{5}{2}b_1\log\left(\frac{i}{H}\right) + \frac{25}{2}c_1\left(\log\frac{i}{H}\right)^2\right\}.$$

Zur Verfügung stehen (s. II, S. 33), wenn $n < 11.16$, die Werte $\log A_m$:

m	$\log A_m$	f
11.16	6.222	6.265
13.90	7.433	7.406
14.80	7.688	7.702

Zur angenäherten Darstellung genügt die Formel:

$$\log A_m = 4.394 + 0.514(m - 7.5) - 0.0240(m - n)^2,$$

wie die danach berechneten Zahlen f zeigen, welche mit dem aus den späteren Rechnungen hervorgehenden $n = 10.5$ berechnet sind.

28*

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2\Gamma}\varphi(i) = e^{-5.261 \log\left(\frac{i}{H}\right) - 0.345\left(\log\frac{i}{H}\right)^2} \times \left\{1 - 2.959 \log\left(\frac{i}{H}\right) - 0.691\left(\log\frac{i}{H}\right)^2\right\}. \tag{5}$$

Mit Weglassung der Konstanten und $\log\frac{i}{H} = -x$ gesetzt

$$\varphi(i) = e^{+5.261\,x - 0.345\,x^2} \cdot \{1 + 2.959\,x - 0.691\,x^2\}.$$

Es ist selbstverständlich, daß eine solche Verteilungsfunktion nur in einem beschränkten Umfang gelten kann, da $\varphi(i)$ immer positiv bleiben muß und das in x quadratische Glied einen negativen Koeffizienten hat. Auch die für $\log A_m$ angesetzte Interpolationsformel kann ja nur bestenfalls für nicht zu große Werte von $m - n$ gelten. Merkwürdig ist nun aber, daß die gefundene Formel für $\varphi(i)$ große Ähnlichkeit mit derjenigen hat, die man erhält, wenn man die Kapteynschen Parallaxen, wie im folgenden geschehen wird, darzustellen versucht. Es wird sich nämlich für die Häufigkeitsfunktion ergeben

$$\varphi_1(i) = e^{+5.385\,x - 0.230\,x^2}.$$

Die Vergleichung beider φ ergibt:

x	$\frac{\varphi}{\varphi_1}$
0	1
$\frac{1}{2}$	2.1
1	2.6
2	2.0
3	0.9
4	0.2

Da die Einheit in x $2^1/_2$ Sterngrößen entspricht, muß man zweifellos in einem ziemlich weiten Bezirk den Verlauf der beiden Funktionen als sehr ähnlich bezeichnen, im besonderen, wenn die große Unsicherheit der Werte in Betracht gezogen

wird. Das ist aber, wie mir scheint, noch kein direkter Beweis für die Richtigkeit der m. Parallaxen, denn auch die normalen Parallaxen werden durch dieses φ ebenso wie durch jedes andere dargestellt und zwar genau. Vielmehr hat der etwas abgeänderte Verlauf von Δ in der Hauptsache die Darstellung der Werte π_m ermöglicht.

Ausdrücklich muß noch auf einen Punkt hingewiesen werden. Die Größe H ist zunächst aus den Abzählungsresultaten allein nicht bestimmbar. Es ergibt sich dies sofort aus den obigen Formeln. Danach ist

$$\gamma\left(\frac{H}{h_n}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}}\varphi(Hx^2)$$

nur Funktion von h_n und x und enthält H gar nicht. Man muß also H aus anderen Daten ableiten. Hierzu eignen sich die Werte der Parallaxen der helleren und hellsten Sterne. Man kann dazu eine Zusammenstellung derselben benutzen und daraus den Verlauf von $\varphi(i)$ für große i ableiten, was immerhin mit einiger Sicherheit geschehen kann und daraus H durch Extrapolation bestimmen. So habe ich in II aus der Comstockschen Formel H entsprechend der Größe -3.7 gefunden. Man kann aber auch, und das wird sicherer sein, die m. Parallaxen der Sterne z. B. der zweiten Größe ableiten und diese mit dem gefundenen φ berechnen, woraus sich dann m_0, das der Helligkeit H entspricht, ergibt. Ich will diese Rechnung wirklich aus dem hier auf noch recht unsicherer Grundlage abgeleiteten Wert (5) von $\varphi(i)$ vornehmen, um ganz im Rahmen der hier besprochenen Methode zu bleiben. Es wird also die Formel (3) unter der Voraussetzung $\Delta(\varrho) = \gamma \cdot \varrho^{-\lambda}$, $\lambda = 0.43$, berechnet.

Danach wird

$$\frac{\pi_m''}{0''2} = \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{J_{3-\lambda}}{J_{4-\lambda}}$$

und allgemein ist

$$J_m = \tfrac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{m-1}{2}}\varphi(Hx)\,dx.$$

Die Gleichung (5) hat die Form

$$\varphi(Hx) = e^{a\log x - b(\log x)^2} \cdot \{1 - c\log x - d(\log x)^2\}.$$

Setzt man noch

$$\varepsilon = 0.43429 \ldots p = -\frac{m+1}{2\varepsilon} - a; \quad \log x = -\frac{1}{\sqrt{b}}\left(z + \frac{p}{2\sqrt{b}}\right),$$

so kann man leicht die Formel aufstellen

$$J_m = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{b}}\, e^{\frac{p^2}{4b}} \int\limits_{-\frac{p}{2\sqrt{b}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz \left[1 + \frac{c}{\sqrt{b}}\left(z + \frac{p}{2\sqrt{b}}\right) - \frac{d}{b}\left(z + \frac{p}{2\sqrt{b}}\right)^2\right].$$

Abgesehen von konstanten, von p unabhängigen, Faktoren findet sich:

Man setze:

$$A = \left(1 + \frac{pc}{2b} - \frac{d}{2b} \cdot \frac{p^2}{2b} - \frac{d}{2b}\right)$$

$$B = \frac{1}{2\sqrt{b}}\left(c - \frac{2dp}{2b} - \frac{d}{2b}\, p\right)$$

$$J_p = e^{\frac{p^2}{4b}} \cdot A \cdot \int\limits_{-\frac{p}{2\sqrt{b}}}^{\infty} e^{-z^2} dz + B.$$

$J_{3-\lambda}$ ergibt sich, wenn $p = -\frac{4-\lambda}{2\varepsilon} - a$ gesetzt wird, und $J_{4-\lambda}$, wenn $p = p_1 = -\frac{5-\lambda}{2} - a$. Die Rechnung vereinfacht sich dadurch, daß mit den Zahlenwerten in (5) sich $\frac{d}{2b} = 1$ herausstellt. Ferner ist $p_1 = 0$, $p = +1.151$. Man findet

$$\pi''_m = 0''.2\ [0.7460] \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\log \pi''_m = 0.0470 + \tfrac{1}{5}(m_0 - m).$$

Die m. Parallaxen der helleren Sterne dürften ziemlich gut bestimmt sein. Ich entnehme den Angaben Herrn Kapteyns: $\pi'' = 0''.0383$ für $m = 2.7$. Dann ergibt sich

$$m_0 = -4.62.$$

Aus den späteren Rechnungen, die gänzlich unabhängig von den eben angestellten Betrachtungen sind, wird $m_0 = -4.3$ gefunden werden. Die Übereinstimmung der beiden Resultate ist in Anbetracht aller Umstände eine unerwartet vorzügliche.

Ist H und h_n bekannt, so ergibt sich nunmehr die Dimension des schematischen Sternsystems

$$r_1 = \sqrt{\frac{H}{h_n}}.$$

Einheit ist die Siriusweite, die einer Parallaxe $0''.2$ entspricht.

3.

Ich gehe zur Berechnung der m. Parallaxen über, indem die Dichtigkeitsfunktion $\Delta(\varrho)$ etwas verändert wird. Nach den Resultaten im Artikel 3 liegt es nahe eine Exponentialfunktion von φ anzusetzen, die von ähnlicher Form ist, wie die in (2) benutzte. Solche Formen sind in der Tat naheliegend, auch abgesehen von den Resultaten des letzten Artikels, sind auch in der letzten Zeit von anderer Seite benutzt worden. Ich gehe also aus von der Funktion

$$\varphi(i) = \Gamma_1 \cdot \left(\frac{H}{i}\right)^{\nu} e^{-k^2\left[\left(\log\frac{i}{H}\right)^2 + b\log\left(\frac{i}{H}\right) + c\right]},$$

wobei natürliche Logarithmen gemeint sind. Es ist selbstverständlich, daß das Glied

$$\left(\frac{H}{i}\right)^{\nu} = e^{-\nu\log\frac{i}{H}}$$

in den Exponenten gebracht werden kann, aber es ist unter Umständen zweckmäßig, dies nicht gleich von Anfang an zu tun. Um nun die vielleicht an sich plausible Bedingung

$\varphi(H) = 0$ einzuhalten, soll eine geringfügige Asymmetrie erzeugt werden, was auf unendlich viele Arten erreicht werden kann. Wie dies geschieht, ist beim augenblicklichen Stand der zu erreichenden Genauigkeit gänzlich willkürlich. Hier mag das Koordinatensystem, in dem i die Abszisse und ψ die Ordinate ist, um einen Winkel ε gedreht werden, so daß also

$$\varphi(i) = \psi(i) \cos\varepsilon - i \sin\varepsilon.$$

Die Bedingung $\varphi(H) = 0$ wird so

$$0 = \Gamma_1 e^{-k^2 c} \cos\varepsilon - H \sin\varepsilon; \quad \tang\varepsilon = \frac{\Gamma_1}{H} e^{-k^2 c},$$

demnach wird ($\Gamma_1 \cos\varepsilon = \Gamma$)

$$\varphi(i) = \Gamma \cdot \left\{ \left(\frac{H}{i}\right)^{\nu} \cdot e^{-k^2 \left[\left(\log\frac{i}{H}\right)^2 + b \log\frac{i}{H} + c\right]} - \frac{i}{H} e^{-k^2 c} \right\}. \quad (1)$$

Dabei treten allerdings für ganz kleine i negative φ auf, denn $\varphi(i)$ wird $= 0$, wenn, $\log\frac{i}{H} = \xi$ gesetzt,

$$-k^2(\xi + b) = \nu + 1.$$

Für die im folgenden vorkommenden Zahlenwerte $\nu = 0$, $k = \frac{5}{24}$, H entsprechend der Größe -4.3, $b = 53$ wird $\xi = -76$. Die entsprechenden Werte von i können also, wie leicht zu sehen, auch nicht den geringsten Einfluß ausüben.

Ich berechne nun das Integral

$$J_\mu = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \varrho^\mu \cdot \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho.$$

Führt man $x = \frac{h_m \varrho^2}{H}$ ein, so wird

$$J_\mu = \tfrac{1}{2} \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} \int_{\frac{h_m r_0^2}{H}}^{1} x^{\frac{\mu-1}{2}} dx \cdot \{x^{-\nu} \cdot e^{-k^2[(\log x)^2 + b\log x + c]} - x e^{-k^2 c}\}.$$

Der zweite Term hierin wird:

$$\frac{2\,e^{-k^2 c}}{\mu+3}\left\{1-\left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{\mu+3}{2}}\right\}.$$

Der erste nach Einführung von $y = \log x$:

$$\int\limits_{\log\frac{h_m r_0^2}{H}}^{0} dy \cdot e^{-k^2[y^2+by+c]+\frac{\mu+1-2\nu}{2}y}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$q = \frac{\mu-2\nu+1}{2}; \quad \sigma = \frac{bk^2-q}{2k}; \quad a = -\sigma - k\log\frac{h_m r_0^2}{H} \tag{2}$$

und nimmt als neue Integrationsvariable

$$z = ky + \sigma,$$

so wird das letzte Integral

$$\frac{e^{\sigma-k^2 c}}{k}\cdot\int\limits_{-\sigma}^{a} e^{-z^2}\,dz$$

und auf diese Weise schließlich

$$J_\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{4k}\cdot\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} e^{-k^2 c}$$
$$\times\left\{\sigma^2\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{a} e^{-z^2}\,dz - \frac{4k}{(\mu+3)\sqrt{\pi}}\left[1-\left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{\mu+3}{2}}\right]\right\}. \tag{3}$$

Mit dieser Formel lassen sich nunmehr die Integralgleichungen für A_m und π_m, in denen die innere Grenze des Sternsystems durch die Strecke r_0 bestimmt ist, darstellen. Es hat sich gezeigt, daß es genügt, die früher benutzte Funktion $\Delta(\varrho)$ in

$$\Delta(\varrho) = \varrho^{-\lambda} - a\,\varrho^{-\lambda_1} \tag{4}$$

umzuändern. Nun kann freilich für kleine ϱ, $\Delta(\varrho)$ negativ werden, was natürlich unzulässig ist. Um die dadurch entstehende Ungenauigkeit zu vermeiden, wurde die untere Grenze der ursprünglichen Integrale nicht $= 0$ sondern $= r_0$ gesetzt, oder, was dasselbe bedeutet, es wird angenommen, daß im Umkreis um die Sonne, dessen Radius $< r_0$ ist, keine Sterne stehen oder so wenige, daß von ihnen abgesehen werden kann. Da hier der Einfluß einer Absorption außer Betracht bleiben soll, wird nach Formel (3) des vorigen Artikels gerechnet werden können. Man erhält so

$$\frac{\pi_m}{0''2} = \frac{J_{3-\lambda} - a\, J_{3-\lambda_1}}{J_{4-\lambda} - a\, J_{4-\lambda_1}} = \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{Z}{N} \tag{5}$$

und für Z und N findet man

$$Z = e^{\sigma^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{a} e^{-z^2} dz - a \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sigma_1}^{a_1} e^{-z^2} dz$$
$$- \frac{4k}{(6-\lambda)\sqrt{\pi}} \left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{6-\lambda}{2}}\right] + \frac{4ka}{(6-\lambda_1)\sqrt{\pi}} \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \cdot \left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{6-\lambda_1}{2}}\right].$$

$$N = e^{\sigma'^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sigma'}^{a'} e^{-z^2} dz - a \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sigma_1'}^{a_1'} e^{-z^2} dz$$
$$- \frac{4k}{(7-\lambda)\sqrt{\pi}} \left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{7-\lambda}{2}}\right] + \frac{4ka}{(7-\lambda_1)\sqrt{\pi}} \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \cdot \left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{7-\lambda_1}{2}}\right],$$

wobei

$$\sigma = \frac{bk}{2} - \frac{4 - 2\nu - \lambda}{4k} \qquad \sigma_1 = \frac{bk}{2} - \frac{4 - 2\nu - \lambda'}{4k} = \sigma + \frac{\lambda_1 - \lambda}{4k}$$

$$a = -\sigma - k \log\left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right) \qquad a_1 = -\sigma_1 - k \log\left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)$$

$$\sigma' = \frac{bk}{2} - \frac{5 - 2\nu - \lambda}{4k} = \sigma - \frac{1}{4k} \qquad \sigma_1' = \frac{bk}{2} - \frac{5 - 2\nu - \lambda_1}{4k} = \sigma + \frac{\lambda_1 - \lambda - 1}{4k}$$

$$a' = -\sigma' - k \log\left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right) \qquad a_1' = -\sigma_1' - k \log\left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right).$$

Nochmals sei erwähnt, daß alle vorkommenden Logarithmen natürliche sind. Die numerische Anwendung dieser Formeln erfolgte durch Versuche und diese wurden so eingerichtet, daß m. Parallaxen erhalten werden, die ähnlich verlaufen wie die von Herrn Kapteyn angegebenen. Danach wurden insbesondere a und λ_1 gewählt. Nach einigen Versuchen bin ich bei folgenden Annahmen stehen geblieben:

$$H \text{ entspricht } -4.3 \text{ Sterngrößen},$$
$$r_0 = \tfrac{1}{3}, \quad \sigma = 1.4, \quad \sigma' = 0.2; \quad \sigma_1 = 2.0, \quad \sigma_1' = 0.8, \quad \lambda_1 - \lambda = 0.5,$$
$$4k = \tfrac{5}{6}; \quad \log a = 9.7600 - 10.$$

Schließlich wurde von $\lambda = 0.556$ zufälligerweise ausgegangen. Es ist leicht zu übersehen, daß die Substitution des später gefundenen definitiven Wertes $\lambda = 0.49$ bei den Formeln für π_m keine merkbare Verbesserung notwendig machen wird. Die Dichtigkeitsfunktion $\varDelta$ ist jetzt

$$\varDelta(\varrho) = \varrho^{-\lambda-\frac{1}{2}} \cdot (\varrho^{\frac{1}{2}} - a)$$

und man sieht, daß in der Tat $\varDelta(\varrho)$ für $\varrho \geqq \frac{1}{3}$ stets positiv bleibt. Ich teile nun die numerische Rechnung in einer Ausdehnung mit, welche die Nachrechnung ohne Mühe gestattet. Dies halte ich für durchaus nötig, wenn solche doch immerhin nicht ganz einfachen Rechnungen nicht wertlos sein sollen. Die Rechnung ist von $m = 0.5$ bis $m = 11.5$ ausgeführt und zwar dürfte die dritte Dezimale höchstens um ein oder zwei Einheiten unrichtig sein. Sie wurde so angelegt:

$$\psi_m(\lambda) = \frac{4k}{(6-\lambda)\sqrt{\pi}}\left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{6-\lambda}{2}}\right]$$

$$\chi_m(\lambda) = \frac{4k}{(7-\lambda)\sqrt{\pi}}\left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{7-\lambda}{2}}\right]$$

$$Z_m = -\psi_m(\lambda) + a\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \cdot \psi_m(\lambda_1)$$

$$N_m = -\chi_m(\lambda) + a\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \chi_m(\lambda_1).$$

Weiter wird bezeichnet

$$(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-z^2}\, dz$$

und damit berechnet

$$Z = Z_0 + Z_m = e^{\sigma^2}[(a) + (\sigma)] - a\, e^{\sigma_1^2} \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{4}} [(a_1) + (\sigma_1)] + Z_m$$

$$N = N_0 + N_m = e^{\sigma'^2}[(a') + (\sigma')] - a\, e^{\sigma_1'^2} \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{4}} [a_1' + (\sigma_1')] + N_m.$$

Es ergibt sich, wobei außer den bekannten Tafeln für die Krampschen Integrale die Tafeln von G. F. Becker und C. E. van Ostrand, „Hyperbolic functions", Washington 1909, gute Dienste leisteten, für die brigg. Logarithmen

$\log e^{\sigma} = 0.8512$	$\log e^{\sigma'^2} = 0.0174$
$\log e^{\sigma_1^2} = 1.7372$	$\log e^{\sigma_1'^2} = 0.2779$

$(\sigma) = 0.9523$	$(\sigma') = 0.2227$
$(\sigma_1) = 0.9953$	$(\sigma_1') = 0.7421$

Die weiter folgenden Tabellen bedürfen wohl keiner näheren Erklärung.

m	a	a_1	a'	a_1'	Z_m	N_m	$\log\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{4}}$
0.5	− 0.0211	− 0.6212	+ 1.1788	+ 0.5788	− 0.0683	− 0.0567	− 0.48
1.5	+ 0.1707	− 0.4293	+ 1.3707	+ 0.7707	723	598	− 0.58
2.0	+ 0.2666	− 0.3334	+ 1.4666	+ 0.8666	736	611	− 0.63
3.0	+ 0.4585	− 0.1415	+ 1.6585	+ 1.0585	762	633	− 0.73
4.0	+ 0.6456	+ 0.0456	+ 1.8456	+ 1.2456	783	651	− 0.83
5.0	+ 0.8423	+ 0.2423	+ 2.0423	+ 1.4423	800	665	− 0.93
6.0	+ 1.0352	+ 0.4352	+ 2.2352	+ 1.6352	813	676	− 1.03
7.0	+ 1.2261	+ 0.6261	+ 2.4261	+ 1.8261	823	684	− 1.11
8.5	+ 1.5139	+ 0.9139	+ 2.7139	+ 2.1139	835	694	− 1.28
10.0	+ 1.8018	+ 1.2018	+ 3.0018	+ 2.4018	844	701	− 1.43
11.5	+ 2.0895	+ 1.4895	+ 3.2895	+ 2.6895	878	706	− 1.58

m	(a)	(a_1)	(a')	(a'_1)	$\log e^{\sigma^2}\times$ $[(a)+(\sigma)]$	$\log e^{\sigma^2}\times$ $[(a)+(\sigma)]_1$	$\log e^{\sigma^2}\times$ $[(a)+(\sigma)]'$	$\log e^{\sigma^2}\times$ $[(a)+(\sigma)]'_1$
0.5	− 0.0238	− 0.6203	+ 0.9045	+ 0.5869	0.8190	1.3112	0.0694	0.4014
1.5	+ 0.1908	− 0.4562	0.9474	0.7242	0.9093	1.4689	0.0856	0.4441
2.0	0.2939	− 0.3627	0.9619	0.7796	0.9468	1.5383	0.0910	0.4601
3.0	0.4832	− 0.1586	0.9810	0.8656	1.0084	1.6598	0.0979	0.4841
4.0	0.6388	+ 0.0514	0.9909	0.9218	1.0529	1.7570	0.1015	0.4990
5.0	0.7665	+ 0.2681	0.9961	0.9587	1.0866	1.8387	0.1032	0.5085
6.0	0.8568	0.4618	0.9985	0.9792	1.1111	1.9007	0.1042	0.5138
7.0	0.9171	0.6241	0.9994	0.9901	1.1229	1.9466	0.1045	0.5165
8.5	0.9677	0.8038	0.9999	0.9972	1.1345	1.9923	0.1047	0.5183
10.0	0.9892	0.9108	1.0000	0.9993	1.1393	2.0173	0.1047	0.5188
11.5			1.0000	0.9999			0.1047	0.5190

m	$\log\left[0''2\cdot\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$	$\log Z_0$	$\log N_0$	$\log Z$	$\log N$	π_0	π	π_k
0.5	8.3410	0.4296	9.8409	0.4185	9.8038	0''0851	0.0903	0.0892
1.5	8.1410	5635	9015	0.5549	9.8678	635	673	630
2.0	8.0410	6220	9263	0.6143	9.8937	545	578	530
3.0	7.8410	7242	9667	0.7179	9.9360	397	420	375
4.0	7.6410	8084	9977	0.8031	9.9683	283	299	265
5.0	7.4410	8776	0.0213	0.8730	9.9929	198	210	187
6.0	7.2410	9366	0398	0.9335	0.0121	137	145	132
7.0	7.0410	9777	0538	0.9739	0.0267	0.0092	0.0097	94
8.5	6.7410	1.0279	0693	1.0245	0.0428	50	53	56
10.0	6.4410	1.0628	0799	1.0597	0.0538	0.0027	28	33
11.5			0873		0.0615			

Hierbei gibt $\pi_0 = 0''2\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{Z_0}{N_0}$ die Parallaxenwerte für $Z_m = N_m = 0$. Unter π_k sind die von Herrn Kapteyn in Nr. 3487 der A. N. aus den Eigenbewegungen abgeleiteten Parallaxenwerte angegeben. Die Differenzen der berechneten Werte π_0 und π und den π_k zeigen einen systematischen Gang, der indessen in keinem Falle bei dem hypothetischen Charakter der π_k in Frage kommen kann. Die ausgeführte Rechnung dürfte, da sie gar nicht zum Zwecke einer möglichst guten Darstellung der π_k angestellt worden ist, zeigen, daß man sehr leicht durch Veränderung der angenommenen Konstanten einen besseren Anschluß erreichen könnte. Einen solchen herbeizu-

führen oder eine neue Rechnung mit den später von Herrn Kapteyn gegebenen Parallaxenwerten anzustellen, scheint mir gegenwärtig ganz zwecklos und ich habe deshalb davon abgesehen um so mehr, als die obige Darstellung in Anbetracht der Umstände vollkommen zufriedenstellend ist.

Für die Ableitung der Zahlen A_m kommt in Betracht, daß man in der benutzten Bezeichnungsweise hat

$$\frac{d A_m}{d h_m} = - c \cdot \left(\frac{h_m}{h_2}\right)^{\frac{\lambda-5}{2}} \cdot N \tag{6}$$

und man hieraus durch Integration A_m erhält. Der angestrebten Genauigkeit entsprechend empfiehlt sich dabei folgendes Verfahren. Man kann zwischen $m = 0.5$ und $m = 11.5$ N genügend genau durch die Formel

$$N = 1.2071 - (0.4250)\left(\frac{h_m}{h_k}\right)^{0.2340} + (0.0010)\left(\frac{h_m}{h_2}\right)^2$$

darstellen, wie die Gegenüberstellung der Werte dieser Formel N_f und der gegebenen Werte N zeigt.

	N_f	N	Δ
$m = 0.5$	0.6357	0.6365	+ 8
1.5	7366	7373	+ 7
2.0	7831	7828	− 3
3.0	8648	8629	− 19
4.0	9309	9297	− 12
5.0	9845	9837	− 8
6.0	1.0276	1.0283	+ 7
7.0	1.0624	1.0635	+ 11
8.5	1.1024	1.1636	+ 12
10.0	1.1313	1.1319	+ 6
11.5	1.1524	1.1520	− 4

Die Integration von (6) ergibt

$$A_m - A_{m_1} = J_m - J_{m_1},$$

wo

$$J_m = \Gamma\left(\frac{h_m}{h_2}\right)^{\frac{\lambda-3}{2}} X_m; \quad X_m = 1 - [9.6363 - 10]\left(\frac{h_m}{h_2}\right)^{0.2340} - [7.145 - 10]\left(\frac{h_m}{h_2}\right)^2.$$

Der Zusammenhang zwischen c und Γ ist gegeben durch

$$\Gamma = \frac{2.4142}{3-\lambda} c h_2 = \frac{2.4142}{2.5100} c h_2 .$$

Hierbei wurde, auf einer orientierenden Rechnung fußend, $\lambda = 0.490$, also $\log \Gamma = 1.7010$ angenommen, woraus $\log(c h_2) = 1.7179$ folgt. Die Interpolationsformel für N gilt nur für $m > 0.5$. Man wird demnach $m_1 = 0.5$ setzen dürfen und man muß A_{m_1} aus der Bedingung berechnen, daß A_{m_0} strenge $= 0$ Null wird, wenn $h_{m_0} r_0^2 = H$, und da $r_0 = \frac{1}{3}$ genommen wurde, $h_{m_0} = 9H$. Da H der Größe -4.3 entspricht, ist also $m_0 = -6.68 \cdot A_{m_1}$, wird also strenge berechnet durch die Formel

$$A_{m_1} = -\frac{1}{h_2}[1.7179] \int_{h_{m_0}}^{h_{m_1}} \left(\frac{h_2}{h_m}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} N \cdot d h_m$$

$$= [1.6822] \int_{m_0}^{m_1} \left(\frac{h_2}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} N \cdot dm .$$

Eine beiläufige Berechnung der N ergab:

m	N
— 6.5	0.001
— 5.5	0.022
— 4.5	0.081
— 3.5	0.173
— 2.5	0.284
— 1.5	0.404
— 0.5	0.524
+ 0.5	0.637

Die beiden ersten Werte geben keinen merkbaren Beitrag zum Integral.

Die anderen ergeben mit den Cotesschen Faktoren $A_{0.5} = 3.80$. Da nun $J_{0.5} = 3.35$ wird, so erhält man schließlich, indem die Konstante Γ zum Schluß um eine Kleinigkeit abgeändert (nämlich $\log c h_2 = 1.7159$) wird, die Formel

$$A_m = 0.45 + [1.6990]\left(\frac{h_2}{h_m}\right)^{1.255} X_m$$
$$X_m = 1 - [9.6363 - 10]\left(\frac{h_m}{h_2}\right)^{0.2340} - [7.145 - 10]\left(\frac{h_m}{h_2}\right)^2. \qquad (7)$$

Mit dieser Formel ergeben sich nunmehr die folgenden Werte von $\log A_m$:

	$\log A_m$	B	Δ
$m =$ 0.5	0.578	0.81 :	+ 0.23 :
1.5	1.172	1.312	+ 0.140
2.5	1.740	1.827	+ 0.087
3.75	2.427	2.450	+ 23
4.75	2.961	2.957	— 4
5.75	3.488	3.504	+ 16
6.75	4.010	4.008	— 2
7.50	4.398	4.394	— 4
9.20	5.272	5.268	— 4
10.00	5.680	5.678	— 2
11.16	6.270	6.222 :	+ 48 :

Die Darstellung ist jedenfalls eine gute, da keine wirkliche Ausgleichung stattgefunden hat und für die allerhellsten Sterne wegen der geringen Zahl größere Abweichungen, wie oben erwähnt, eventuell als zulässig bezeichnet werden müssen. Unter B sind die von mir aus den direkten Abzählungen ermittelten Anzahlen gegeben (s. z. B. II, S. 33).

Die Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ ergibt sich, da ohne die Allgemeinheit zu beschränken $\nu = 0$ gesetzt werden kann, abgesehen von einem konstanten Faktor

$$\varphi(i) = e^{-k^2\left[\left(\log\frac{i}{H}\right)^2 + b\log\frac{i}{H}\right]} - \frac{i}{H}.$$

Mit den gefundenen Zahlen ist

$$k = \frac{1}{4.8}; \quad b = 53.875.$$

Da die Logarithmen natürliche sind, so wird jetzt, wenn man mit ξ den log Brigg $\frac{i}{H}$ bezeichnet:

$$\varphi(i) = e^{-0.2301\,\xi^2 - 5.3844\,\xi} - e^{\frac{1}{0.434}}\cdot\xi.$$

Drückt man i in Größenklassen (m_0) aus, so erhält man (H entspricht der Größe -4.3) das Verhältnis des zweiten Terms der letzten Gleichung zum ersten

$$\log y = \log \frac{(2)}{(1)} = 0.016\, m_0^2 - 1.301\, m_0 - 5.891.$$

Für $m_0 = -4.3$ wird selbstverständlich $y = 1$. Aber schon für $m_0 = -4.0$ ist $y = 0.38$, für $m_0 = -2$, $y = 0.0006$. Die Abnahme ist daraufhin rapid und man kann also den Ausdruck für $\varphi(i)$ bis zu hohen Werten von i auf das erste Glied beschränken, wie schon oben erwähnt wurde, mit Ausschluß der ganz in der Nähe von H gelegenen Helligkeiten.

Um die Anzahlen A_m für $m > n$ zu finden, ist zunächst zu berechnen

$$J_\mu = \int_0^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \varrho^\mu \, \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho .$$

Mit der Häufigkeitsfunktion (1) und mit Benutzung der früheren Bezeichnungen wird

$$J_\mu = \Gamma_1 \cdot \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}}$$

$$\times \left\{ e^{\sigma^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sigma - k \log \frac{h_m}{h_n}}^{-\sigma - k \log \frac{h_m r_0^2}{H}} e^{-z^2}\, dz - \frac{4k}{(\mu+3)\sqrt{\pi}} \left[\left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{\mu+3}{2}} - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{\mu+3}{2}} \right] \right\}.$$

Unter Vorbehalt der näheren Bestimmung der Konstante Γ_1 ist dann

$$-\frac{d A_m}{d h_m} = \Gamma_1 \cdot (J_{4-\lambda} - a\, J_{4-\lambda_1}).$$

Da $m > n$ und $n > 10$, so wird unter allen Umständen

$$\left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{\mu+3}{2}}$$

als unmerklich fortgelassen werden können. Aber auch im Integrale tritt die Vereinfachung ein, daß man die obere Grenze $+\infty$ annehmen kann. Es ist also

$$-\frac{d A_m}{d h_m} = \Gamma_1 \left[\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \cdot \left\{ e^{\sigma'^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sigma' - k \log \frac{h_m}{h_n}}^{\infty} e^{-z^2} d z - \frac{4 k}{(7-\lambda)\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{7-\lambda}{2}} \right\} \right.$$

$$\left. - \, a \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \left\{ e^{\sigma_1'^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sigma_1' - k \log \frac{h_m}{h_n}}^{\infty} e^{-z^2} d z - \frac{4 k}{(7-\lambda_1)\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{7-\lambda_1}{2}} \right\} \right].$$

Es darf nicht übersehen werden, daß hier stets natürliche Logarithmen gemeint sind.

Die letzte Formel kann so geschrieben werden: man setze

$$\left\{ \begin{aligned} N &= C - D \cdot \left(\frac{h_n}{h_{11.5}}\right)^{\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}} \\ C &= e^{\sigma'^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{-\sigma' - k \log \frac{h_m}{h_n}}^{\infty} e^{-z^2} d z - \frac{4 k}{(7-\lambda)\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{7-\lambda}{2}} \\ D &= a \left(\frac{h_{11.5}}{H}\right)^{\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}} \\ &\times \left\{ \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}} \cdot e^{\sigma_1'^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_{-\sigma_1' - k \log \frac{h_m}{h_n}}^{\infty} e^{-z^2} d z - \frac{4 k}{(7-\lambda_1)\sqrt{\pi}} \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{7-\lambda}{2}} \right\} . \\ -\frac{d A_m}{d h_m} &= \Gamma_1 \cdot \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \cdot N. \end{aligned} \right.$$

Die Konstante Γ_1 bestimmt sich aus der Bedingung, daß für $m = n$ die letzte Formel mit (6) übereinstimmen muß.

Es wird also

$$\Gamma_1 = \left(\frac{h_2}{H}\right)^{\frac{5-\lambda}{2}} \cdot c$$

und man erhält so

$$A_m - A_n = [6.4492] \left(\frac{h_{11.5}}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \cdot \int\limits_n^m \left(\frac{h_n}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} N \cdot dm.$$

Für $\lambda = 0.49$ wird schließlich

$$A_m - A_n = [6.4492] \left(\frac{h_{11.5}}{h_n}\right)^{1.255} \cdot \int\limits_n^m e^{+1.1558(m-n)} \cdot N \cdot dm.$$

Für die Ausführung ist zu bemerken, daß wie oben

$$\sigma' = 0.2;\ \sigma_1' = 0.8,\ \frac{\lambda_1 - \lambda}{2} = \tfrac{1}{4},\ \log e^{\sigma'^2} = 0.0174;$$

$$\log e^{\sigma_1'^2} = 0.2779,\ k = \frac{1}{4.8};\ \log a = 9.7600$$

anzunehmen ist. So erhält man:

$m-n$	$\log C$	$\log D$	$\log N_{10.5}$	$\log e^{1.1558(m-n)}$	$f_{10.5}$
0	0.0793	8.6886	0.0565	0.0000	0.0756
0.5	0.0593	8.6308	0.0384	0.2509	0.0400
1.0	0.0198	8.5641	0.0003	0.5019	0.0002
1.5	9.9718	8.4927	9.9533	0.7529	9.9534
2.0	9.9176	8.4173	9.9003	1.0039	9.9004
2.5	9.8578	8.3380	9.8410	1.2549	9.8413
3.0	9.7921	8.2544	9.7760	1.5059	9.7762
3.5	9.7204	8.1663	9.7049	1.7568	9.7049
4.0	9.6428	8.0735	9.6278	2.0078	9.6276
4.5	9.5590	7.9756	9.5445	2.2588	9.5441
5.0	9.4689	7.8726	9.4548	2.5098	9.4544

Das erste Intervall muß noch mehr geteilt werden.

$m-n$	$\log C$	$\log D$	$\log N_{11.5}$	$\log N_{10.5}$	$f_{10.5}$
0	0.0793	8.6886	0.0613	0.0565	0.0564
0.1	782	6782	606	559	556
0.2	754	6671	581	535	534
0.3	710	6553	540	495	497
0.4	656	6432	488	444	448
0.5	593	6308	428	384	384

Ich stelle nun weder die N durch Interpolationsformeln f dar und das gelingt, wie die Gegenüberstellung zeigt, beinahe vollkommen durch

$$\text{für } m - n \leq 0.5, \quad f_{10.5} = 0.0564 - 0.0010\, x - 0.0700\, x^2$$
$$\text{für } m - n > 0.5, \quad f_{10.5} = 0.0756 - 0.0632\, x - 0.0122\, x^2.$$

Man kann auch schreiben

$$m - n \leq 0.5, \quad N_{10.5} = [0.0564] \cdot e^{-0.0023\,(m-n) - 0.1612\,(m-n)^2}$$
$$m - n > 0.5 \quad\quad = [0.0756] \cdot e^{-0.1455\,(m-n) - 0.0281\,(m-n)^2},$$

für $n = 10.5$ wird also

$$\left.\begin{aligned} m - n \leq 0.5 \quad A_m - A_n &= [6.0036] \int_0^{m-n} e^{1.1535\, x - 0.1612\, x^2}\, dx \\ m - n > 0.5 \quad A_m - A_{n_1} &= [6.0228] \int_{n_1 - n}^{m-n} e^{1.0103\, x - 0.0281\, x^2}\, dx \end{aligned}\right\} . \quad (8)$$

Am einfachsten erfolgt die Berechnung solcher Integrale mit Hilfe bekannter Reihenentwicklungen. Man hat bekanntlich

$$J(\xi) = e^{\xi^2} \int_\xi^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2\,\xi} \left\{ 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\xi^2 + 1} + \frac{\frac{1}{4}}{(\xi^2 + 1)(\xi^2 + 2)} \cdots \right\}.$$

Damit habe ich das Täfelchen berechnet:

ξ	$\log J(\xi)$	
2.0	9.3546−10	
		178
2.1	3368	
		171
2.2	3197	
		166
2.3	3031	
		161
2.4	2870	
		156
2.5	2714	
		150
2.6	2564	
		146
2.7	2418	
		142
2.8	2276	
		138
2.9	2138	
		134
3.0	2004	

Die oben vorkommenden Integrale haben die Form

$$I = \int_{n_1-n}^{m-n} e^{bx - a x^2}\, dx = e^{\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2} \cdot \int_{n_1-n}^{m-n} e^{-\left(x\sqrt{a} - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx .$$

Setzt man demnach

$$\xi = \frac{b}{2\sqrt{a}},$$

so kann man schreiben

$$I \cdot \sqrt{a} = e^{\xi^2 - [\xi-(m-n)\sqrt{a}]^2} \cdot J(\xi \quad (m-n)\sqrt{a})$$

$$- e^{\xi^2-[\xi-(n_1-n)\sqrt{a}]^2} \cdot J\{\xi - (n_1 - n)\sqrt{a}\}.$$

Die Formel (7) gibt $\log A_{10.5} = 5.9348$. Damit ergibt sich nach der ersten Formel (8) mit Hilfe der vorhandenen Tafeln für die Krampschen Integrale

$$\log A_{n_1} = \log A_{11.0} = 6.1853.$$

Für die Berechnung der zweiten Formel (8) ist zu bemerken, daß $\log \xi = 0.47906$, ferner

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot e^{\xi^2-[\xi-(n_1-n)\sqrt{a}]^2} \cdot J[\xi - (n_1 - n)\sqrt{a}] = [9.4262 - 10].$$

Und jetzt kann man mit verhältnismäßig geringer Mühe für die Sternzahlen A_m die folgenden Werte finden:

m	$\log A_m$	
11.0	6.185	
		+238
11.5	6.423	
		225
12.0	6.648	
		216
12.5	6.864	
		207
13.0	7.071	
		200
13.5	7.271	
		194
14.0	7.465	
		188
14.5	7.653	
		182
15.0	7.835	
		175
15.5	8.010	

Man findet dann durch Interpolation die mit R bezeichneten Werte:

m	$\log A_m$ R	B	$B - R$
11.16	6.262	6.222	− 40
13.90	7.426	6.448	+ 22
14.84	7.777	7.681	− 96

Die Zahlen B sind meinen Ermittlungen in II (S. 33) als aus Abzählungen hervorgegangen entnommen. Bei dieser Darstellung kann man sich vorläufig beruhigen, da die Zahlen B höchst unsicher sind. Man darf überdies nicht vergessen, daß $n = 10.5$ nach ziemlich roher Schätzung angenommen wurde und eine weitere Variation von n, die zu einer besseren Darstellung führen könnte, gegenwärtig keine Bedeutung haben dürfte.

Für $n = 10.5$ folgt die Grenze des Sternsystems in der Entfernung $\log r_1 = 2.96$, also $r_1 = 910$ Siriusweiten, entsprechend einer Parallaxe $0\rlap{.}''00022$.

Die Dichtigkeit $\Delta(\varrho)$ war hierbei angesetzt:

$$\Delta(\varrho) = \varrho^{-0.49} \{1 - [9.7600] \varrho^{-0.5}\}.$$

Dabei wurde der Raum bis zu $\varrho = \frac{1}{3}$, was einer Parallaxe $0\rlap{.}''6$ entspricht, als sternleer angenommen. Stellt man nun diese Werte von Δ gegenüber den nach der alten Formel $\Delta = \varrho^{-0.430}$ berechneten, so findet sich:

ϱ	Δ	Δ_0
1	0.614	1.000
2	0.610	0.742
3	0.551	0.624
4	0.522	0.551
5	0.488	0.501
7.5	0.425	0.420
10	0.383	0.372
15	0.334	0.312
20	0.290	0.276
30	0.244	0.232
40	0.216	0.204

ϱ	Δ	Δ_0
50	0.195	0.186
75	0.163	0.156
100	0 143	0.138
150	0.121	0.116
200	0.103	0.102
300	0.086	0.086
400	0.075	0.076
500	0.067	0.069
750	0.057	0.058
1000	0.051	0.051

Hierbei wurde 0.16 zum $\log \Delta(\varrho)$ addiert, um die Zahlen vergleichbarer zu machen. Die Zahlen Δ und Δ_0 als parallel laufend und somit die alte Dichtigkeitsverteilung Δ_0 im Sternsystem als zutreffend bezeichnen zu können, dürfte wohl von niemandem bestritten werden.

Ich habe in beiden früheren Abhandlungen nachgewiesen, daß die Abzählungsresultate niemals die wirkliche Dichtigkeit D sondern eine Funktion Δ von r ergeben, welche außer von D, noch von der im Weltraum namentlich durch Verdeckungen, Dazwischentreten von Nebeln etc. verursachten Absorption abhängt. Den hier auftretenden Zusammenhang zwischen Δ und D habe ich II, Art. 1 ausführlich und vollständig angegeben. Wird das Licht eines Sternes in der Entfernung r nicht im quadratischen Verhältnis $\frac{1}{r^2}$, sondern gemäß der Formel $\frac{\psi(r)}{r^2}$ geschwächt, so ist nach II, S. 17

$$D(r) = \frac{\psi(r) - \frac{1}{2} r \psi'(r)}{\psi^{\frac{5}{2}}(r)} \Delta\left(\frac{r}{\sqrt{\psi(r)}}\right)$$

und da angenähert angenommen werden darf $\Delta(r) = r^{-\lambda}$, so wird

$$D(r) = r^{-\lambda} \cdot \frac{\psi(r) - \frac{1}{2} r \psi'(r)}{\psi^{\frac{5-\lambda}{2}}(r)}. \tag{9}$$

Setzt man

$$\varphi'^{\frac{3-\lambda}{2}} = \frac{1}{y},$$

so kann man (9) auch schreiben

$$\frac{dy}{dr} + \frac{3-\lambda}{r}y - \frac{(3-\lambda)D(r)}{r^{1-\lambda}} = 0. \qquad (10)$$

Durch das Zeugnis, welches viele Sternhaufen abgeben und vielleicht auch mit Hilfe von plausiblen Analogieschlüssen wird man zur Annahme geführt, daß die wirkliche Dichtigkeit D nirgends, wenigstens für größere r und auf weite Strecken hin, zunehmen darf. Diese Annahme, deren Berechtigung zunächst nicht näher untersucht werden soll, führt auf gewisse noch zulässige Maximalwerte der Absorption, die nun aufgesucht werden sollen. Zuvor mag darauf hingewiesen werden, daß durch (10) jedem gegebenen $D(r)$ eine Absorptionsgröße y zugeordnet ist. Das allgemeine Integral von (10) ist

$$y = \frac{1}{r^{3-\lambda}}\{C + (3-\lambda)\int D \cdot r^2\, dr\},$$

wo C eine willkürliche Konstante ist. Soll z. B. $D = \gamma$ sein, wo γ eine Konstante ist, so wird

$$y = \frac{C}{r^{3-\lambda}} + \frac{(3-\lambda)\gamma}{3} \cdot r^{\lambda}.$$

Wenn etwas Ähnliches wie Absorption vorliegen soll, muß offenbar y und $\frac{dy}{dr}$ positiv sein, d. h.

$$-\frac{3-\lambda}{3}\gamma r^3 < C < \frac{\lambda}{3}\gamma r^3.$$

Man könnte nun voraussetzen, daß für alle $0 < r < \sigma$ keine Absorption vorkommt, dann würde also C innerhalb gewisser Grenzen gewählt werden können. Soll aber die Formel für alle r gelten, dann muß $C = 0$ sein. Wegen der

Schwierigkeit einer plausiblen Interpretation hat die weitere Verfolgung solcher oder ähnlicher Annahmen kein Interesse.

Die obengenannten Maximalwerte lassen sich natürlich nur ableiten, wenn über die Wirkungsweise der Absorption bestimmte Annahmen gemacht werden. Ich habe in II zwei solche Annahmen erwähnt, die ein gewisses Interesse darbieten. Zuerst die Annahme, daß vorgelagerte dunkle Massen die Lichtschwächung verursachen und ihre Verteilungsdichte der Dichtigkeit D der Sternverteilung proportional ist, zweitens die „allgemeine Absorption", bei der die Absorption nach einer einfachen Exponentialfunktion von r vor sich geht. Im ersten Falle ist

$$\psi(r) = e^{-\nu \int\limits_0^r D\,dr},$$

also

$$\psi'(r) = -\nu \cdot D \cdot \psi(r).$$

Die Gleichung (1) wird so

$$\frac{\psi'(r)}{\psi(r)} = -\nu \cdot r^{-\lambda} \cdot \frac{\psi - \frac{1}{2} r \psi'}{\psi^{\frac{5-\lambda}{2}}}.$$

Durch Einführung einer neuen Variablen $\lambda = r^{1-\lambda}$ ergibt sich

$$(1-\lambda)\frac{d\psi}{dx}\left[\psi^{\frac{3-\lambda}{2}} - \frac{\nu x}{2}\right] = -\nu \cdot \psi.$$

Es werde weiter an Stelle ψ die Variable t eingeführt durch

$$t = \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{\nu} \cdot \sqrt{\frac{1-\lambda}{3-\lambda}}\left[\psi^{\frac{3-\lambda}{2}} - \frac{\nu x}{2}\right]$$

und der Kürze wegen werde bezeichnet

$$\xi = \sqrt{\frac{3-\lambda}{1-\lambda}}, \quad b = \xi + \frac{1}{\xi},$$

so wird die letzte Differentialgleichung

$$x\frac{dt}{dx} + t + \frac{1}{t} + b = 0,$$

deren Integration keine Schwierigkeit verursacht. Man kann das Integral leicht in die Form bringen:

$$x^2 \frac{(t+\xi)^{4-2\lambda}}{(t^2+bt+1)^{1-\lambda}} = C,$$

wo C eine willkürliche Konstante ist. Zu ihrer Bestimmung ist zu bemerken, daß für verschwindend kleine x, $\psi = 1$ werden muß, da dies der Wirkung einer Absorption entspricht. Bezeichnet man den Grenzwert von tx für $x = 0$ mit $(tx)_0$, so wird nach (11)

$$(tx)_0 \frac{\nu\xi}{2} = 1. \tag{11}$$

Es folgt also hieraus

$$C = (tx)_0^2 = \frac{4}{\nu^2\xi^2}.$$

Setzt man nunmehr

$$t = \frac{1}{z}, \quad xt = \eta; \quad x = \eta z,$$

so wird das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{4}{\nu^2\xi^2} = \eta^2 \frac{(1+z\xi)^{4-2\lambda}}{(1+bz+z^2)^{1-\lambda}}. \tag{12}$$

Aus (11) folgt weiter

$$\psi^{\frac{3-\lambda}{2}} = \frac{\nu x}{2} + \tfrac{1}{2}\nu t x \xi = \frac{\nu x}{2}(1+t\xi) = \frac{\nu}{2}\eta(z+\xi)$$

und damit folgt aus der Gleichung $-\nu D \psi(r) = \psi'(r)$ nach leichter Zwischenrechnung

$$D = \frac{2r^{-\lambda}}{\nu\xi\eta}.$$

Man hat nämlich, da

$$\frac{dx}{dr} = (1-\lambda) r^{-\lambda},$$

$$\frac{3-\lambda}{2} \cdot \frac{\psi'(r)}{\psi(r)} = (1-\lambda) \cdot r^{-\lambda} \cdot \frac{1+\xi\left(t+x\frac{dt}{dx}\right)}{\eta(z+\xi)},$$

also

$$D = -\frac{2\,r^{-\lambda}}{\nu\,\xi^2} \frac{\left(1-\xi\,b-\frac{\xi}{t}\right)}{x(1+t\,\xi)} = \frac{2\,r^{-\lambda}}{\nu\,\xi\,\eta}.$$

Weiter folgt aber aus (12)

$$\frac{2}{\nu\,\xi\,\eta} = \frac{(1+z\,\xi)^{2-\lambda}}{(1+b\,z+z^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}} = \frac{2\,z}{\nu\,\xi\,x}$$

und hieraus

$$x = r^{1-\lambda} = \frac{2\,z}{\nu\,\xi\,A},$$

wenn gesetzt wird

$$A = \frac{(1+z\,\xi)^{2-\lambda}}{(1+b\,z+z^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}}.$$

Man hat also zur numerischen Rechnung

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{(1+z\,\xi)^{2-\lambda}}{(1+b\,z+z^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}} \\ r &= \left(\frac{2\,z}{\nu\,\xi\,A}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \\ D &= r^{-\lambda} \cdot A \end{aligned}\right\}. \qquad (13)$$

Man wird für verschiedene z, von $z = 0$, angefangen, die zugehörigen A und D berechnen und dann für verschiedene ν die den z entsprechenden r, so daß sich die Rechnung recht einfach und übersichtlich gestaltet. Ich habe indessen noch eine kleine Änderung vorgenommen, indem ich

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}} = \mu$$

setzte. Man hat dann nämlich in

$$\left(\frac{r}{\mu}\right) = \left(\frac{2z}{A\xi}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}; \quad D \cdot \mu^{\lambda} = A\left(\frac{r}{\mu}\right)^{-\lambda}$$

zwei von r unabhängige Größen. Die folgende Zusammenstellung einiger Werte ergibt, daß $D\mu^{\lambda}$ ein Minimum hat, bei z etwa $= 0.25$. Vorher nimmt also D ab, von da ab nimmt es zuerst langsam, sehr bald aber schnell zu. Will man also zunehmende Werte von D ausschließen, so wird man das dem Wert $z = 0.25$ entsprechende r als den Grenzwert von r, durch welchen das Sternsystem begrenzt ist, anzunehmen haben. Oben wurde der Grenzwert r_1 ohne Vorhandensein einer Absorption bestimmt zu

$$r_1 = \sqrt{\frac{H}{h_n}},$$

wo H der Sterngröße -4.3 entspricht und $n = 10.5$ war. Hieraus folgt $r_1 = 920$ Einheiten. Jetzt wäre durch die obigen Formeln r_1 gegeben durch

$$\frac{\psi(r_1)}{r_1^2} = \frac{h_n}{H}$$

und da gefunden wurde

$$\psi^{\frac{3-\lambda}{2}} = \frac{\nu}{2}\eta(z+\xi), \quad \frac{\nu}{2}\eta = \frac{1}{\xi A},$$

so ist

$$\psi = \left(\frac{z+\xi}{\xi A}\right)^{\frac{2}{3-\lambda}}.$$

Es folgt daraus

$$\left(\frac{\xi+z}{A\xi}\right)^{\frac{2}{3-\lambda}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r}{\mu}\right)^2 \mu^2} = [-5.92].$$

Weiter wurde angenommen $\lambda = 0.43$; daraus folgt $\log \xi = 0.3270$. Entnimmt man der folgenden Zahlentabelle die Werte A und $\left(\frac{r}{\mu}\right)$, die dem Argument $z = 0.25$ entsprechen, so wird

$$\log\left(\frac{\xi + z}{A\,\xi}\right)^{\frac{2}{3-\lambda}} = -0.1364, \quad \log\left(\frac{r_1}{\mu}\right)^2 = -2.9884.$$

Es findet sich auf diese Weise

$$\frac{1}{\mu^2}[2.8520] = [-5.92]; \quad \text{d. h. } \log\mu = 4.3860.$$

Damit ergibt sich weiter

$$r = \frac{1}{317} \text{ und } r_1 = 780 \text{ Einheiten.}$$

Die Ausdehnung des Sternsystems wird also kleiner und demzufolge die Sternfülle größer. Es wird weiter

$$\log\psi(r_1) = -0.1364,$$

d. h. die Absorption ist sehr gering; sie beträgt erst für die Sterne an der Grenze des Systems in 780 Siriusweiten 0.34 Größenklassen. Nimmt man die betrachtete Absorption nach Größe und Art an, so ergeben sich folgende Dichtigkeiten D in den wahren Entfernungen r, während D_0 die ohne Absorption nach der Formel $r^{-0.43}$ berechneten sind. Man sieht, daß sich die D nur wenig geändert haben.

r	D	D_0	D_1	A	A_1
1	1.00	1.00	1.00	0^m	0^m
6.5	0.46	0.45	0.45	0.02	0.00
21	0.28	0.27	0.27	0.04	0.00
65	0.18	0.17	0.17	0.07	0.02
122	0.15	0.13	0.14	0.10	0.04
187	0.13	0.11	0.12	0.13	0.07
256	0.11	0.09	0.11	0.16	0.09
400	0.10	0.08	0.10	0.21	0.14
612	0.10	0.06	0.09	0.29	0.21
780	0.10	0.06	0.09	0.34	0.26
802	—	0.06	0.09	—	0.27

Ich lasse nun die Tabelle folgen, aus der einige Werte den zuletzt angeführten Zahlen zugrunde liegen.

z	$\log A$	$\log\left(\frac{r}{\mu}\right)$	$\log(D\mu^{\lambda})$
0.01	0.0112	— 3.574	1.548
0.02	0.0221	— 3.065	1.340
0.03	0.0327	— 2.775	1.226
0.04	0.0432	— 2.574	1.150
0.05	0.0534	— 2.422	1.095
0.06	0.0635	— 2.300	1.053
0.07	0.0733	— 2.201	1.020
0.08	0.0829	— 2.115	0.993
0.09	0.0924	— 2.042	0.971
0.10	0.1018	— 1.978	0.953
0.12	0.1199	— 1.871	0.925
0.14	0.1373	— 1.784	0.905
0.16	0.1542	— 1.712	0.891
0.18	0.1706	— 1.651	0.881
0.20	0.1863	— 1.599	0.874
0.25	0.2238	— 1.494	0.866
0.30	0.2586	— 1.417	0.868
0.40	0.3220	— 1.309	0.885
0.50	0.3776	— 1.236	0.908
1.00	0.5878	— 1.077	1.051

Betrachtet man in ähnlicher Weise die allgemeine Absorption, so liegt die Sache viel einfacher, da man die Formel (II, S. 17)

$$D_1 = r^{-\lambda}\left(1 + \frac{\nu}{2} r\right) e^{\frac{3-\lambda}{2}\nu r}$$

benutzen kann. Hier ist $\psi = e^{-\nu r}$ angenommen worden. Setzt man zur Abkürzung $\frac{\nu}{2} r = \varepsilon$, so wird

$$\frac{1}{D_1} \cdot \frac{d D_1}{d r} = \frac{3-\lambda}{r(1+\varepsilon)} \cdot \left\{\varepsilon^2 + \frac{2(2-\lambda)}{3-\lambda}\varepsilon - \frac{\lambda}{3-\lambda}\right\}.$$

Das Minimum für D tritt dann ein, wenn

$$\varepsilon^2 + 2 \cdot \frac{2-\lambda}{3-\lambda}\varepsilon = \frac{\lambda}{3-\lambda},$$

woraus folgt

$$\varepsilon = \frac{1}{3-\lambda}\left\{-(2-\lambda) + \sqrt{4-\lambda}\right\}; \quad \log\varepsilon = 9.0944 - 10.$$

Es ist also für die Grenze des Sternsystems

$$\log \nu r_1 = 9.3954 - 10; \quad \log e^{-\nu r_1} = 9.8921 - 10$$

und da jetzt

$$\log \left(\frac{e^{-\nu r_1}}{r_1^2} \right) = -5.92$$

sein muß, folgt $r_1 = 805$ Einheiten, $\nu = \frac{1}{3240}$. Die Absorption macht hier an der Grenze im log -0.1079 oder 0.27 Sterngrößen aus und die Formel für die Dichtigkeit wird

$$D_1 = r^{-0.43} \left(1 + \frac{r}{6480}\right) e^{[6.5983-10]r}.$$

Danach ist das in die obige Zusammenstellung aufgenommene D_1 berechnet. Ich habe gleich die den verschiedenen r entsprechenden Absorptionen A und A_1 in Größenklassen angegeben. Es geht daraus hervor, daß beide Arten Absorptionen nahezu gleich wirken und wegen ihrer Kleinheit den Verlauf der wahren Sterndichtigkeit nur verhältnismäßig wenig ändern.

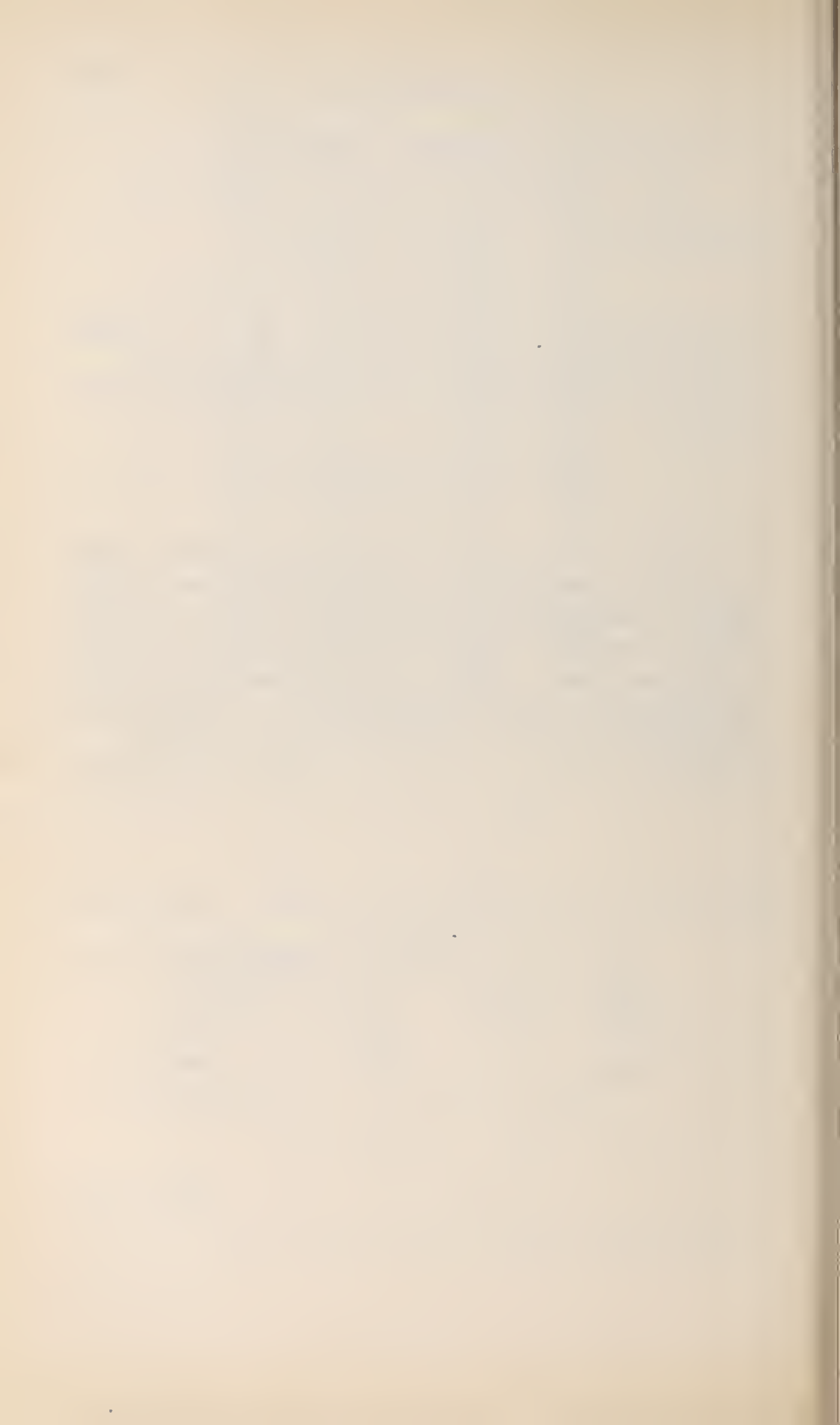
Berichtigungen:

S. 422, Zeile 18 v. o. lies: weil ein statt als ein

S. 437, „ 10 v. u. „ und sie sind statt sind

S. 442, „ 10 v. o. „ $\log e^{\sigma^2}$ „ $\log e^{\sigma}$

S. 446, „ 1 v. u. „ $e^{\frac{1}{0.434}\xi}$ „ $e^{\frac{1}{0.434}} \cdot \xi$



Konstruktionen der Beschleunigungen bei zusammengesetzten Mechanismen.

Von **Ludwig Burmester.**

Mit einer lithogr. Tafel.

Vorgetragen in der Sitzung am 1. Juli 1911.

I. Vorbemerkungen.

Um die beschleunigenden Kräfte bei zusammengesetzten Mechanismen zu ermitteln, ist die Konstruktion der Beschleunigungen ihrer Glieder erforderlich; denn die beschleunigenden Kräfte ergeben sich als das Produkt aus der betreffenden Beschleunigung und der zugehörigen Masse. Infolge schneller Bewegung können an Gliedern eines Mechanismus sehr große Beschleunigungen entstehen, so daß die beschleunigenden Kräfte auf den Mechanismus störend und auch gefährlich einwirken. Dies kann z. B. eintreten bei komplizierten Steuerungsmechanismen schnellgehender Lokomotiven und Dampfmaschinen. Deshalb ist es zweckmäßig, vor der praktischen Ausführung eines derartigen Mechanismus in seinem Entwurf die Beschleunigungen seiner Glieder in ihren verschiedenen Lagen zu konstruieren und die Wirkung der beschleunigenden Kräfte zu untersuchen.

Es kommt in zusammengesetzten, zwangläufigen Mechanismen vor, die Beschleunigungen eines Gliedes zu bestimmen, das durch drei führende Glieder mit je einem anderen Gliede vermittels kinematischer Elementenpaare verbunden ist. Die Lösung dieser klassischen kinematischen Aufgabe ist zwar

nicht einfach aber doch nicht schwierig; denn die Ausführung erfordert schließlich die Konstruktion des selbstentsprechenden Punktes zweier in einer Geraden liegenden, ähnlichen Punktreihen, die durch zwei Paare entsprechender Punkte bestimmt sind, oder die Konstruktion eines geradlinigen geometrischen Ortes. Dadurch werden die Beschleunigungen bei vielen zusammengesetzten Mechanismen und deren speziellen Fällen in gemeinsamer Weise vermittelt.

Wegen der Allgemeinheit der kinematischen Untersuchung der ebenen Mechanismen, bei denen die Punkte der Glieder sich in parallelen Ebenen bewegen, betrachten wir jedes Glied als ein starres ebenes System, das aus der Gesamtheit aller in unbegrenzter Ebene und in gegenseitig unveränderlicher Lage befindlichen Punkten besteht, und das wir kurz ein ebenes System nennen.

Die Konstruktionen der Geschwindigkeiten werden bekanntlich vereinfacht, wenn wir die gerichtete Geschwindigkeit eines Punktes aus der Tangente seiner Bahn in dem Drehungssinn des Uhrzeigers um diesen Punkt in die Normale seiner Bahn, also um einen rechten Winkel drehen. Diese so gedrehte Geschwindigkeit habe ich die lotrechte Geschwindigkeit des Punktes genannt. Demnach befinden sich alle lotrechten Geschwindigkeiten der Punkte eines ebenen Systems in den Bahnnormalen, die durch den jeweiligen Pol desselben gehen.

Bei der Bestimmung der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen werden wir die wichtigen kinematischen Sätze verwenden:

„Das ebene System der Endpunkte der lotrechten Geschwindigkeiten ist ähnlich und ähnlichliegend zu dem bewegten System, dessen Punkte diese lotrechten Geschwindigkeiten besitzen, und der Pol ist der Ähnlichkeitspunkt.“

„Das ebene System der Endpunkte der Beschleunigungen ist gleichartig ähnlich zu dem bewegten System, dessen Punkte diese Beschleunigungen besitzen[1]).“

[1]) L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1888, S. 21 und 804.

Wenn der Pol eines ebenen Systems und die Geschwindigkeit eines seiner Punkte gegeben sind, dann sind die Geschwindigkeiten aller seiner Punkte bestimmt, und somit ist auch der Geschwindigkeitszustand des Systems bekannt.

Wenn die Beschleunigungen zweier Punkte eines ebenen Systems gegeben sind, dann sind die Beschleunigungen aller seiner Punkte bestimmt, und somit ist auch der Beschleunigungszustand des Systems bekannt.

Durch die Kenntnis der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustände der den Gliedern eines Mechanismus angehörenden ebenen Systeme in ihren verschiedenen Lagen, die sich vermittels der konstruierten Bahnkurven der betreffenden Punkte der bewegten Glieder ergeben, erlangen wir eine vollständige Einsicht in die Bewegungen der Glieder eines Mechanismus. Denn die Geschwindigkeitszustände bestimmen mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten die statischen Beziehungen und die Beschleunigungszustände bestimmen mit den betreffenden Massen multipliziert die dynamischen Beziehungen in einem Mechanismus.

Zum Verständnis der Ableitung der Konstruktionen der Beschleunigungen bei zusammengesetzten Mechanismen müssen vorher noch bekannte, einfache konstruktive Bestimmungen der Beschleunigungen erörtert werden.

II. Konstruktionen der Beschleunigungen eines ebenen Systems.

Die Bewegung eines ebenen Systems S in einem ruhenden ebenen System ist in je drei unendlich nahen Lagen bestimmt, wenn in Fig. 1 zwei Systempunkte A, F sich beziehlich auf den gegebenen Bahnkurven α, φ, dessen Krümmungsmittelpunkte A, Φ sind, bewegen, wenn ferner die jeweilige Beschleunigung FF_j des einen Systempunktes F sowie sein Bewegungssinn durch den Pfeil an der Bahnkurve φ bekannt ist.

Die auf $F\Phi$ gefällte Senkrechte F_jF_n bestimmt durch ihren Fußpunkt F_n die Normalbeschleunigung FF_n des Punktes F, dann ist, wenn durch FF_v seine Geschwindigkeit dargestellt wird,

$$FF_n = \frac{\overline{FF_v}^2}{F\Phi} \quad \text{und} \quad \overline{FF_{\mathfrak{v}}}^2 = FF_n \cdot F\Phi.$$

Hiernach ergibt sich, indem wir die Strecke ΦF um die Strecke $FF_\nu = FF_n$ verlängern, durch den über ΦF_ν beschriebenen, nach dem Bewegungssinn gelegenen Halbkreis, der die Tangente der Bahnkurve φ in dem Punkt F_v trifft, die Geschwindigkeit FF_v des Punktes F nach Größe und Richtung. Wenn der Punkt F_n innerhalb der Strecke $F\Phi$ liegt, erhalten wir auch durch einen über $F\Phi$ beschriebenen Halbkreis, der die auf $F\Phi$ senkrechte Gerade $Fj\,F_n$ in dem Punkt V trifft, die Geschwindigkeit $FF_v = FV$; und indem wir FF_v im Sinne des Uhrzeigers nach $FF_{\mathfrak{v}}$ drehen, ergibt sich auf $F\Phi$ die lotrechte Geschwindigkeit $FF_{\mathfrak{v}}$ des Punktes F.

Nehmen wir an, daß die lotrechte Geschwindigkeit $FF_{\mathfrak{v}}$ und die Normalbeschleunigung FF_n oder die Beschleunigung FF_j des Punktes F bekannt sind, dann ist dadurch der Krümmungsmittelpunkt Φ der Bahnkurve φ bestimmt, der sich als Schnittpunkt der Geraden $FF_{\mathfrak{v}}$ mit der auf $F_\nu F_v$ Senkrechten $F_v\Phi$ und auch mit der auf FV Senkrechten $V\Phi$ ergibt. Der momentane Pol $\mathfrak{P}$ des bewegten Systems S ist der Schnittpunkt der beiden Normalen $F\Phi$, $A\mathsf{A}$ der Bahnkurven $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\alpha}$; und durch die zu FA Parallele $F_{\mathfrak{v}}A_{\mathfrak{v}}$ wird auf $A\mathsf{A}$ die lotrechte Geschwindigkeit $AA_{\mathfrak{v}}$ des Punktes A bestimmt, die dann im entgegengesetzten Sinn des Uhrzeigers um einen rechten Winkel gedreht die Geschwindigkeit AA_v ergibt.

Um nun die Konstruktion der Beschleunigung AA_j des Systempunktes A abzuleiten, denken wir uns dem bewegten System S eine Parallelbewegung erteilt, so daß allen Punkten dieses Systems eine der Geschwindigkeit FF_v entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeit FF_v' und eine der Beschleunigung FF_j entgegengesetzt gleiche Beschleunigung FF_j' zugefügt wird. Dadurch wird der Punkt F während zweier Zeitelemente in Ruhe versetzt und der Punkt A rotiert gleichzeitig um F mit der auf AF senkrechten Geschwindigkeit $A\mathfrak{A}_v$, die als Resultante aus der ursprünglichen Geschwindigkeit AA_v und

der zugefügten, mit FF'_v gleichen und gleichgerichteten Geschwindigkeit AA'_v erfolgt. Einfacher ergibt sich die zugehörige auf AF liegende lotrechte Geschwindigkeit $A\mathfrak{A}_\mathfrak{v}$ durch die zu $F_\mathfrak{v}F$ Parallele $A_\mathfrak{v}\mathfrak{A}_\mathfrak{v}$. Ferner ist die auf AF nach F gerichtete Strecke

$$A\mathfrak{A}_n = \frac{\overline{A\mathfrak{A}_v}^2}{AF} = \frac{\overline{A\mathfrak{A}_\mathfrak{v}}^2}{AF}$$

die Normalbeschleunigung des momentan um F rotierenden Punktes A. Hiernach erhalten wir durch die auf $F\mathfrak{A}_v$ Senkrechte $\mathfrak{A}_v\mathfrak{A}_\nu$, welche die Gerade FA in dem Punkte $\mathfrak{A}_\nu$ trifft, die Normalbeschleunigung $A\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_\nu A$. Diese für die Konstruktionen der Beschleunigungen wichtige Strecke $A\mathfrak{A}_n$ wollen wir die zu dem Punkt A gehörende Hilfsstrecke nennen. Ist $A\mathfrak{A}_\mathfrak{v} < AF$, dann erhalten wir diese Hilfsstrecke $A\mathfrak{A}_n$ auch, indem wir über AF einen Halbkreis und um A mit dem Radius $A\mathfrak{A}_\mathfrak{v}$ einen Kreisbogen beschreiben, die sich in dem Punkt U schneiden, durch den Fußpunkt $\mathfrak{A}_n$ der auf AF senkrechten Geraden $U\mathfrak{A}_n$: und in dieser Geraden muß der Endpunkt $\mathfrak{A}_j$ der Beschleunigung $A\mathfrak{A}_j$ des um F rotierenden Punktes A liegen, die als Resultante aus der noch unbekannten Beschleunigung AA_j und aus der zugefügten mit FF_j gleichen und gleichgerichteten Beschleunigung AA'_j erfolgt.

Wird nun auch auf $A\mathsf{A}$ die nach A gerichtete Normalbeschleunigung des Punktes A, nämlich die Strecke

$$AA_n = \frac{\overline{AA_\mathfrak{v}}^2}{A\mathsf{A}}$$

konstruiert, so muß der Endpunkt A_j der Beschleunigung AA_j des Punktes A in der auf $A\mathsf{A}$ senkrechten Geraden $A_n n$ liegen; und um ihn zu bestimmen, ziehen wir von einem beliebigen Punkt x der Geraden $U\mathfrak{A}_n$ die Strecke xy gleich und gleichgerichtet zu A'_jA oder FF_j, fällen dann von dem Punkt y die auf AF Senkrechte $A_p\mathfrak{a}$, die zu $U\mathfrak{A}_n$ parallel ist und die Gerade $A_n n$ in A_j trifft. Dadurch wird das Parallelogramm $AA_j\mathfrak{A}_jA'_j$ bestimmt, dessen Eckpunkt $\mathfrak{A}_j$ in

der Geraden $U\mathfrak{A}_n$ liegt; und es ist $A\mathfrak{A}_j$ die resultierende Beschleunigung aus den Beschleunigungen AA_j, AA_j'. Hiernach ist die Strecke AA_p die Projektion der Beschleunigung AA_j auf die Gerade AF und die Strecke $\mathfrak{A}_n A_p$ gleich der Projektion FF_p der Beschleunigung FF_j auf die Gerade AF; folglich ist in geometrischer Summe

$$AA_p = A\mathfrak{A}_n + FF_p.$$

Aus dieser Ableitung ergibt sich die folgende Konstruktion der Beschleunigung AA_j des Punktes A.

Wir konstruieren die auf der Geraden AF liegende, zu dem Punkt A gehörende Hilfsstrecke $A\mathfrak{A}_n$, machen auf AF die Strecke $\mathfrak{A}_n A_p$ gleich und gleichgerichtet FF_p und errichten auf AF die Senkrechte $A_p\mathfrak{a}$, die sich als sehr wichtigen geometrischen Ort des Endpunktes A_j der Beschleunigung AA_j erweist und deshalb durch Strichpunktierung ausgezeichnet ist. Ferner konstruieren wir vermittels der lotrechten Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ und des Krümmungsradius $A\mathsf{A}$ der Bahnkurve α die Normalbeschleunigung AA_n des Punktes A und errichten auf $A\mathsf{A}$ die Senkrechte $A_n n$, die $A_p\mathfrak{a}$ in dem Endpunkt A_j der Beschleunigung AA_j des Punktes A trifft[1]).

Da das System S der Punkte $A, F, \ldots$ und das System S_j der Punkte $A_j, F_j, \ldots$ gleichartig ähnlich sind, so werden durch die Beschleunigungen AA_j, FF_j die Beschleunigungen aller Punkte des bewegten Systems S nach Größe und Richtung bestimmt; und damit ist der Beschleunigungszustand dieses Systems bekannt.

Wenn in Fig. 1 die Bahnkurven φ, α Kreise, also Φ, A ihre Mittelpunkte sind, dann können wir $\Phi FA\mathsf{A}$ als ein Kurbelgetriebe betrachten, dessen Glied $\Phi\mathsf{A}$ fest ist, und dann sind die Beschleunigungen aller Punkte der Koppel FA durch die Beschleunigungen FF_j, AA_j bestimmt. Wenn ferner der Punkt A im Unendlichen liegt, die Bahnkurve α also eine Gerade ist, dann entsteht ein Schubkurbelgetriebe; und es ist der Schnittpunkt, den jene Gerade $A_p\mathfrak{a}$ mit der Geraden α bildet, der Endpunkt der Beschleunigung des Punktes A.

[1]) Vgl. Kinematik, S. 816.

III. Konstruktionen der Beschleunigungen zweier drehpaarig verbundenen ebenen Systeme.

In Fig. 2 werden zwei in einem ruhenden ebenen System bewegte Systeme S_1, S_2 beziehlich durch die beiden vermittels einer Drehpaarung A verbundenen Glieder FA, LA vertreten, die ein Gelenk bilden. Die Bewegung des Gelenkes ist in drei unendlich nahe Lagen, also während zweier Zeitelemente, dadurch bestimmt, daß für den Punkt F die lotrechte Geschwindigkeit $FF_\mathfrak{v}$ und die Beschleunigung FF_j, für den Punkt L die lotrechte Geschwindigkeit $LL_\mathfrak{v}$ und die Beschleunigung LL_j gegeben sind.

Um die Beschleunigung AA_j des Gelenkpunktes A zu konstruieren, müssen wir erst seine lotrechte Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ bestimmen, indem wir zu FA die Parallele $F_\mathfrak{v} A_\mathfrak{v}$ und zu LA die Parallele $L_\mathfrak{v} A_\mathfrak{v}$ ziehen, die sich in dem Punkt $A_\mathfrak{v}$ schneiden. Die Geraden $FF_\mathfrak{v}$, $LL_\mathfrak{v}$ treffen die Gerade $AA_\mathfrak{v}$ beziehlich in dem Pol $\mathfrak{P}_1$ des Systems S_1 und in dem Pol $\mathfrak{P}_2$ des Systems S_2 in Bezug auf das ruhende System. Die zu $F_\mathfrak{v} F$ Parallele $F_\mathfrak{v} \mathfrak{A}'_\mathfrak{v}$ trifft AF in dem Punkt $\mathfrak{A}'_\mathfrak{v}$ und die zu $L_\mathfrak{v} L$ Parallele $L_\mathfrak{v} \mathfrak{A}''_\mathfrak{v}$ trifft AL in dem Punkt $\mathfrak{A}''_\mathfrak{v}$. Hiernach konstruieren wir in der angegebenen Weise, wie aus der analogen Bezeichnung erkenntlich ist, die zu dem Punkt A gehörende Hilfsstrecke $A\mathfrak{A}'_n$ auf AF und die Hilfsstrecke $A\mathfrak{A}''_n$ auf AL. Ferner zeichnen wir die Projektion FF_p der Beschleunigung FF_j auf die Gerade AF und die Projektion LL_p der Beschleunigung LL_j auf die Gerade AL, machen auf AF die Strecke $\mathfrak{A}'_n A'_p = FF_p$, auf AL die Strecke $\mathfrak{A}''_n A''_p = LL_p$; dann ist der Schnittpunkt der auf AF Senkrechten $A'_p \mathfrak{a}'$ und der auf AL Senkrechten $A''_p \mathfrak{a}''$ der Endpunkt A_j der Beschleunigung AA_j des Gelenkpunktes A. Es ist zu bemerken, daß die Bestimmung dieser Beschleunigung AA_j außer den Geschwindigkeiten der Punkte F, L nur noch die Projektionen FF_p, LL_p ihrer Beschleunigungen erfordert. Durch die Beschleunigungen AA_j, FF_j und AA_j, LL_j sind beziehlich die Beschleunigungszustände der Systeme S_1 und S_2 bestimmt.

Die Krümmungsmittelpunkte $\Phi, \Lambda, \mathsf{A}$ der Bahnkurven φ, λ, α der Punkte F, L, A sind in bekannter Weise vermittels der zugehörigen lotrechten Geschwindigkeiten $FF_\mathfrak{v}$, $LL_\mathfrak{v}$, $AA_\mathfrak{v}$ und Normalbeschleunigungen FF_n, LL_n, AA_n konstruiert.

Allgemeiner sind in Fig. 3 die beiden ebenen Systeme S_1, S_2 durch Glieder FG_1H_1, LG_2H_2 vertreten, die vermittels der Glieder G_1G_2, H_1H_2 durch je zwei Drehpaarungen verbunden sind. Ferner sind die Glieder FG_1H_1, LG_2H_2 in den Punkten F, L an die gegenüberliegenden Glieder $\Phi'F'$, $\Lambda'L'$ eines Kurbelgetriebes $\Phi'F'L'\Lambda'$, dessen Glied $\Phi'\Lambda'$ fest ist, drehpaarig angeschlossen. Dadurch werden bei der Bewegung dieses Kurbelgetriebes die Punkte F, L bestimmte Geschwindigkeiten und Beschleunigungen erhalten.

Ist in dem System S_2 der Punkt A konstruiert, dessen Bahnkurve in Bezug auf das System S_1 den Punkt F des Systems S_1 als Krümmungsmittelpunkt besitzt; dann können wir FAL in drei unendlich nahen Lagen, also während zweier Zeitelemente, als ein Gelenk betrachten, dessen Glieder AF, AL die Systeme S_1, S_2 vertreten, und die Beschleunigungen aller Glieder dieses zusammengesetzten Mechanismus konstruieren.

Um nach der Bobillierschen Konstruktion jenen Punkt A zu bestimmen, ziehen wir die Verbindungsgerade $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ der Eckpunkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ des von $G_1G_2H_2H_1$ gebildeten vollständigen Vierecks und die Gerade $\mathfrak{P}F$, ferner machen wir den Winkel $F\widehat{\mathfrak{P}}\mathfrak{q}' = H_1\widehat{\mathfrak{P}}\mathfrak{Q}$, ziehen dann durch den Schnittpunkt $\mathfrak{Q}'$ der beiden Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{q}'$, FH_1 und den Punkt H_2 die Gerade $\mathfrak{Q}'H_2$, welche die Gerade $\mathfrak{P}F$ in dem Punkt A trifft. Ebenso kann man auch in dem System S_1 den Punkt bestimmen, dessen Bahnkurve in Bezug auf S_2 den Punkt L als Krümmungsmittelpunkt besitzt, und dadurch ergibt sich ein zweites dem vorherigen gleichartiges Gelenk.

IV. Konstruktionen der Beschleunigungen zweier richtpaarig verbundenen ebenen Systeme.

In Fig. 4 sind zwei sich in einem ruhenden System bewegende Systeme S_1, S_2 durch eine Richtpaarung verbunden, die schematisch gezeichnet aus einer prismatischen Stange g und einer auf ihr gleitenden Hülse h besteht. Die Stange g vertritt das ebene System S_1 und die Hülse h das ebene System S_2. Wegen der Allgemeinheit ist an der Stange g ein Arm befestigt mit einem Punkt F des ebenen Systems S_1 und ebenso an der Hülse h ein Arm mit einem Punkt L des ebenen Systems S_2. In der Praxis wird man, um Pressungen zu vermeiden, den Punkt F in die Gerade g und den Punkt L in die Mitte der Hülse h legen.

Für den Punkt F ist die lotrechte Geschwindigkeit $FF_\mathfrak{v}$ und die Beschleunigung FF_j, ebenso für den Punkt L die lotrechte Geschwindigkeit $LL_\mathfrak{v}$ und die Beschleunigung LL_j gegeben. Um den Beschleunigungszustand des ebenen Systems S_1 zu bestimmen, müssen wir für den mit dem Punkt L momentan koinzidierenden Punkt des ebenen Systems S_1 die lotrechte Geschwindigkeit $LL_\mathfrak{v}^1$ und die Beschleunigung LL_j^1 konstruieren. Die gegebene lotrechte Geschwindigkeit $LL_\mathfrak{v}$ ist die Resultante aus der lotrechten Geschwindigkeit $LL_\mathfrak{v}^1$ und der lotrechten Geschwindigkeit $LL_\mathfrak{v}^{21}$, mit der sich der Punkt L des ebenen Systems S_2 parallel zu der Geraden g in dem ebenen System S_1 bewegt. Demzufolge ist der Endpunkt $L_\mathfrak{v}^1$ der lotrechten Geschwindigkeit $LL_\mathfrak{v}^1$ der Schnittpunkt der durch $F_\mathfrak{v}$ zu FL Parallelen und der durch $L_\mathfrak{v}$ zu g Senkrechten. Denn die Strecke $L_\mathfrak{v}^1 L_\mathfrak{v}$ ist gleich und gleichgerichtet jener lotrechten Geschwindigkeit $LL_\mathfrak{v}^{21}$; und $LL_\mathfrak{v}$ ist die eine Diagonale des Parallelogramms $LL_\mathfrak{v}^1 L_\mathfrak{v} L_\mathfrak{v}^{21}$. Die Geraden $FF_\mathfrak{v}$, $LL_\mathfrak{v}^1$ schneiden sich in dem Pol $\mathfrak{P}_1$ des ebenen Systems S_1 und die durch $\mathfrak{P}_1$ zu g Senkrechte trifft die Gerade $LL_\mathfrak{v}$ in dem Pol $\mathfrak{P}_2$ des ebenen Systems S_2 in Bezug auf das ruhende ebene System.

Wenn wir zu $F_{\mathfrak{v}}F$ die Parallele $L_{\mathfrak{v}}^{1}\mathfrak{L}_{\mathfrak{v}}$ bis an FL ziehen, ferner in bekannter Weise vermittels der Strecke $L\mathfrak{L}_{\mathfrak{v}}$ auf der Geraden FL die zu dem Punkt L gehörende Hilfsstrecke $L\mathfrak{L}_{n}$ konstruieren und die Strecke $\mathfrak{L}_{n}L_{p}^{1}$ gleich der Projektion FF_{p} der Beschleunigung FF_{j} machen, dann enthält die auf FL errichtete Senkrechte $L_{p}^{1}\mathfrak{l}$ den Endpunkt L_{j}^{1} der Beschleunigung LL_{j}^{1} des mit dem Punkt L koinzidierenden Punktes des Systems S_{1}. Nehmen wir an, es sei dieser Endpunkt L_{j}^{1} ermittelt, und zeichnen den Schnittpunkt J der zur Geraden g Parallelen $L_{j}^{1}J$ mit der zu ihr Senkrechten $L_{j}J$, dann ist in geometrischer Summe

$$LL_{j} = LL_{j}^{1} + L_{j}^{1}J + JL_{j}.$$

Demzufolge ist nach dem Coriolischen Satz die Strecke $L_{j}^{1}J$ in Größe und Richtung gleich der Beschleunigung, mit der sich der Punkt L auf der zur Geraden g Parallelen bewegt, also mit der das System S_{2} sich in dem System S_{1} verschiebt, und ferner ist die Strecke JL_{j} in Größe und Richtung gleich der Zusatzbeschleunigung. Da diese gleich ist dem doppelten Produkt aus der Drehgeschwindigkeit des Systems S_{1} um den Pol $\mathfrak{P}_{1}$ und der lotrechten Geschwindigkeit $LL_{\mathfrak{v}}^{21}$, die der Punkt L in Bezug auf dieses System besitzt, so ist

$$JL_{j} = 2\,\frac{LL_{\mathfrak{v}}^{1}}{L\mathfrak{P}_{1}}\,LL_{\mathfrak{v}}^{21} = 2\,\frac{L\mathfrak{L}_{\mathfrak{v}}}{LF}\,LL_{\mathfrak{v}}^{21}.$$

Ziehen wir hiernach durch $\mathfrak{L}_{\mathfrak{v}}$ zu $FL_{\mathfrak{v}}^{21}$ die Parallele $\mathfrak{L}_{\mathfrak{v}}Z$ bis an $LL_{\mathfrak{v}}^{21}$; dann ist die Zusatzbeschleunigung

$$JL_{j} = 2 \cdot LZ,$$

und ihre Richtung ist, dem Drehungssinn des Systems S_{1} gemäß, gleich der Richtung der lotrechten Geschwindigkeit $LL_{\mathfrak{v}}^{21}$.

Hiernach ergibt sich die Konstruktion der Beschleunigung LL_{j}^{1}, indem wir die zur Geraden g senkrechte Strecke $L_{j}J$ entgegengesetzt gleich $2 \cdot LZ$ machen und durch den Punkt J zur Geraden g die Parallele JL_{j}^{1} ziehen, welche die auf FL

Senkrechte $L_p^1 l$ in dem Punkt L_j^1 trifft. Durch die gegebene Beschleunigung FF_j des Punktes F und die konstruierte Beschleunigung LL_j^1 des mit L koinzidierenden Punktes des Systems S_1 ist dann der Beschleunigungszustand dieses Systems bestimmt.

In analoger Weise ergibt sich auch der Beschleunigungszustand des Systems S_2, indem wir die Beschleunigung FF_j^2 des mit dem Punkt F koinzidierenden Punktes des Systems S_2 konstruieren. Wenn aber die Konstruktion jener Beschleunigung LL_j^1 ausgeführt ist, dann erhalten wir die Beschleunigung FF_j^2 durch eine einfache konstruktive Ergänzung. Bei der Bestimmung des Punktes F_j^2 ist die entsprechende Zusatzbeschleunigung entgegengesetzt gleich der Zusatzbeschleunigung $2 \cdot LZ$, weil die Geschwindigkeit des Punktes F in Bezug auf das System S_2 entgegengesetzt gleich ist der Geschwindigkeit des Punktes L in Bezug auf das System S_1, und weil beide Systeme gleiche und gleichsinnige Drehgeschwindigkeiten besitzen. Ferner ist die Beschleunigung des Punktes F in Bezug auf das System S_2 entgegengesetzt gleich der Beschleunigung des Punktes L in Bezug auf das System S_1.

Machen wir nun $F_j I \# JL_j$ und $IF_j^2 \# L_j^1 J$, dann ergibt sich die Beschleunigung FF_j^2 für F als Punkt des Systems S_2, dessen Beschleunigungszustand demnach durch die beiden Beschleunigungen FF_j^2, LL_j bestimmt ist.

Die Krümmungsmittelpunkte Φ, Λ, Λ^1 der Bahnkurven φ, λ, λ^1 der Punkte F, L und des mit L koinzidierenden Punktes des Systems S_1 sind vermittels der entsprechenden lotrechten Geschwindigkeiten $FF_\mathfrak{v}$, $LL_\mathfrak{v}$, $LL_\mathfrak{v}^1$ und der entsprechenden Normalbeschleunigungen FF_n, LL_n, LL_n^1 in bekannter Weise konstruiert.

V. Konstruktionen der Beschleunigungen eines dreifach geführten ebenen Systems.

1. Konstruktionen der Beschleunigungen eines ebenen Systems, das mit drei führenden ebenen Systemen drehpaarig verbunden ist.

Die Bewegung dieser vier ebenen Systeme wird dadurch verwirklicht, daß in Fig. 5 das Glied ABC, welches das geführte System S vertritt, mit den drei Gliedern AF, BL, CO, welche die drei führenden ebenen Systeme S_1, S_2, S_3 vertreten, in den Punkten A, B, C durch je eine Drehpaarung verbunden ist. und daß für die Punkte F, L, O beziehlich die lotrechten Geschwindigkeiten $FF_\mathfrak{v}$, $LL_\mathfrak{v}$, $OO_\mathfrak{v}$ sowie die Beschleunigungen FF_j, LL_j, OO_j gegeben sind. Denn dadurch werden je drei unendlich nahe Lagen der vier zwangläufig bewegten Systeme während zweier Zeitelemente bestimmt.

Es soll nun die klassische Aufgabe gelöst werden, den Beschleunigungszustand des Systems S konstruktiv zu bestimmen, und damit ergeben sich auch die Beschleunigungszustände der drei führenden Systeme S_1, S_2, S_3. Diese Aufgabe enthält viele spezielle Fälle, von denen manche in der Praxis bei zusammengesetzten Mechanismen vorkommen.

Zuerst ist der Pol $\mathfrak{P}$ des Systems S in Bezug auf das ruhende System, und ferner sind die lotrechten Geschwindigkeiten $AA_\mathfrak{v}$, $BB_\mathfrak{v}$, $CC_\mathfrak{v}$ der Punkte A, B, C zu konstruieren; damit sind dann, wenn auch nur eine dieser lotrechten Geschwindigkeiten ermittelt ist, die Geschwindigkeitszustände der vier Systeme S, S_1, S_2, S_3 bekannt.

Die durch die Punkte $F_\mathfrak{v}$, $L_\mathfrak{v}$, $O_\mathfrak{v}$ gehenden, beziehlich zu AF, BL, CO parallelen Geraden $b'c'$, $a'c'$, $a'b'$ bilden ein Dreieck $a'b'c'$, das zu dem durch Verlängerung der Geraden AF, BL, CO gebildeten Dreieck abc homothetisch ähnlich ist. Demnach treffen sich die drei Geraden aa', bb', cc' in dem Ähnlichkeitspunkt, dem Pol $\mathfrak{P}$ des Systems S[1]). Die lotrechten Geschwindigkeiten $AA_\mathfrak{v}$, $BB_\mathfrak{v}$, $CC_\mathfrak{v}$ ergeben sich dann durch

[1]) Kinematik, S. 590, Fig. 614.

die Schnittpunkte $A_{\mathfrak{v}}$, $B_{\mathfrak{v}}$, $C_{\mathfrak{v}}$, in denen die Geraden $A\mathfrak{P}$, $B\mathfrak{P}$, $C\mathfrak{P}$ beziehlich die Geraden $b'c'$, $a'c'$, $a'b'$ treffen; und das strichzweipunktierte Dreieck $A_{\mathfrak{v}}B_{\mathfrak{v}}C_{\mathfrak{v}}$ ist dem Dreieck ABC homothetisch ähnlich und der Pol $\mathfrak{P}$ ist der zugehörige Ähnlichkeitspunkt.

Die zu $F_{\mathfrak{v}}F$, $L_{\mathfrak{v}}L$, $O_{\mathfrak{v}}O$ Parallelen $A_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}_{\mathfrak{v}}$, $B_{\mathfrak{v}}\mathfrak{B}_{\mathfrak{v}}$, $C_{\mathfrak{v}}\mathfrak{C}_{\mathfrak{v}}$ bestimmen auf den Geraden AF, BL, CO die Strecken $A\mathfrak{A}_{\mathfrak{v}}$, $B\mathfrak{B}_{\mathfrak{v}}$, $C\mathfrak{C}_{\mathfrak{v}}$, durch die sich in bekannter Weise auf diesen Geraden die zu den Punkten A, B, C gehörenden Hilfsstrecken $A\mathfrak{A}_n$, $B\mathfrak{B}_n$, $C\mathfrak{C}_n$ ergeben. Indem wir an diese Hilfsstrecken die entsprechenden Projektionen FF_p, LL_p, OO_p der Beschleunigungen FF_j, LL_j, OO_j antragen, also $\mathfrak{A}_nA_p = FF_p$, $\mathfrak{B}_nB_p = LL_p$, $\mathfrak{C}_nC_p = OO_p$ machen, erhalten wir die beziehlich auf AF, BL, CO Senkrechten $A_p\mathfrak{a}$, $B_p\mathfrak{b}$, $C_p\mathfrak{c}$, auf denen die Endpunkte A_j, B_j, C_j der Beschleunigungen der Punkte A, B, C liegen; und diese Endpunkte bilden ein dem Dreieck ABC ähnliches, durch Punktierung ausgezeichnetes Dreieck $A_jB_jC_j$.

Unter den unendlich vielen solcher ähnlicher Dreiecke, deren homologen Eckpunkte in den Geraden $A_p\mathfrak{a}$, $B_p\mathfrak{b}$, $C_p\mathfrak{c}$ liegen und als Phasen eines ähnlich-veränderlichen Dreiecks auf diesen Geraden ähnliche Punktreihen bilden[1]), ist nun dasjenige Dreieck $A_jB_jC_j$ zu bestimmen, welches die folgende Bedingung erfüllt. Ist zu $B_{\mathfrak{v}}B$ die Parallele $A_{\mathfrak{v}}\mathfrak{A}'_{\mathfrak{v}}$ bis an AB gezogen, ist ferner vermittels der Strecke $A\mathfrak{A}'_{\mathfrak{v}}$ die zu dem Punkt A gehörende Hilfsstrecke $A\mathfrak{A}'_n$ auf AB bestimmt und sind A'_p, B'_p die Projektionen von den Punkten A_j, B_j auf die Gerade AB, dann muß die Strecke $\mathfrak{A}'_nA'_p = BB'_p$ sein.

Um unter dieser Bedingung das Dreieck $A_jB_jC_j$ zu konstruieren, können wir auf zweierlei Weise verfahren. Erstens indem wir den selbstentsprechenden Punkt zweier in einer Geraden liegenden ähnlichen Punktreihen bestimmen, und

[1]) Siehe Burmester, Kinematisch-geometrische Untersuchung der Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1874, Bd. XIX, S. 154, und Kinematik, S. 875.

zweitens indem wir einen geradlinigen geometrischen Ort für einen der Eckpunkte des Dreiecks $A_j B_j C_j$ konstruieren.

Erste Konstruktion des Dreiecks $A_j B_j C_j$. Wir zeichnen zu dem Dreieck ABC zwei ähnliche Dreiecke $A^x B^x C^x$, $A^y B^y C^y$, deren homologe Eckpunkte respektive auf den Geraden $A_p \mathfrak{a}$, $B_p \mathfrak{b}$, $C_p \mathfrak{c}$ liegen. Die Konstruktion dieser ähnlichen Dreiecke wollen wir zur besseren Übersicht getrennt von Fig. 5 in der Fig. 5a ausführen, wo ein zu jenem Dreieck ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ gezeichnet ist. Der Einfachheit wegen legen wir z. B. den Eckpunkt A^x in den Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, machen dann den Winkel $\mathfrak{b}\widehat{A^x}C^x = B'\widehat{A'}C'$, wodurch der Eckpunkt C^x in der Geraden $\mathfrak{c}$ bestimmt wird, und zeichnen das zu $A'B'C'$ ähnliche Dreieck $A^x B^x C^x$, dessen Eckpunkt B^x sich dann in der Geraden $\mathfrak{b}$ befindet. Ferner legen wir den Eckpunkt A^y in den Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, machen den Winkel $\mathfrak{c}\widehat{A^y}B^y = C'\widehat{A'}B'$, wodurch der Eckpunkt B^y in der Geraden $\mathfrak{b}$ bestimmt wird, und zeichnen das zu $A'B'C'$ ähnliche Dreieck $A^y B^y C^y$, dessen Eckpunkt C^y dann in der Geraden $\mathfrak{c}$ liegt. Da aber der Eckpunkt C^y dieses Dreiecks nicht verwendet wird, so genügt die Bestimmung des Punktes B^y. Es gibt sechs solche ähnliche Dreiecke, die mit je einem Eckpunkt in einem Schnittpunkt von je zweien der drei Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ liegen.

Um ein beliebiges zu $A'B'C'$ ähnliches Dreieck $A^z B^z C^z$ zu zeichnen, dessen Eckpunkte beziehlich auf den Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ liegen, legen wir das Dreieck $A'B'C'$ mit den Eckpunkten A', C' beliebig auf die Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$. Wir betrachten dann den auch mit A^z bezeichneten Punkt A' als fest und das Dreieck $A^z B'C'$ als ähnlich-veränderlich[1]). Wird nun der Eckpunkt C' auf der Geraden $\mathfrak{c}$ bewegt, dann bewegt sich der Punkt B' auf einer Geraden $B'\beta'$, die mit der Geraden $\mathfrak{c}$ den Winkel $\mathfrak{w} = C'\widehat{A^z}B'$ bildet und die Gerade $\mathfrak{b}$ in dem Punkt B^z

[1]) Kinematik, S. 875.

trifft. somit erhalten wir das gezeichnete ähnliche Dreieck $A^z B^z C^z$, dessen drei Eckpunkte auf den drei Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ liegen.

In Fig. 5 sind nun die beiden zu dem Dreieck ABC ähnlichen Dreiecke $A^x B^x C^x$, $A^y B^y C^y$ gezeichnet, deren homologe Eckpunkte beziehlich auf den Geraden $A_p \mathfrak{a}$, $B_p \mathfrak{b}$, $C_p \mathfrak{c}$ liegen. Da die Punktreihen A^x, A^y, .. und B^x, B^y, .. ähnlich sind, so sind auch ihre Projektionen A^x_p, A^y_p, .. und B^x_p, B^y_p, .. auf die Gerade AB ähnliche Punktreihen. Wird auf AB die Strecke $\mathfrak{A}'_n A^x_\pi = BB^x_p$ und $\mathfrak{A}'_n A^y_\pi = BB^y_p$ gemacht, dann sind auch die Punktreihen A^x_p, A^y_p, .. und A^x_π, A^y_π, .. ähnlich und durch die entsprechenden Punktpaare $A^x_p A^y_p$, $A^x_\pi A^y_\pi$ bestimmt. Demnach ist der selbstentsprechende Punkt A'_p dieser beiden auf der Geraden AB liegenden Punktreihen die Projektion des auf der Geraden $A_p \mathfrak{a}$ befindlichen Endpunktes A_j der Beschleunigung AA_j des Punktes A.

Um diesen selbstentsprechenden Punkt A'_p zu konstruieren, projizieren wir auf eine beliebige zu AB Parallele $\mathfrak{p}$ die Punkte A^x, A^y nach $A^{\mathfrak{x}}$, $A^{\mathfrak{y}}$, ziehen die Geraden $A^{\mathfrak{x}} A^x_\pi$, $A^{\mathfrak{y}} A^y_\pi$ und fällen von ihrem Schnittpunkt M auf AB die Senkrechte, die dann AB in dem selbstentsprechenden Punkt A'_p trifft und auf der Geraden $A_p \mathfrak{a}$ den Punkt A_j bestimmt. Ferner machen wir auf AB die Strecke $BB'_p = \mathfrak{A}'_n A'_p$, und demnach ist der Punkt B'_p die Projektion von dem auf der Geraden $B_p \mathfrak{b}$ liegenden Punkt B_j. Indem wir nun zu dem Dreieck ABC das ähnliche Dreieck $A_j B_j C_j$ konstruieren, das durch Punktierung ausgezeichnet ist, erhalten wir den Eckpunkt C_j, der in der Geraden $C_p \mathfrak{c}$ liegen muß, und dadurch ist eine Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnung gegeben. Somit ergeben sich die Beschleunigungen AA_j, BB_j, CC_j der Punkte A, B, C des Systems S, dessen Beschleunigungszustand durch je zwei dieser Beschleunigungen bestimmt ist.

Zweite Konstruktion des Dreiecks $A_j B_j C_j$. Wir betrachten die Punkte B^x, B^y als zwei auf der Geraden $B_p \mathfrak{b}$

beliebig angenommene Endpunkte zweier dem Punkte B zugewiesenen Beschleunigungen, dann sind die Punkte A_π^x, A_π^y, die sich vorher durch die Projektionen B_p^x, B_p^y ergeben haben, die Projektionen von den auf $A_p\mathfrak{a}$ liegenden Endpunkten $A^{(x)}$, $A^{(y)}$ der entsprechenden Beschleunigungen des Punktes A. Infolge der ähnlichen Punktreihen A_π^x, A_π^y, .. und B_p^x, B_p^y, .. sind auch die Punktreihen $A^{(x)}$, $A^{(y)}$.. und B^x, B^y,.. ähnlich. Wenn wir nun die zu dem Dreieck ABC ähnlichen Dreiecke $A^{(x)}B^xC^{(x)}$, $A^{(y)}B^yC^{(y)}$ zeichnen und als Phasen eines ähnlich-veränderlichen Dreiecks betrachten, so folgt, weil die Eckpunkte $A^{(x)}$, $A^{(y)}$,.. und die Eckpunkte B^x, B^y,.. auf den Geraden $A_p\mathfrak{a}$, $B_p\mathfrak{b}$ ähnliche Punktreihen bilden, daß auch die Eckpunkte $C^{(x)}$, $C^{(y)}$,.. eine ähnliche Punktreihe auf einer Geraden $\mathfrak{i}_c$ erzeugen, die durch die Punkte $C^{(x)}$, $C^{(y)}$ bestimmt wird und ein geometrischer Ort für den Punkt C_j ist. Demnach ergibt sich dieser Punkt C_j als Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{i}_c$ und $C_p\mathfrak{c}$. Dann ist das zu ABC ähnliche Dreieck $A_jB_jC_j$, dessen beiden andere Eckpunkte A_j, B_j beziehlich auf den Geraden $A_p\mathfrak{a}$, $B_p\mathfrak{b}$ liegen, zu konstruieren. Dies kann, wie in Fig. 5a, vermittels eines ähnlichen Dreiecks ausgeführt werden, von dem C_j der eine Eckpunkt ist und ein anderer Eckpnnkt auf einer der Geraden $A_p\mathfrak{a}$ oder $B_p\mathfrak{b}$, die ihm entspricht, beliebig angenommen wird. Als Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnung ist zu beachten, daß $C^{(x)}C_jC^{(y)} \backsim A^{(x)}A_jA^{(y)}$ oder $B^xB_jB^y$ ist.

Zur Bestimmtheit der konstruierten Beschleunigungen AA_j, BB_j, CC_j der Punkte A, B, C des Systems S sind also außer den lotrechten Geschwindigkeiten $FF_\mathfrak{v}$, $LL_\mathfrak{v}$, $OO_\mathfrak{v}$ nur die Projektionen FF_p, LL_p, OO_p der Beschleunigungen FF_j, LL_j, OO_j erforderlich. Wird jede dieser Beschleunigungen in zwei senkrechte Komponenten zerlegt, so daß diese Projektionen die beziehlich in den Geraden AF, BL, CO liegenden Komponenten sind, dann ergibt sich, daß der Beschleunigungszustand des Systems S von den auf diesen Geraden

senkrechten Komponenten unabhängig ist. Ferner werden die Beschleunigungszustände der Systeme S_1, S_2, S_3 beziehlich durch die Beschleunigungen AA_j, FF_j; BB_j, LL_j; CC_j, OO_j bestimmt. Hiernach ist schließlich dieses klassische kinematische Problem erstens vermittels der Bestimmung des selbstentsprechenden Punktes zweier auf einer Geraden liegenden ähnlichen Punktreihen und zweitens vermittels der Konstruktion eines geradlinigen geometrischen Ortes gelöst.

Die konstruierten Krümmungsmittelpunkte Φ, Λ, Ω der Bahnkurven φ, λ, ω der Punkte F, L, O sind durch ihre entsprechenden lotrechten Geschwindigkeiten $FF_\mathfrak{v}$, $LL_\mathfrak{v}$, $OO_\mathfrak{v}$ und Normalbeschleunigungen FF_n, LL_n, OO_n bestimmt; ebenso auch die konstruierten Krümmungsmittelpunkte A, B, Γ durch ihre entsprechenden lotrechten Geschwindigkeiten $AA_\mathfrak{v}$, $BB_\mathfrak{v}$, $CC_\mathfrak{v}$ und Normalbeschleunigungen AA_n, BB_n, CC_n.

Der allgemeinste Fall eines dreifach geführten ebenen Systems S ist dadurch gegeben, daß sich in jedem der drei führenden Systeme S_1, S_2, S_3 eine Kurve befindet und auf jeder dieser drei Kurven ein Punkt des geführten Systems S bewegt wird. Wenn dann für die jeweiligen Krümmungsmittelpunkte dieser drei Kurven die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bekannt sind, so kann die Konstruktion der Beschleunigungen der drei Punkte des Systems S ebenso wie vorher ausgeführt werden. Um diese Bewegung zu verwirklichen, muß jedes der drei führenden Glieder eine Nut besitzen, deren Mittellinie die betreffende Kurve ist, und das geführte Glied muß mit drei zylindrischen Zapfen versehen sein, die in diesen Nuten gleiten.

Spezielle Fälle. Bei dem in Fig. 6 gezeichneten Dreispannmechanismus[1]) ist das Glied ABC durch die Glieder AF, BL, CO vermittels Drehpaarungen mit den drei bewegten Gliedern $\Phi'F'$, $F'L'$, $A'L'$ eines Kurbelgetriebes verbunden, dessen Glied $\Phi'A'$ fest ist. Wenn nun z. B. die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes F' bekannt sind, dann sind

[1]) Kinematik, S. 422.

die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte F, L, O und der Punkte A, B, C bestimmt.

Es erfolgen mannigfaltige Bewegungen des Gliedes ABC, wenn z. B. die Punkte F, L, O sich auf Kreisen φ, λ, ω gleichförmig in gegebenen Verhältnissen ihrer Geschwindigkeiten und in verschiedenen Phasen bewegen. Dies kann dadurch bewirkt werden, daß die Glieder AF, BL, CO in den Punkten F, L, O mit je einem Rade eines dreiräderigen Vorgelege drehpaarig verbunden sind.

In dem speziellen Fall, wenn von den Dreipunkten F, L, O z. B. der Punkt F fest ist, also keine Geschwindigkeit und keine Beschleunigung besitzt, ergibt sich der Pol $\mathfrak{P}$ des Systems S als Schnittpunkt der Geraden AF, cc', und die lotrechte Geschwindigkeit des Punktes A befindet sich auf der Geraden AF. Dadurch wird auf AF die Normalbeschleunigung des Punktes A bestimmt, und die in deren Endpunkt auf AF errichtete Senkrechte enthält dann den Endpunkt der Beschleunigung des Punktes A_j. Demnach ist in bekannter Weise das zu ABC ähnliche Dreieck $A_j B_j C_j$ zu konstruieren, dessen Eckpunkt A_j in dieser Senkrechten und dessen Eckpunkte B_j, C_j sich in jenen Geraden $B_p \mathfrak{b}$, $C_p \mathfrak{c}$ befinden. Für diesen speziellen Fall hat mein Kollege Herr Professor W. Lynen die Konstruktion dieser Beschleunigungen vermittels des geradlinigen geometrischen Ortes zuerst angegeben.

Dieser spezielle Fall kommt bei den in Fig. 7 schematisch gezeichneten Mechanismus vor, der den Hauptbestandteil der bei den Lokomotiven angewendeten Kulissensteuerungen von Stephenson und Allan bildet. Das als fest betrachtete Glied OP vertritt die Lokomotive, und der Drehpunkt P die Triebwelle mit den auf ihr festgekeilten beiden Exzentern, deren Mittelpunkte F, L sind. Das Glied ABC oder System S vertritt die Kulisse, die durch die Exzenterstangen AF, BL mit den Exzentern drehpaarig verbunden ist; und durch das Glied CO ist die Kulisse in dem festgestellten Punkt O drehbar aufgehängt. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte F, L sind durch die Drehung der Treibwelle bestimmt.

In Fig. 8 ist der Punkt F fest und der Mittelpunkt des Kreises α, auf dem sich der Punkt A bewegt. Für die Punkte L, O sind beziehlich die lotrechten Geschwindigkeiten $LL_{\mathfrak{v}}$, $OO_{\mathfrak{v}}$ und Beschleunigungen LL_j, OO_j gegeben; oder sie sind auch bestimmt, wenn die Glieder BL, CO in den Punkten L, O drehpaarig mit je einem bewegten Gliede eines Getriebes verbunden werden.

Bei der Heusinger- (Walschaert-) Kulissensteuerung kommt der in Fig. 9 schematisch gezeichnete Bestandteil vor. Der Punkt A wird vermittels einer in ihm drehpaarig mit dem geradlinigen Glied ABC verbundenen Stange g, die in einer festen Hülse h gleitet, auf einer Geraden α geführt; demnach ist das zugehörige unendlich lange Glied AF_{∞} durch die Stange g ersetzt, und der Endpunkt der Beschleunigung des Punktes A liegt in der mit der Stangenachse identischen Geraden α. Für die Punkte L, O der Glieder BL, CO werden die lotrechten Geschwindigkeiten $LL_{\mathfrak{v}}$, $OO_{\mathfrak{v}}$ und die Beschleunigungen LL_j. OO_j durch den Mechanismus der Kulissensteuerung bestimmt, Derselbe Bestandteil befindet sich auch in dem Interferenzmechanismus[1]), bei dem die Glieder BL, CO in den Punkten L, O mit je einem von zwei ineinandergreifenden Zahnrädern verbunden sind.

Wird der Punkt A des Gliedes ABC anstatt wie in Fig. 8 auf einen Kreis allgemeiner auf einer gegebenen Bahnkurve α geführt, für die der jeweilige Krümmungsmittelpunkt A bekannt ist, dann kann der Krümmungsradius $\mathsf{A}A$ als ein sich um A in je drei unendlich nahen Lagen drehendes Glied betrachtet werden. Die Konstruktion der Beschleunigungen des Gliedes ABC kann dann, wie vorhin angegeben ist, ausgeführt werden. Die Führung des Punktes A auf einer Bahnkurve α wird dadurch bewirkt, daß ein zylindrischer Zapfen A des Gliedes ABC in einer festen Nut gleitet, deren Mittellinie die Bahnkurve α ist.

[1]) Kinematik, S. 544.

2. Konstruktionen der Beschleunigungen eines ebenen Systems, das mit zwei führenden ebenen Systemen drehpaarig und mit einem richtpaarig verbunden ist.

Die in Fig. 10 gezeichnete Anordnung unterscheidet sich von der in Fig. 5 behandelten allgemeineren dadurch, daß das ebene System S mit dem ebenen System S_3 nicht drehpaarig, sondern vermittels einer Stange g und einer auf ihr gleitenden Hülse h richtpaarig, mit den beiden anderen ebenen Systemen S_1, S_2 wie dort in den Punkten A, B drehpaarig verbunden ist. Demnach besteht das Glied, welches das System S vertritt, aus den Stangen g und AB, und ferner besteht das Glied, welches das System S_3 vertritt, aus der Hülse h mit dem angefügten Arm NO. Der unendlich ferne Punkt C_∞ der auf g senkrechten Geraden NO ist der Anschlußpunkt des Systems S an das System S_3. Für die drei Punkte F, L, O sind die lotrechten Geschwindigkeiten $FF_\mathfrak{v}$, $LL_\mathfrak{v}$, $OO_\mathfrak{v}$ sowie die Beschleunigungen FF_j, LL_j, OO_j gegeben. Der Pol $\mathfrak{P}$ des Systems S, die lotrechten Geschwindigkeiten $AA_\mathfrak{v}$, $BB_\mathfrak{v}$ der Punkte A, B und die auf AF, BL Senkrechten $A_p\mathfrak{a}$, $B_p\mathfrak{b}$, in denen beziehlich die Endpunkte A_j, B_j der Beschleunigungen AA_j, BB_j der Punkte A, B liegen, sind ebenso wie in Fig. 5 konstruiert, wie es auch aus der gleichen Bezeichnungsweise ersichtlich ist.

In diesem Fall kommt nun die Beschleunigung des mit dem Punkt O momentan koinzidierenden Punktes des Systems S mit in Betracht. Die lotrechte Geschwindigkeit $OO_\mathfrak{v}^s$ dieses Punktes in Bezug auf das ruhende System ergibt sich durch den Schnittpunkt $O_\mathfrak{v}^s$ der Geraden $O\mathfrak{P}$ mit der durch $O_\mathfrak{v}$ gehenden zu ab Parallelen $a'b'$ und die Strecke $O_\mathfrak{v}^s O_\mathfrak{v}$ ist nach Größe und Richtung gleich der lotrechten Geschwindigkeit $OO_\mathfrak{v}^3$, mit der sich der Punkt O des Systems S_3 in dem System S parallel zu der Geraden g bewegt.

Um nun den auf OC senkrechten geometrischen Ort $O_p^s\mathfrak{o}$ des Endpunktes O_j^s der Beschleunigung OO_j^s des mit O koinzidieren-

den Punktes des Systems S zu bestimmen, nehmen wir an, daß dieser Endpunkt O_j^s bekannt sei, ziehen durch O_j^s zur Geraden g die Parallele $O_j^s J$ und durch O_j die zur Geraden g Senkrechte $O_j J$, dann ist in geometrischer Summe

$$OO_j = OO_j^s + O_j^s J + JO_j.$$

Demzufolge ist nach dem Coriolischen Satz die Strecke $O_j^s J$ nach Größe und Richtung die Beschleunigung des Punktes O in Bezug auf das System S und die Strecke JO_j nach Größe und Richtung die Zusatzbeschleunigung

$$z = 2\frac{OO_{\mathfrak{v}}^s,\ OO_{\mathfrak{v}}^3}{O\mathfrak{P}}.$$

Indem wir zu $\mathfrak{P}\ddot{O}_{\mathfrak{v}}$ die Parallele $O_{\mathfrak{v}}^s Z$ bis an die Gerade NO ziehen, ergibt sich $z = 2 \cdot OZ$. Wenn wir die Strecke $O_j J$ entgegengesetzt gleich der Zusatzbeschleunigung $2 \cdot OZ$ machen und von dem Punkt J auf NO die Senkrechte $J\mathfrak{o}$ fällen, deren Fußpunkt O_p^s ist, dann enthält diese Senkrechte $O_p^s\mathfrak{o}$ den Endpunkt O_j^s der Beschleunigung OO_j^s.

Hiernach ist ebenso wie in Fig. 5, und wie es auch aus der analogen Bezeichnungsweise erkenntlich ist, das zu dem Dreieck ABO ähnliche Dreieck $A_j B_j O_j^s$ in zweierlei Weise konstruiert, dessen Eckpunkte A_j, B_j, O_j^s beziehlich auf den Geraden $A_p\mathfrak{a}$, $B_p\mathfrak{b}$, $O_p^s\mathfrak{o}$ liegen. Durch zwei von den drei Beschleunigungen AA_j, BB_j, OO_j^s der Punkte A, B und des mit O koinzidierenden Punktes des Systems S ist sein Beschleunigungszustand bestimmt; und ferner sind durch die Beschleunigungen AA_j, FF_j und BB_j, LL_j beziehlich die Beschleunigungszustände der Systeme S_1, S_2 bestimmt. Da von dem System S_3 nur die Beschleunigung OO_j des Punktes O bekannt, erfordert die Bestimmung des Beschleunigungszustandes dieses Systems noch die besondere Konstruktion der Beschleunigung eines zum System S_3 gehörenden Punktes, der mit einem Punkt

des Systems S, z. B. mit dem Punkt B, momentan koinzidiert. Diese Konstruktion wird, wie es S. 473 und in Fig. 4 angegeben ist, ausgeführt, indem wir die Strecke $B_j I \# J O_j$ und die Strecke $I B_j^3 \# O_j^s J$ machen, dann ist $B B_j^3$ die Beschleunigung des mit B koinzidierenden Punktes des Systems S_3.

Die in Fig. 11 gezeichnete spezielle Anordnung kommt in der Heusinger von Waldeggschen Kulissensteuerung als Bestandteil vor. Der Punkt A wird wie in Fig. 9 vermittels einer in ihm drehpaarig mit dem Gliede AB verbundenen Stange g, die in einer festen Hülse h gleitet, auf einer Geraden α geführt. Das Glied AB gleitet als Stange in einer Hülse h', auf deren Mitte der Punkt O liegt; demnach wird das zugehörige unendlich lange Glied AF_∞ durch die Stange g und das unendlich lange Glied OC_∞ durch die Hülse h' ersetzt. Der Endpunkt der Beschleunigung des Punktes A liegt in der Geraden α. Für die Punkte L, O werden die lotrechten Geschwindigkeiten $LL_\mathfrak{v}$, $OO_\mathfrak{v}$ und die Beschleunigungen LL_j, OO_j durch den Mechanismus bestimmt.

Wenn das dreifach geführte ebene System S nicht nur mit einem, sondern mit zweien oder dreien führenden ebenen Sysemen richtpaarig verbunden ist, so muß in der angebenen Weise je eine entsprechende Gerade konstruiert werden, in welcher der Endpunkt der Beschleunigung des betreffenden koinzidierenden Punktes liegt.

In Fig. 12 ist das System S mit jedem der drei führenden Systeme S_1, S_2, S_3 richtpaarig verbunden. Das aus drei Stangen bestehende Glied vertritt das System S, und die drei auf diesen Stangen gleitenden Hülsen vertreten die führenden Systeme S_1, S_2, S_3. Diese Hülsen sind vermittels Drehpaarungen in den Punkten F, L, O mit je einem beweglichen Gliede eines Kurbelgetriebes $\Phi' F' L' A'$, dessen Glied $\Phi' A'$, fest verbunden. Dieser Mechanismus, bei dem die Anschlußpunkte A_∞, B_∞, C_∞ des Systems S an die Systeme S_1, S_2, S_3 im Unendlichen liegen, ist ein spezieller Fall des in Fig. 6 gezeichneten Dreispannmechanismus.

3. Konstruktionen der Beschleunigungen eines ebenen Systems, das mit zwei führenden ebenen Systemen drehpaarig verbunden ist und von dem ein Punkt auf einer Geraden eines führenden Systems bewegt wird.

In Fig. 13 ist das Glied ABC in den Punkten B, C mit den Gliedern BL, CO drehpaarig verbunden und diese Glieder vertreten die ebenen Systeme S, S_2, S_3. Ferner wird der Punkt A des ebenen Systems S auf einer Geraden g' eines ebenen Systems S' bewegt, was dadurch bewirkt wird, daß dieses System durch eine zu der Geraden g' parallelen Stange g vertreten ist, die in einer Hülse h des Gliedes AF_∞ gleitet, welches das in dem Punkt A mit dem Gliede ABC drehpaarig verbundene ebene System S_1 vertritt. In diesem System befindet sich der Punkt F_∞ auf der durch A gehenden zu g senkrechten Geraden im Unendlichen. Das System S' kann anstatt durch die Stange g auch durch ein Glied mit einer geradlinigen Nut, deren Mittellinie die Gerade g' ist, vertreten werden, und in dieser Nut muß ein bei A angebrachter zylindrischer Zapfen gleiten, dann ist das Glied AF_∞ nicht vorhanden und die beiden Systeme S, S' sind vermittels einer höheren kinematischen Elementenpaarung verbunden.

Für die Punkte L, O der führenden Systeme S_2, S_3 sind beziehlich die lotrechten Geschwindigkeiten $LL_\mathfrak{v}$, $OO_\mathfrak{v}$ und die Beschleunigungen LL_j, OO_j gegeben. Von dem führenden System S' nehmen wir an, daß sein Pol $\mathfrak{P}'$ sowie die lotrechte Geschwindigkeit $AA'_\mathfrak{v}$ und die Beschleunigung AA'_j seines momentan mit dem Punkt A des Systems koinzidierenden Punktes bekannt sind.

Die durch den Punkt $A'_\mathfrak{v}$ gehende zu g' senkrechte und zu AF_∞ parallele Gerade $A'_\mathfrak{v}c'$ trifft die von dem Punkt A nach dem noch unbekannten Pol $\mathfrak{P}$ des Systems S gehende Gerade in dem Endpunkt $A_\mathfrak{v}$ der lotrechten Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ des Punktes A in Bezug auf das ruhende System, und die Strecke $A'_\mathfrak{v}A_\mathfrak{v}$ ist nach Größe und Richtung gleich der lotrechten Geschwindigkeit $AA^s_\mathfrak{v}$, mit der sich der Punkt A auf der Geraden g' in Bezug auf das System S' bewegt. Hier-

nach ergibt sich der Pol $\mathfrak{P}$ als Ähnlichkeitspunkt der homothetischen ähnlichen Dreiecke abc und $a'b'c'$, die von den verlängerten Geraden AF_∞, BL, CO und von den durch die Punkte $A_\mathfrak{v}$, $L_\mathfrak{v}$, $O_\mathfrak{v}$ gehenden beziehlich zu diesen Geraden parallelen Geraden gebildet werden. Dadurch ergeben sich dann die lotrechten Geschwindigkeiten $AA_\mathfrak{v}$, $BB_\mathfrak{v}$, $CC_\mathfrak{v}$ der Punkte A, B, C.

Um nun die Beschleunigungen AA_j, BB_j, CC_j dieser Punkte zu konstruieren, nehmen wir an, daß der Punkt A_j bekannt sei, ziehen von ihm die zur Geraden g' Parallele A_jJ oder zur Geraden AF_∞ Senkrechte, ferner durch den Punkt A_j' die zur Geraden g' Senkrechte A_jJ, dann ist in geometrischer Summe

$$AA_j = AA_j' + A_j'J + JA_j.$$

Demzufolge ist nach dem Coriolischen Satz die Strecke JA_j nach Größe und Richtung gleich der Beschleunigung des Punktes A in Bezug auf das System S' und die Strecke $A_j'J$ nach Größe und Richtung gleich der Zusatzbeschleunigung

$$z = 2\frac{AA_\mathfrak{v}' \cdot A_\mathfrak{v} A_\mathfrak{v}^s}{A\mathfrak{P}'}.$$

Indem wir zu $\mathfrak{P}'A_\mathfrak{v}^s$ die Parallele $A_\mathfrak{v}'Z$ bis an die Gerade AF_∞ ziehen, ergibt sich $z = 2 \cdot AZ$. Wenn wir ferner die Strecke $A_j'J \# 2 \cdot AZ$ machen und von dem Punkt J auf die Gerade AF_∞ die Senkrechte $J\mathfrak{a}$ ziehen, deren Fußpunkt A_p ist, dann enthält diese Senkrechte $A_p\mathfrak{a}$ den Endpunkt A_j der Beschleunigung AA_j des Punktes A[1]).

Die auf BL Senkrechte $B_p\mathfrak{b}$ und die auf CO Senkrechte $C_p\mathfrak{c}$, in denen beziehlich die Endpunkte B_j, C_j der Beschleunigungen BB_j, CC_j liegen, sind in der angegebenen Weise konstruiert. Es sind hierauf hinweisend eingezeichnet die auf den Geraden BL, CO liegenden Strecken $B\mathfrak{B}_\mathfrak{v}$, $C\mathfrak{C}_\mathfrak{v}$, welche

[1]) Vermittels dieser Konstruktion kann auch die Beschleunigung des Schnittpunktes zweier in einer Ebene bewegten Geraden bestimmt werden.

die zu den Punkten B, C gehörenden Hilfsstrecken $B\mathfrak{B}_n$, $C\mathfrak{C}_n$ bestimmen, sowie die zu den Beschleunigungen LL_j, OO_j gehörenden Projektionen LL_p, OO_p, die beziehlich durch Antragung nach $\mathfrak{B}_n B_p$ und nach $\mathfrak{C}_n C_p$ die Fußpunkte B_p, C_p jener Senkrechten ergeben. In bekannter Weise ist dann das zu ABC ähnliche Dreieck $A_j B_j C_j$ konstruiert, dessen Eckpunkte auf den betreffenden Geraden $A_p\mathfrak{a}$, $B_p\mathfrak{b}$, $C_p\mathfrak{c}$ liegen.

Somit sind die Beschleunigungszustände der Systeme S, S_2, S_3 bestimmt; aber der Beschleunigungszustand des Systems S_1 erfordert die besondere in Fig. 4 angegebene Konstruktion, die erst dann ausgeführt werden kann, wenn außer der Beschleunigung AA_j' des mit dem Punkt A koinzidierenden Punktes des Systems S' noch die Beschleunigung eines anderen Punktes desselben bekannt ist.

In Fig. 14 ist als spezieller Fall der Hauptbestandteil der Collmannschen Steuerung[1]) schematisch gezeichnet. Die Koppel $F'L'$ eines Kurbelgetriebes $\Phi'F'L'A'$ mit dem festen Gliede $\Phi'A'$ ist die Stange g, auf der die Hülse h des Gliedes AF_∞ gleitet. Von den außer dem Gliede AF_∞, mit dem hier geradlinig gestalteten Gliede ABC drehpaarig verbundenen Gliedern BL, CO ist das Glied BL in dem Punkt L an den Kurbelarm $A'L'$ und das Glied CO in dem Punkt an das feste Glied $\Phi'A'$ drehpaarig angeschlossen.

Statt eines Punktes des dreifach geführten ebenen Systems S, der in einem führenden ebenen System auf einer Geraden bewegt wird, können auch zwei oder drei Punkte von S in zwei oder drei führenden ebenen Systemen auf je einer Geraden bewegt werden. Bei dem in Fig. 15 gezeichneten Mechanismus ist z. B. das Glied ABC in den Punkten A, B, C mit den hülsenförmigen Gliedern AF_∞, BL_∞, CO_∞ drehpaarig verbunden und diese Glieder vertreten die ebenen Systeme S, S_1, S_2, S_3. Die hülsenförmigen Glieder gleiten auf den drei bewegten, geradlinigen Gliedern eines Kurbelgetriebes $\Phi'F'L'A'$, dessen Glied $\Phi'A'$ fest ist. Dieser Mechanismus, bei dem die

1) Kinematik, S. 471, Fig. 497.

Punkte F_∞, L_∞, O_∞ im Unendlichen liegen, ist ein spezieller Fall des in Fig. 6 gezeichneten Dreispannmechanismus. Wenn die bewegten Glieder des Kurbelgetriebes mit Nuten versehen werden, deren Mittellinien die Geraden $\Phi'F'$, $F'L'$, $L'A'$ sind, und an das Glied ABC in den Stellen der Punkte A, B, C zylindrische Zapfen angebracht werden, die in diesen Nuten gleiten, dann kommen die Glieder AF_∞, BL_∞, CO_∞ in Wegfall und das Glied ABC ist dann mit den bewegten Gliedern des Kurbelgetriebes durch höhere kinematische Elementenpaare verbunden.

Die Beschleunigungszustände der Glieder dieser Mechanismen können in mehrfältiger Weise auch nach den allgemeinen, prinzipiell verschiedenen Methoden von F. Wittenbauer[1]), C. Rodenberg[2]) und O. Mohr[3]) bestimmt werden.

[1]) Zivilingenieur, Jahrg. 1896, S. 57.

[2]) Daselbst S. 565.

[3]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1903, B. 49, S. 393.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5. Fig. 5a. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11. Fig. 12. Fig. 13. Fig. 14. Fig. 15.

Lith. Anst. v. Hub Köhler, München.

Gez. L. Burmester.



Über Goepperts Raumeria im Zwinger zu Dresden.

Von **Julius Schuster.**

Mit 3 Tafeln und 5 Textfiguren.

Vorgelegt von A. Rothpletz in der Sitzung am 1. November 1911.

Einleitung.

Wer die schöne mineralogisch-geologische Sammlung im Zwinger zu Dresden besucht, sieht an der Wandseite des Saales K eine merkwürdige Versteinerung: Goepperts *Raumeria Reichenbachiana.* Man kann dieses Stück, das von je den Beschauer erstaunt und den Forscher verlegen machte, heute unter den berühmtesten und interessantesten Pflanzenfossilien nennen. Das kurz zu schildern und eine Anzahl älterer Daten mit der jetzigen Kenntnis und Fragestellung in lebendigen Zusammenhang zu bringen, hat der Verfasser in den folgenden Seiten sich vorgenommen.

I. Geschichte und ursprüngliche Deutungen.

Schon 1755 gedenkt Eilenburg in einer Beschreibung der K. Naturalienkammer zu Dresden des Stückes als Teil einer Hippuriten- oder Korallenbank, ohne indes zu verhehlen, daß es sich vielleicht auch um die Krone einer versteinerten Palme handeln könne.

Letzterer Ansicht hat zuerst Walch das Wort gesprochen, der bekanntlich nicht nur Ordinarius der Redekunst, sondern auch ein sehr tüchtiger Paläontologe war und in seiner Naturgeschichte der Versteinerungen eine Fülle von selbständigen

Beobachtungen und eine reiche Fundgrube von Quellenangaben niedergelegt hat.

Daraus erfahren wir denn, daß das Fossil 1751 in der Nähe von Lednica, einem Dorfe bei Wieliczka, in einem Sumpfe gefunden und von dem Bergrat Borlach 1753 in das Dresdener Kabinett geliefert wurde. An dem Klotz fielen einmal die rundum stehenden „Löcher" auf, die „beinahe die Figur haben wie die Fläche eines quer durchgeschnittenen Narzissenstengels", anderseits die runden, etwas gedrückten „Samenkapseln", die „inwendig etwas Körniges einschlossen". Walch denkt, wie gesagt, an die Krone einer Palme, was auch Borlach für das Wahrscheinlichste hält. Dieser sagt ferner: „Wäre es ein Gewächse derselben jetzt nur in heißen Ländern, unter der Linie, am Ufer des Meeres wachsen thäte, so könnte man vielleicht damit dartun, daß die Erde ihre Achse geändert haben müsste", — eine bemerkenswerte Vorausahnung der von späteren Forschern supponierten Polverschiebungen zu einer Zeit, wo die ganze Naturwissenschaft einen theologischen Zuschnitt hatte.



Textfigur 1.

1. Ein kleineres Stück von Goepperts *Raumeria*, Faksimile nach Walch 1771, Verkl. 1/2.

Auf den illuminierten Kupfertafeln in Walchs Werk ist ein kleineres Stück dargestellt, das schon anno 1746 ebenfalls bei Lednica in einem Tümpel gefunden und gleich damals in der Mitte durchgesägt wurde (Textfigur 1); es gehörte der Sammlung Borlach und ist jetzt anscheinend verschollen. Vielleicht tragen diese Zeilen zu seiner Wiederauffindung bei.

2. Spätere Forschungen.

Die erste wissenschaftliche Bearbeitung und Beschreibung rührt von Goeppert her, der dem Fossil den Namen *Raumeria Reichenbachiana* gab. Goeppert hielt die rundlichen, gedrückten Gebilde für „Ausbruchsstellen von Knospen“ ähnlich wie bei Cycas und stellte die Art zu einer besonderen Abteilung der Cycadinen, die er Filicoideae nannte. Er hatte zwar unter den fossilen Arten auch Bucklands Cycadeoidea microphylla aus England zum Vergleich herangezogen, doch war ihm die Identität dieser Gattung mit Raumeria entgangen.

Dieser wurde erst 1892 durch Capellini und Solms-Laubach Rechnung getragen. Das Studium zahlreicher Dünnschliffe von ähnlichen Resten aus England und Italien hatte ganz neue Perspektiven eröffnet und zur Erkenntnis geführt, daß diese Stämme einer vollständig ausgestorbenen Klasse, den Bennettitales, angehören. Es stellte sich heraus, daß die Knospen nicht nur, wie schon Eilenburg und Walch vermutet hatten, Samen enthalten, sondern auch teilweise von den Staub- und Perianthblättern umgeben sind, also die geologisch ältesten Zwitterblüten darstellen. Während Wieland, dem die Wissenschaft diese wichtige Entdeckung verdankt, viele Tausend solcher verkieselter Stämme aus der Kreide von Nordamerika auf Dünnschliffen untersuchte, blieb Goepperts *Raumeria* unberührt und bis heute findet sich in der Literatur nicht einmal eine auch nur einigermaßen ausreichende Abbildung.

Das hat nun keineswegs darin seinen Grund, daß das Dresdener Exemplar durch jene großzügigen Untersuchungen der Amerikaner an Wert eingebüßt hätte. Im Gegenteil mögen

gleich hier Wielands eigene Worte sprechen: „Indeed, although familiar with quite 1000 truncs, I know of no other fossil cycad so beautifully and magnificently silicified as *Cycadeoidea Reichenbachiana*.“

3. Allgemeine Bedeutung.

Worin besteht nun die Bedeutung des Dresdener Fossils?

Vor allem darin, daß der Stamm über und über bedeckt ist mit etwa fünfzig Blüten in einem offenbar sehr jugendlichen Stadium; denn das am meisten vorgeschrittene Stadium wird durch die noch eingekrümmten Staubblätter gekennzeichnet. Letztere Entwicklungsstufe ist mindestens durch eine Blüte repräsentiert, die von hervorragendem Interesse ist, weil man hier direkt von oben auf die sechzehn doppelt gefiederten, eingekrümmten, große Pollensäcke tragenden Staubblätter blickt. Es ist sehr wahrscheinlich, daß die Struktur des Androeceums hier vollständig erhalten ist; auch Wieland sagt: „The structure of the synangia is unquestionably preserved“.

Dadurch wird nun nicht nur die Anwesenheit von Zwitterblüten an derartigen Stämmen zum ersten Male in Europa völlig sichergestellt, sondern es könnte dadurch auch die Frage definitiv entschieden werden, ob es sich dabei um wirklich zweigeschlechtliche Blüten handelt in dem Sinne, daß beiderlei Geschlechtsorgane vollkommen ausgebildet sind (es wäre auch möglich, daß es sich um männliche Blüten mit reduziertem Gynoeceum handelt). Ferner dürfte an den jungen, noch vollständig geschlossenen, kleineren Knospen endlich ein Einblick in die Entwicklung des Gynoeceums erlangt werden. Dies wäre von um so größerem Interesse, als die Befruchtungsart bisher unbekannt ist (Lignier nimmt neuerdings für eine Art Parthenogenesis an). Gerade aber von der Kenntnis der proembryonalen Zustände wären wichtige Aufschlüsse über die systematischen Beziehungen dieser merkwürdigen Pflanzenklasse zu erwarten.

Endlich ließe sich hoffen, auf diesem Wege vielleicht dem Problem der Ableitung der Angiospermenblüte von Blüten des

Bennettitalestypus näher zu kommen und dadurch neues Material für die deszendenztheoretisch wichtige Frage zu gewinnen, ob die Bennettitales als Bindeglieder zwischen den Cycadofilicinen und den Magnoliaceen anzusehen sind, wie dies namentlich von Wieland und mir zu begründen versucht wurde. Der Hauptgewinn dürfte indes in den positiven Tatsachen zu suchen sein, welche die mikroskopische Untersuchung zutage fördert: in der Untersuchung jüngerer Entwicklungsstadien als sie bisher bekannt war; die Fragestellung wird demnach in erster Linie eine entwicklungsgeschichtliche sein müssen.

Solche Untersuchung kann natürlich nur auf Dünnschliffen erfolgen und Mühe und Kosten verlohnen sich nur dann, wenn die Innenstruktur sehr gut erhalten ist.

4. Innere Struktur.

Schon an den Bruchflächen sieht man in der schwarzen, hornsteinartigen Masse, in welche das Fossil verwandelt ist, einzelne Strukturen, so namentlich die Querschnitte der Spreuschuppen. Dies und der gleichmäßige Erhaltungszustand sowie die schwarze Färbung infolge des Reichtums an organischer Substanz legte die Vermutung einer vollständigen Konservierung der Struktur nahe. Dies hat sich durch die Dünnschliffe, die von kleinen, der Peripherie entnommenen Stückchen hergestellt wurden, vollauf bestätigt. Die Verkieselung ist von ungewöhnlicher Gleichmäßigkeit und nur selten ist das Gewebe durch Quarzgänge zerrissen.

Die wenigen Präparate sagen mehr als viele Worte: sie zeigen das zentrale Mark mit dem peripheren Holzkörper und der Rinde, die Blattstiele und das zwischen diesen befindliche aus Spreuschuppen bestehende Ramentum. Deutlich treten im Mark- und Blattstielparenchym die Sekretbehälter, welche wahrscheinlich Gummi führten, hervor.

Leider ließ sich über die Blüten keine Voruntersuchung anstellen, da diese nur durch Herausbohren mittelst Diamantbohrer oder Heraussägen gewonnen werden können. Es ist in-



Textfigur 2.
Goepperts *Raumeria* in ihrer ursprünglichen (verkehrten) Aufstellung, um die spiralige Anordnung der Blattnarben zu zeigen.

des schon aus dem äußeren Erhaltungszustand auf eine ebenso gleichmäßige Verkieselung zu schließen, denn sonst hätten sich so zerbrechliche und zarte Gebilde, wie es die doppelt gefiederten Staubblätter mit ihren Pollensäcken sind, gar nicht erhalten. Gerade diese lassen aber an dem einen Knospenstadium sogar jeden einzelnen Pollensack deutlich erkennen. An dieser Stelle könnte die mikroskopische Untersuchung zweifellos mit Erfolg einsetzen.

5. Äussere Struktur.

Äußerlich stellt sich der Klotz als der basale Teil eines unverzweigten, säulenförmigen Stammes mit breiten Blattbasen dar. Der Abschnitt des Stammes ist fast einen halben Meter hoch, von eben solchem Durchmesser und kaum zusammengedrückt, wohl sieben Zentner schwer; er dürfte im Leben

mindestens ein Meter hoch gewesen sein, gehört also zu den größten Stämmen, die unter den Bennettitales bekannt sind. Das zentrale Mark ist 13 cm dick, der periphere Holzzylinder 8 cm.



Textfigur 3.
Goepperts *Raumeria* von der mehr zerstörten Seite.

Die Blattnarben sind unregelmäßig schraubig angeordnet; die von links nach rechts laufende Spirale bildet zur Achse einen Winkel von 40°, die von rechts nach links einen solchen von 25°. Der Form nach sind die Blattnarben schwach rhombisch, der untere Winkel ist stumpf, die beiden oberen Seiten auf einen mehr oder weniger schwachen Boden reduziert, so daß im allgemeinen eine trianguläre Form entsteht, wobei die Spitze des Dreiecks stets nach unten gekehrt ist; die Breite beträgt dabei 15—30 mm.

Rund um den Stamm sind etwa 50 Blüten (Zwitterblüten) verteilt. Man erkennt sie an den Narben der gleichfalls

spiralig angeordneten Perianthblätter, sie sind vollständig in den mit Ramentum (Spreuschuppen) bedeckten Stamm eingesenkt und ragen nur als schwach kuppelförmige Hervorwölbungen empor, teilweise von den Perianthblättern bedeckt. Ihre Größe variiert, am weitesten in der Entwicklung vorgeschritten ist ein Stadium mit den 16 eingekrümmten, doppelt gefiederten Staubblättern und großen Pollensäcken, in der Mitte das Gynoeceum, an dem sich indes makroskopisch kaum eine Struktur wahrnehmen läßt; es scheint hier durchaus auf einem jüngeren Entwicklungsstadium zu stehen.

Auch dieses Exemplar läßt sich nur verstehen, wenn man annimmt, daß die Cycadeoideen pleio- oder polyzyklische Hapaxanthen waren, d. h. Gewächse, die (wie manche Palmen) erst nach mehr- bis vieljähriger Entwicklungsperiode blühen und fruchten, aber nach dem ersten Blühen ganz absterben, also „nur einmal" blühen und fruchten.

6. Williamsonia-artige Struktur.

Infolge der hapaxanthen Lebensweise findet man an den Stämmen die Narben abgefallener Blüten nur selten. Was man sieht, ist fast immer nur der apikale Teil der Blüte, der nur wenig über den einhüllenden Panzer hervorragt. Glücklicherweise, denn das ist eben der Grund für die Konservierung dieser Blüten, mit denen die Stämme in der Regel dicht bedeckt sind. Auch bei Cycadeoidea Reichenbachiana läßt sich nur an einer Stelle die Form einer herausgefallenen Blüte erkennen. Der dadurch entstandene Narbentrichter, auf den schon Goeppert hinwies, erinnert auffällig an die Abdrücke gewisser Williamsonia-Blüten aus England, so namentlich an eine von Nathorst (Taf. 4, Fig. 1) abgebildete Williamsonia setosa.

Würde es noch eines Beweises bedürfen, daß das eigentümlich gelappte Gebilde, das Williamson als carpellary disc bezeichnet hatte, nicht ein steriles trichterartiges Anhängsel der weiblichen Blüte darstellte, wie Lignier meinte, so wäre



Texlfigur 4.
Trichterförmige Narbe im Stamm von Goepperts *Raumeria*, entstanden durch Herausfaulen einer Blüte samt den Perianthblättern. Nat. Gr.

hier ein klassisches Argument gegen diese Anschauung vorhanden. Die mehr als zwanzig radialen Streifen, die man in dem Trichter sieht, sind nun nicht etwa die Abdrücke der Staubblätter (denn diese sind ja doppelt gefiedert und tragen große Pollensäcke), sondern die Eindrücke der die ganze Blüte schützend umgebenden Perianthblätter — ein Beispiel, wie vorsichtig man in der Deutung von Abdrücken sein muß. Auch Wieland wurde durch Goepperts Zeichnung an eine Williamsonia-Blüte erinnert, fand aber diese Stelle an dem Original nicht und glaubte daher, es liege hier ein von Goepperts Raumeria vollkommen verschiedenes Stück vor.

Es kann indes keinem Zweifel unterliegen, daß diese Blüte schon vor dem Versteinerungsprozeß herausgefallen war, wie sich schon aus dem ganzen erhaltenen Zustand ergibt. Aber auch den ersten Beobachtern war diese trichterartige Narbe

mit ihren Streifen schon aufgefallen. Sie war es, die den Bergrat Eilenburg auf die Deutung als Hippurit oder Koralle gebracht hatte, während Borlach dieser Erscheinung keine besondere Bedeutung beimaß. Dieser sagt: „In der einen Gegend dieses raren Petrefacti ist ein Stück von dem Gestein ausgefallen, wodurch eine trichterförmige Vertiefung entstanden, deren Spitze nach der Axis gerichtet ist.“

7. Geologisches Alter.

Da das Fossil in der Nähe von Wieliczka entdeckt wurde, glaubte Goeppert, es stamme aus der miozänen Salzformation. Es wurde ja auf sekundärer Lagerstätte, in einem Sumpfe liegend, gefunden und der Borlachsche Bericht meint, daß es vermutlich die Bauern, die in solchen Sümpfen den Hanf zu rösten pflegten, von einem anderen Ort, der aber nicht weit davon entfernt gewesen sein muß, dorthin geschafft hätten. Außerdem sagt Borlach: „Es hat aber doch nicht gar weit, ungefähr eine Viertelstunde davon, auf einer Höhe ein ganzes Geschiebe von allerlei festen Steinen, unter welchen man auch schon vormals ein Stück von der Art wie das kleinere ist angetroffen hat.“

Es genügt einen Blick auf Blatt IV von E. Tietzes geologischer Karte der Umgebung von Krakau zu werfen, um daraus unzweifelhaft zu erkennen, daß hier nur die „außerkarpathische obere Kreide“ in Betracht kommen kann, während Niedzwiedzki früher die „Lednicer Schichten“ als einen eigentümlichen Typus des Oligozän einzuführen versucht hatte. Es ist nun auch vom paläontologischen Standpunkt aus vollkommen sicher, daß der Stamm weder aus dem Miozän noch Oligozän stammen kann, sondern jüngstens aus der oberen Kreide, in welcher diese Pflanzenklasse ja von der Weltbühne verschwindet.

In der Umgebung von Wieliczka sind Pflanzenfossilien sehr selten. Aber der Umstand, daß damals um 1751 gleich drei derartige Stammreste gefunden wurden, legt die Vermutung nahe, daß in der Kreide bei Lednica die Reste eines

Waldes von Cycadeoidea Reichenbachiana eingebettet sind und eine spezielle Nachforschung an Ort und Stelle würde vielleicht nicht ohne Erfolg sein. Aus den zum Aptien gehörigen Wernsdorfer Schichten in den Nordkarpathen ist übrigens die Anwesenheit ähnlicher Blüten durch die von mir beschriebene Williamsonia infracretacea festgestellt.

Vor 1746 scheint indes nichts Ähnliches aus Polen bekannt gewesen zu sein. Wenigstens finden sich in der 1721 zu Sendomir erschienenen Naturgeschichte des Jesuiten Rzaczynski keine Anhaltspunkte dafür, obwohl hier viel von Lithoxyla und anderen Versteinerungen geredet wird. Derartig merkwürdige Versteinerungen wie die Stämme von Cycadeoidea hätten hier sicher in irgendeiner Form Erwähnung gefunden. Aufgefallen sind sie ja zu allen Zeiten — wurde doch der Stamm einer Art von den Etruskern vor mehr denn 4000 Jahren als Schmuck auf ein Grab in der Nekropolis zu Marzabotto gestellt.

8. Chemische Beschaffenheit.

Durch gütige Vermittlung von Herrn Oberbergrat Dr. v. Ammon, dem hiefür der wärmste Dank gezollt sei, wurde vom k. Landesgeologen Ad. Schwager im Laboratorium der geologischen Landesuntersuchung (k. Oberbergamt) eine Analyse vorgenommen. Diese ergab folgendes Resultat:

Raumeria Reichenbachiana.

Kieselsäure (SiO_2)	94,20 %[1]
Tonerde	0,64
Eisenoxydul (Fe_2O_3)	0,34
Manganoxydul (MnO)	0,05
Kalkerde (CaO)	0,84
Bittererde (MgO)	0,32
Glühverlust (Organ. und Wasser H_2O)	3,24
Alkalien und Sonstiges	0,37
	100,00

Sp. Gew. 2,508 (Quarz sp. Gew. = 2,653).

[1]) Selbst von der geglühten Substanz sind mit 2,5 %iger Kalilauge nach 1stündigem Kochen 7,12 % SiO_2 löslich.

9. Raumeria Schulziana.

Zum Vergleich mit *Raumeria Reichenbachiana* war es erwünscht, Goepperts *Raumeria Schulziana* im Original zu untersuchen, denn seine Abbildung des Dresdener Fossils hatte sich nichts weniger als zuverlässig erwiesen (sie war allerdings nach einer Zeichnung von Geinitz hergestellt).

Der besonderen Güte des Herrn Professor Dr. Frech, dem ich hiermit meinen verbindlichsten Dank ausspreche, habe ich es zu danken, daß mir dieses wertvolle Stück aus der Goeppertschen Sammlung in Breslau zum Vergleich geschickt wurde und ich konnte mich auf den ersten Blick von der Vortrefflichkeit der unter Goepperts Leitung ausgeführten Abbildung überzeugen — was bei einem (nicht nur in seiner Eigenschaft als Paläontologe) so tief grabenden Forscher wie Goeppert nicht anders zu erwarten war.



Textfigur 5.
Goepperts *Raumeria* von Gleiwitz. Verkl. $^2/_3$ (vgl. auch Tafel III, Figur 7).

Auch *Raumeria Schulziana* wurde schon im vorvorigen Jahrhundert gefunden und zwar als Geschiebe beim Graben des Klodnitzkanales in der Nähe von Gleiwitz im südöstlichen Schlesien. Es ist nicht zweifelhaft, daß es gleichfalls aus der

Kreide stammt, und schon Goeppert meint, man könnte fast geneigt sein, es für ein jüngeres Exemplar der *Reichenbachiana* zu halten. Auch liegt ja Gleiwitz nicht so sehr weit westlich von Krakau. Nun sind freilich bei *Raumeria Schulziana* die Blattnarben kleiner (12—17 mm breit), aber es ist zu bedenken, daß der ganze Stamm, von dem nur ein Kugelsektor erhalten ist, nicht mehr denn 20 cm Durchmesser gehabt haben dürfte.

Blüten (von Goeppert als Blattknospen gedeutet) sind nur zwei auf der vorderen Fläche des Fossils erhalten; sie sind sehr klein (10 mm breit) und tief in den Panzer eingesenkt, vollständig von den Perianthblättern bedeckt. Offenbar befinden sie sich wie bei *Raumeria Reichenbachiana* in einem sehr jungen Entwicklungsstadium.

Ein wesentlicher Unterschied gegenüber der letzteren ist aber in der Querschnittsform des Ramentum gegeben. Während die Spreuschuppen bei *Raumeria Reichenbachiana* kurze und breite, gedrungene Spindeln darstellen, sind sie hier durchgehends sehr lang und schmal, wie dies auch Goepperts Fig. 5 auf Taf. VII sehr gut erläutert. Dieser Umstand dürfte es wohl rechtfertigen, *Raumeria Schulziana* als besondere Art zu unterscheiden.

Im Vergleich zu dem kolossalen Block im Zwinger ist das verhältnismäßig kleine Fragment freilich von untergeordneter Bedeutung und die geringe Zahl der Blüten läßt eine mikroskopische Untersuchung kaum wünschenswert erscheinen, um so mehr als es dahinsteht, ob hier Zwitterblüten vorliegen. Aber als der einzige Fund einer Cycadeoidea in Deutschland ist das Stück, das wohl auch eine besondere Spezies repräsentiert, immerhin von hohem Interesse und war mit dem Wert von 500 Mark auf dem mir zugesandten Paket sicher nicht zu hoch geschätzt.

Schlussbemerkungen.

Wie in den vorstehenden Zeilen gezeigt wurde, ist Goepperts *Raumeria* nicht nur das vornehmste Beweismaterial für die klassischen Untersuchungen Wielands sondern gestattet auch

diese in einem wichtigen Punkt zu erweitern, nämlich in der Ontogenie. Es ist hier der seltene Fall gegeben, daß man an einem Fossil entwicklungsgeschichtliche Studien unternehmen kann. Das ist aber nur durch mikroskopische Untersuchung auf Dünnschliffen möglich. So groß auch der Wert dieses Naturdenkmals im wahrsten Sinne des Wortes als Schaustück ist, so sehr vervielfacht er sich, wenn die Museumsleitung sich entschließt, die für die botanisch-mikroskopische Untersuchung notwendigen Teile wegzupräparieren und der wissenschaftlichen Bearbeitung zugänglich zu machen.

Solchem Wunsche kommt die Tatsache, daß das seltene Fossil als Stamm erhalten ist, sehr zugute. Denn bei Entnahme einer nur geringen Partie für die angedeutete Untersuchung bleibt als Schaustück immer noch so viel übrig, daß es seinen Zweck zur Erläuterung des Habitus der Pflanze vollkommen erfüllt. Dafür würde man dann aber dem Besucher auch die Innenstruktur zeigen können, und dadurch würde das Stück erst wirklich zu einer der berühmtesten Versteinerungen der ganzen Welt, zu einem unvergleichlichen Demonstrationsmaterial für die Entwicklung der Pflanzenwelt, die uns heute umgibt. Denn schon jetzt läßt sich sagen, daß wir hier — bildlich gesprochen — die Vettern, wenn nicht die Eltern der Blütenpflanzen vor uns haben, jedenfalls eine vollständig ausgestorbene Pflanzenklasse, die auch der kühnste Theoretiker in seiner Phantasie nicht hätte rekonstruieren können.

* * *

Es ist mir eine angenehme Pflicht, den Beamten des Dresdener Museums für ihr außerordentliches Entgegenkommen während meines dortigen Aufenthaltes den ergebensten Dank auszusprechen, vor allem dem Direktor Herrn Geheimrat Prof. Dr. Kalkowsky, ferner den Herren Hofrat Dr. Deichmüller und Direktorialassistent Dr. Wanderer.

Zitierte Literatur.

Buckland, On the Cycadeoideae, a family of fossil plants found in the Oolithe quarries of the Isle of Portland. Trans. Geol. Soc. London, II (ser. 2), 1829.

Capellini e Solms-Laubach, I tronchi di Bennettitee dei Musei Italiani. Mem. R. Accad. Bologna II (ser. 5), 1892.

Eilenburg, Kurzer Entwurf der Königlichen Naturalienkammer zu Dresden. Dresden und Leipzig 1755.

— Description du Cabinet royal de Dresde touchant l'histoire naturelle. Dresde et Leipsic 1755.

Goeppert, Über die gegenwärtigen Verhältnisse der Paläontologie in Schlesien sowie über fossile Cycadeen. Jubiläums-Denkschrift Schles. Ges. Vaterl. Kultur. Breslau 1853.

Lignier, Le fruit de Williamsonia gigas Carr. et les Bennettitales. Mém. Soc. Linn. Normandie XXI, 1903 (Caen).

— Le Bennettites Morierei (Sap. et Mar.) Lignier se reproduisait probablement par parthénogénèse. Bull. Soc. Bot. France LVIII, 1911 (Paris).

Nathorst, Paläobotanische Mitteilungen 9. Neue Beiträge zur Kenntnis der Williamsonia-Blüten. Vet. Akad. Handl. XXXXVI, 4. Stockholm 1911.

Niedzwiedzki, Beitrag zur Kenntnis der Salzformation von Wieliczka und Bochnia. Lemberg 1883.

Rzaczynski, Historia naturalis curiosa regni Poloniae. Sandomiriae 1721.

Schuster J., Weltrichia und die Bennettitales. Vet. Akad. Handl. XXXXVI, 11. Stockholm 1911.

Tietze, Die geognostischen Verhältnisse der Gegend von Krakau. Jahrb. K. K. Geol. Reichsanst. Wien XXXVII, 1887 (3. und 4. Heft).

Walch, Die Naturgeschichte der Versteinerungen zur Erläuterung der Knorrischen Sammlung von Merkwürdigkeiten der Natur III, Nürnberg 1771, Suppl. IIIa, 6.

Ward, A famous fossil Cycad. Am. Journ. Sci. XVIII, 1904.

Wieland, American fossil Cycads. Washington 1906 (Publ. 34 of the Carnegie Institution).

— Historic fossil Cycads. Am. Journ. Sci. XXV, 1908.

— The Williamsonias of the Mixteca alta. Bot. Gazette XXXXVIII, 1909.

Williamson, Contributions towards the History of Zamia gigas Lindl. et Hutt. Trans. Linn. Soc. London XXVI, 4, 1870.

Tafelerklärung.

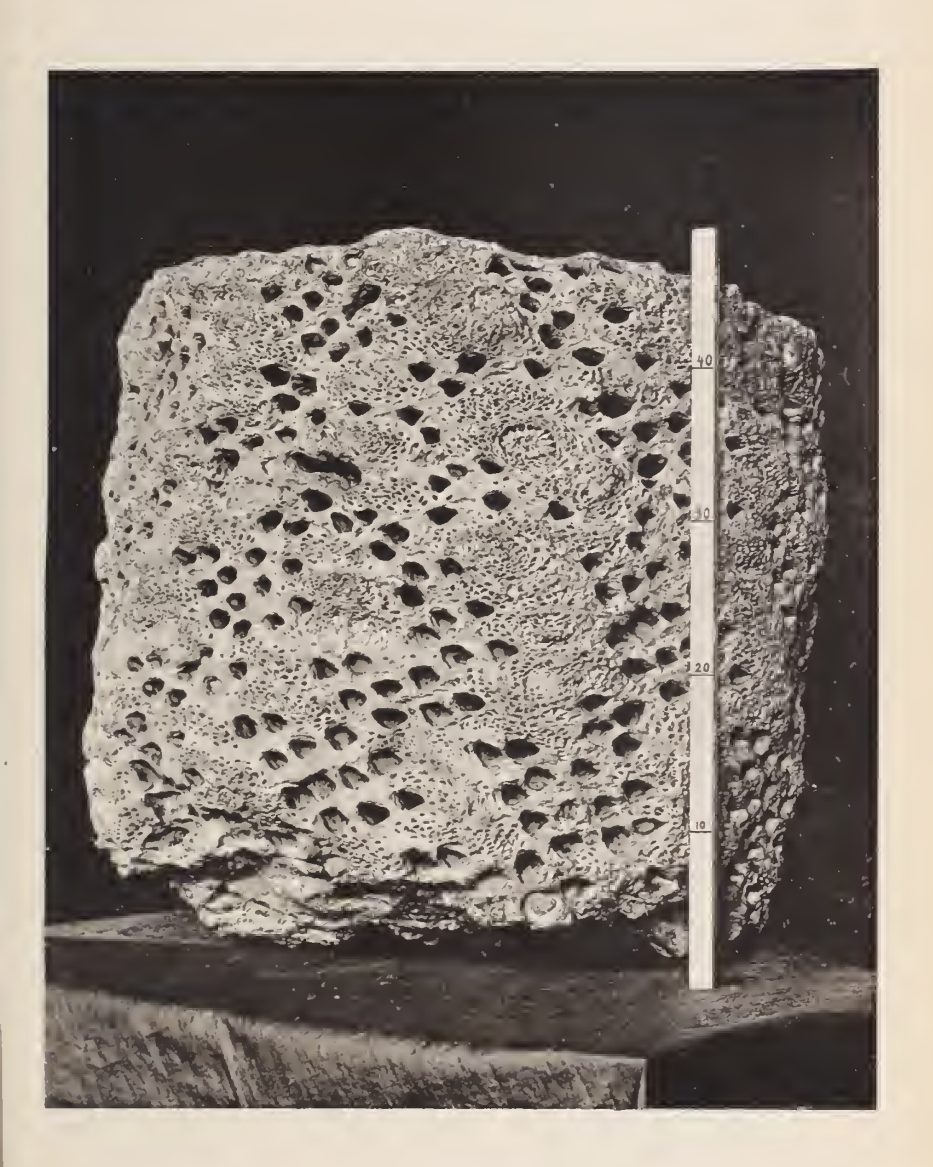
Vergleiche auch Textfigur 2—4.

Alle Figuren beziehen sich auf Goepperts *Raumeria = Cycadeoidea Reichenbachiana* und zwar zeigt Tafel I die am besten erhaltene Seite. Tafel II erläutert die auf der ersten Tafel verkleinert sichtbare Blüte mit den 16 Staubblättern in natürlicher Größe; man blickt unmittelbar auf die farnwedelartig eingekrümmten, noch nicht entfalteten Staubblätter, deren Rhachis sich nach außen hin scharf dreieckig abhebt; auch die großen Pollensäcke sind gut sichtbar, in der Mitte befindet sich das Gynoeceum, welches von den Staubblättern fast ganz bedeckt wird. Ober- und unterhalb gleichfalls eine Blüte, die obere noch sehr jugendlich und kaum sichtbar, die untere in einem ähnlichen Stadium wie die mittlere, jedoch noch von den Perianthblättern bedeckt. Links unten abermals eine junge Blüte. Tafel III stellt Mikrophotographien von Dünnschliffen dar und zwar Figur 1 Holz und (oben) Rinde, quer; Figur 2 Holz und Mark, quer, in letzterem Sekretbehälter; Figur 3 Holz tangential; Figur 4 Ramentum (Spreuschuppen) quer; Figur 5 Blattstiel von Ramentum umgeben, quer; im Parenchym Sekretbehälter; Figur 6 Längsschnitt durch das Parenchym des Blattstieles mit Sekretbehältern; Figur 7 *Raumeria = Cycadcoidea Schulziana* Goeppert; zwischen den Blattnarben und Spreuschuppen-Querschnitten (links) zwei Blüten, vgl. Textfigur 5.

Inhaltsübersicht.

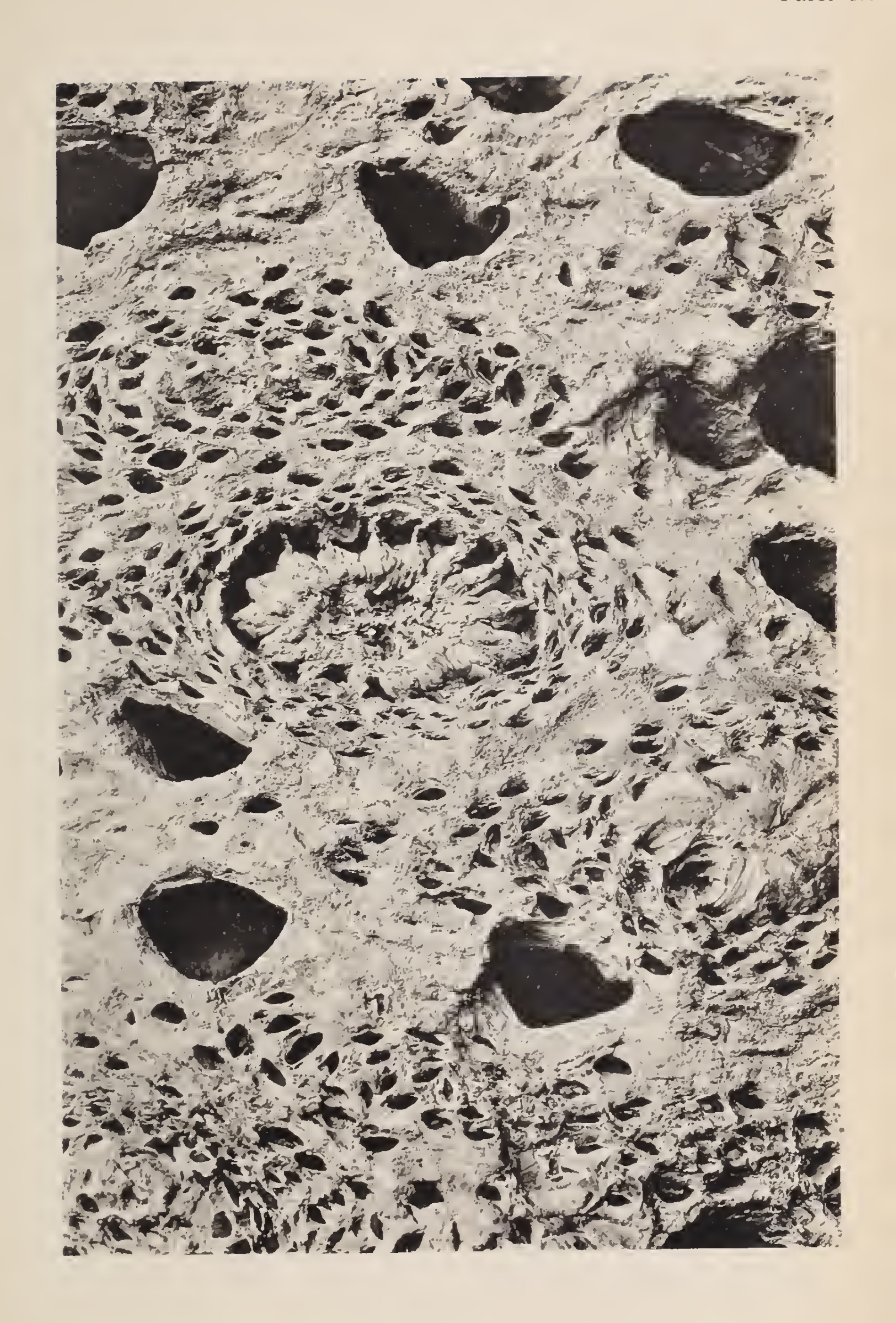


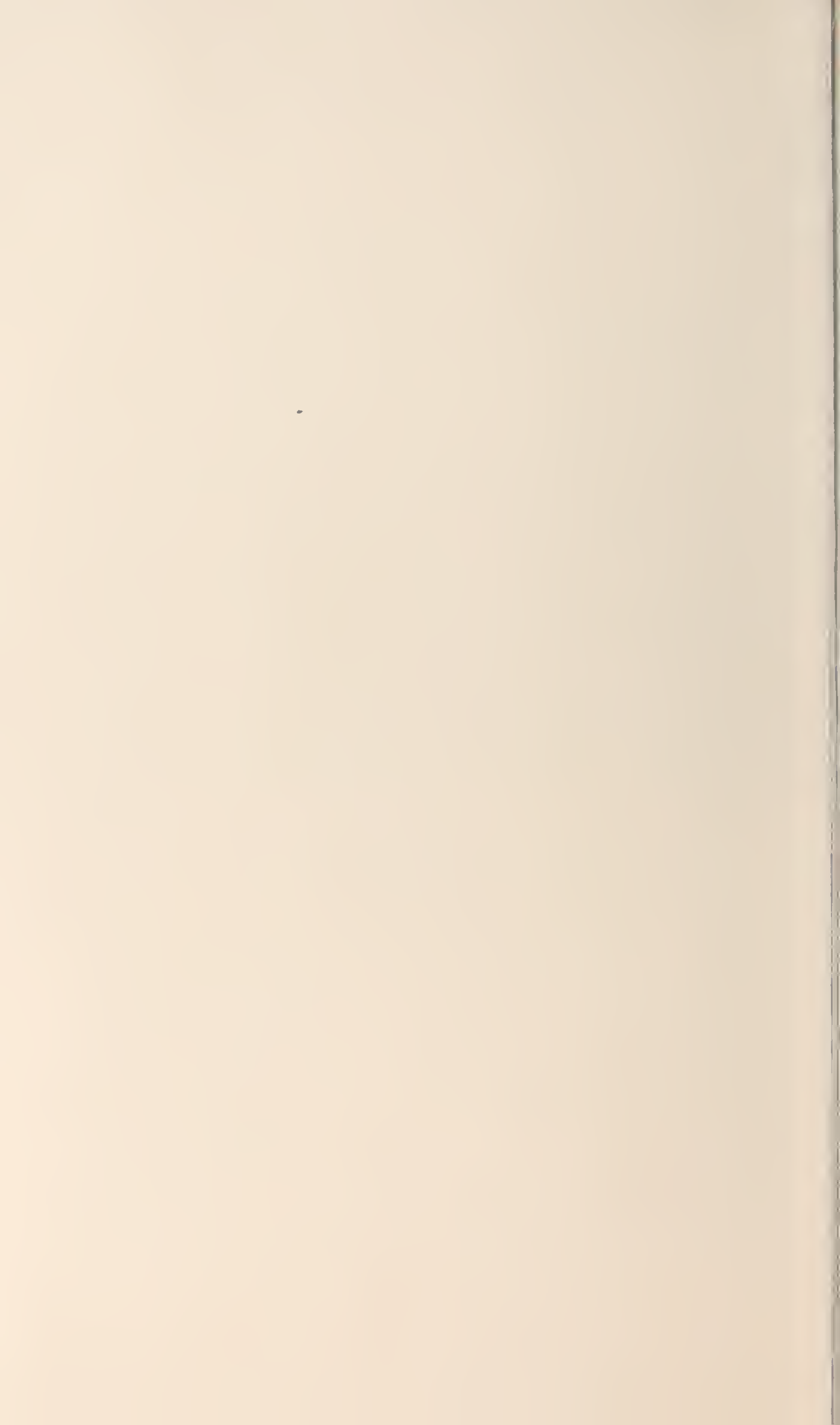


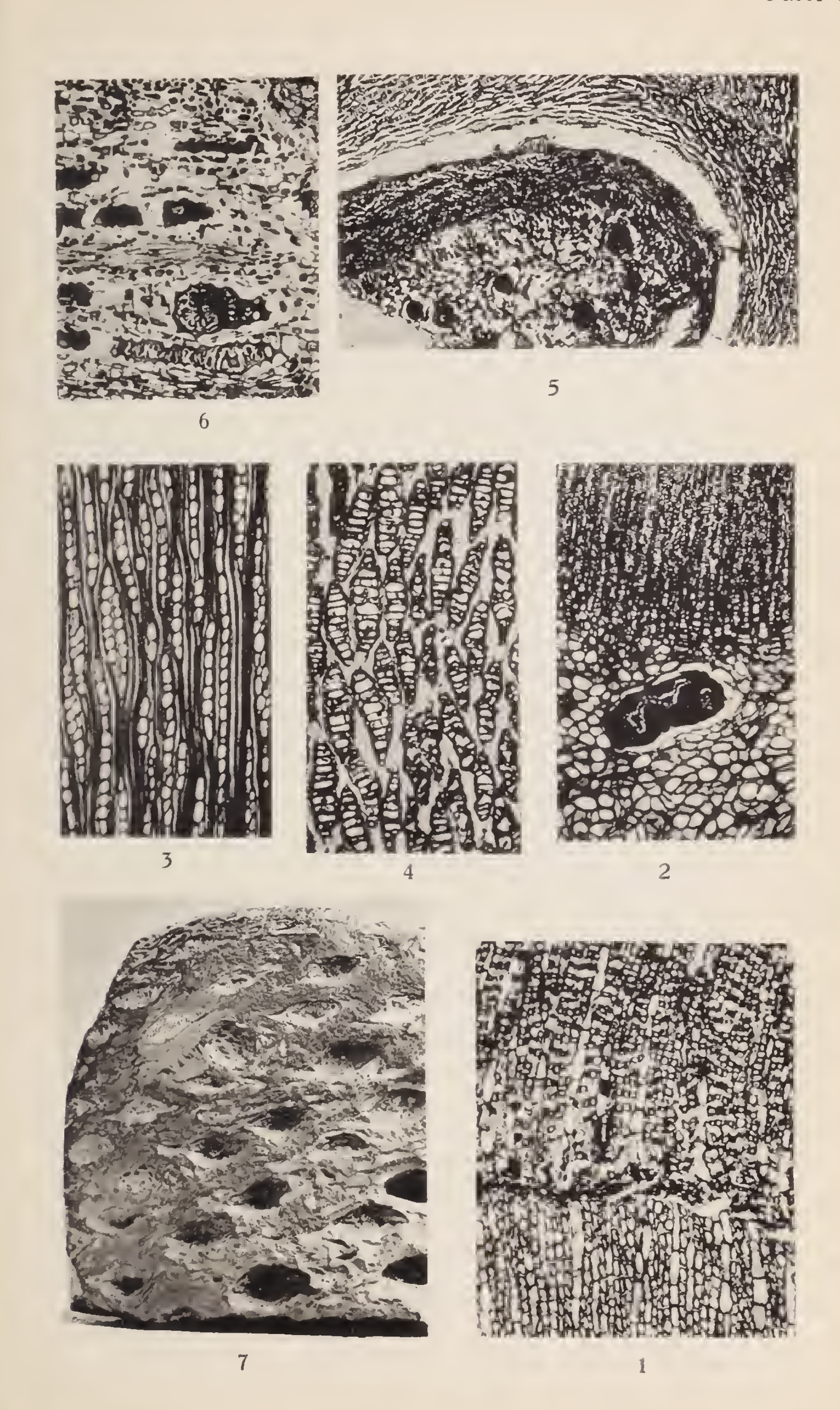


..HTDRUCK CARL KUHN, MÜNCHEN.





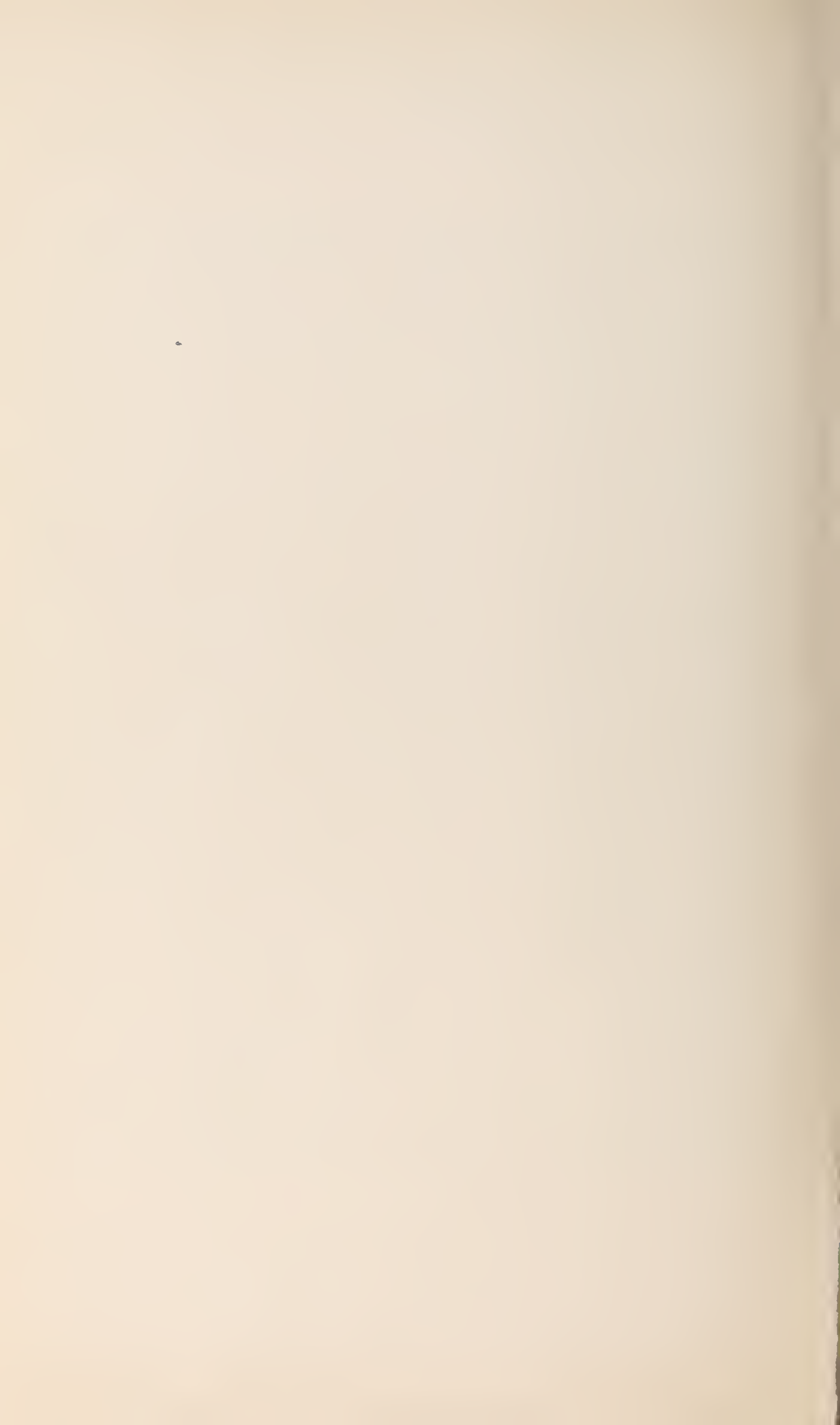




6 5

3 4 2

7 1



Die Sprödigkeit von Glas.

Von **A. Föppl.**

Vorgelegt in der Sitzung am 2. Dezember 1911.

Die Sprödigkeit ist ein nicht genauer umschriebener Begriff der Umgangssprache, der aus einfachen Erfahrungen des täglichen Lebens abgeleitet ist. Wie alle Begriffe, die der Umgangssprache unmittelbar entnommen sind, ist auch der Begriff der Sprödigkeit zunächst schwankend und dehnbar. Daran hat auch die Wissenschaft bisher nichts geändert; auch im wissenschaftlichen Sprachgebrauche hat das Wort noch keine feste und allgemein anerkannte Bedeutung erlangt. Um zahlenmäßige Angaben über die für manche Zwecke recht wichtige Eigenschaft der Sprödigkeit machen zu können, muß man sich daher zuerst für eine mehr oder weniger willkürliche Definition entscheiden, die bestimmt genug gefaßt ist, um nach ihr aus zweckmäßig angelegten Versuchen das genauere Maß der Sprödigkeit eines Körpers ableiten zu können.

Zunächst ist ein spröder Körper dadurch gekennzeichnet, daß er keine merklichen bleibenden Formänderungen anzunehmen vermag, bevor er zerbricht. Dieses Verhalten führt ferner von selbst dazu, daß ein spröder Körper verhältnismäßig leicht durch Stöße zerstört wird; jedenfalls leichter als ein weniger spröder Körper, der ruhenden Lasten gegenüber von der gleichen Widerstandsfähigkeit ist. Man kann also ein Maß für die Sprödigkeit einerseits dadurch gewinnen, daß man durch hinlänglich feine Messungen feststellt, welche Größe die sehr kleinen bleibenden Formänderungen kurz vor Eintreten

des Bruches auch bei einem spröden Körper immerhin noch anzunehmen vermögen. Oder man kann andererseits die Arbeit messen, die bei einem Stoße aufgewendet werden muß, um den Körper zu zerstören. Ich habe mich bei meinen Versuchen für den zuletzt angegebenen Weg entschieden.

Als Hauptbeispiel für einen spröden Körper gilt überall das Glas. Aber es gibt sehr verschiedene Gläser, die in ihren Eigenschaften weit voneinander abweichen. Sieht man nun die Sprödigkeit von vornherein als eine allen Gläsern gemeinsame Eigenschaft an, so entsteht um so mehr das Verlangen, die Unterschiede, die immerhin auch in dieser Eigenschaft zwischen den verschiedenen Glassorten noch zu erwarten sind, durch geeignete Versuche nachzuweisen und zahlenmäßig auszudrücken.

Das ist, wie es scheint, bisher nicht geschehen. Ich hielt es daher für eine dankbare Aufgabe, ein Verfahren, das ich schon vor einigen Jahren hauptsächlich zu praktischen Zwecken für die Prüfung der Sprödigkeitseigenschaften von Straßenbausteinen ausgearbeitet und seitdem vielfach als zweckmäßig erprobt habe, jetzt auch einmal ohne Änderung auf die zahlenmäßige Ermittlung der relativen Sprödigkeitswerte einer Anzahl bestimmter Glassorten zu übertragen. Ich muß freilich sofort vorausschicken, daß das Verfahren mit erheblichen Mängeln behaftet ist, auf die ich später noch ausführlicher eingehen werde. Immerhin führt es zu bestimmten und nachprüfbaren Zahlenwerten für die Sprödigkeit, die wenigstens ungefähre Gültigkeit beanspruchen können und darin ist gegenüber dem bisherigen Zustande unseres Wissens auf diesem Gebiete jedenfalls ein Fortschritt zu erblicken.

Beschreibung des Verfahrens.

Bei den zu Straßenbauzwecken verwendeten Steinen, für die ich das Verfahren zuerst ausgebildet habe, konnte kein Zweifel darüber bestehen, daß man die Sprödigkeitseigenschaften durch Stoßversuche feststellen müsse. Die Abnützung, die eine Straßendecke durch den sich darüber bewegenden Verkehr er-

fährt, wird nämlich zum Teil durch die Stöße hervorgebracht, die dabei auftreten. Um ein Urteil über den Einfluß zu erlangen, den die Sprödigkeit oder die Zähigkeit auf die mehr oder weniger gute Haltbarkeit eines bestimmten Steinmaterials ausübt, ist es daher geboten, diese Eigenschaft selbst aus Stoßversuchen abzuleiten. Außerdem ist der Versuch auf diese Weise auch viel leichter durchzuführen, als wenn man sich um die Messung der sehr kleinen bleibenden Formänderungen bemühen wollte, die ein Straßenbaustein anzunehmen vermag, ehe er zerbricht.

Eine genaue Beschreibung und ausführliche Begründung des Verfahrens habe ich in den von mir herausgegebenen „Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der K. B. Technischen Hochschule", Heft 30 (München 1906) veröffentlicht. Eine weitere Abhandlung über denselben Gegenstand mit zahlreichen Versuchsergebnissen findet man in Heft 32 der „Mitteilungen" (München 1912). Hier muß ich mich auf einige kurze Angaben beschränken.

Die Steine werden in Würfelform geprüft; gewöhnlich haben die Würfel eine Kantenlänge von etwa 3.5 cm und sind mit der Diamantsäge aus einem größeren Steinstück herausgeschnitten. Die Druckflächen werden vor dem Versuche entweder mit Schmirgel nachgeschliffen oder mit einem Diamanten auf der Drehbank sorgfältig eben abgedreht. Dann setzt man den Würfel auf ein größeres Gußstück, das als Amboß dient, legt auf die obere Würfelseite ein Stahlplättchen und läßt darauf den Hammer des Schlagwerks aus einer bestimmten Höhe herabfallen. Der Versuch lehrt, daß es innerhalb gewisser Grenzen gleichgültig für den Erfolg ist, ob man einen schweren Hammer mit einer geringen Fallhöhe oder umgekehrt einen leichteren Hammer mit einer größeren Fallhöhe verwendet, wenn nur das Produkt aus beiden Werten, also die Stoßarbeit dieselbe bleibt. Bei Würfeln von verschiedener Größe muß die Stoßarbeit proportional dem Würfelvolumen sein, um gleiche oder entsprechende Wirkungen hervorzubringen.

Ferner lehrten die Versuche, daß es für jede bestimmte Steinsorte eine gewisse „unwirksame“ Hubhöhe eines gegebenen Hammers bei gegebener Würfelgröße gibt, aus der man beliebig viele Schläge auf den Würfel abgeben kann, ohne damit den Bruch oder irgendein Anzeichen einer Schädigung des Würfels herbeizuführen. Gibt man Schläge aus einer Hubhöhe ab, die nur wenig größer ist als die unwirksame, so bedarf es einer großen Zahl aufeinanderfolgender Schläge zur Herbeiführung des Bruches. Bei einer größeren Hubhöhe wird die Zahl der zum Bruche erforderlichen Schläge kleiner und bei einer gewissen Hubhöhe, die sich aber bei meiner Versuchseinrichtung nur ganz ungenau ermitteln ließ, reicht ein einziger Schlag gerade schon hin, um den Bruch zu bewirken.

Ein anderer Versuchsansteller hätte sich unter diesen Umständen vielleicht zu einem Verfahren entschlossen, das bei anderen Stoßversuchen schon öfters benutzt worden ist und das, auf den vorliegenden Fall übertragen, darin bestehen würde, einen einzigen Schlag aus genügend großer Höhe auf den Würfel abzugeben, um ihn sicher zu zertrümmern und hierauf die kinetische Energie zu messen, mit der sich der Hammer nach Vollendung der Zerstörung des Würfels noch weiter bewegt. Die Differenz der kinetischen Energie des Hammers zu Beginn und zu Ende des Stoßes würde dann die zur Zerstörung des Würfels erforderliche Bruchalbeit ergeben, die unter sonst gleichen Umständen als umgekehrt proportional der diesem Vorgange entsprechend zu definierenden Sprödigkeit des Würfels angesehen werden könnte.

Ich habe mich aber für ein anderes Vorgehen entschieden, teils wegen der Schwierigkeit, die Geschwindigkeit des Hammers nach dem Stoße mit genügender Genauigkeit zu messen, was jedenfalls viel Mühe gemacht hätte, namentlich aber weil mir die vorher besprochenen Erfahrungen über den Einfluß mehrfach wiederholter Stöße ein Prüfungsverfahren angemessen erscheinen ließen, bei dem nicht ein einziger Stoß, sondern eine Reihe aufeinanderfolgender Stöße zur Verwendung gebracht wird. Diese und andere in meiner früheren Veröffentlichung

ausführlich besprochenen Erwägungen führten mich zur Festsetzung der folgenden Versuchsvorschriften, an die ich mich von da ab stets gehalten habe.

Zuerst wird ein Schlag aus solcher Höhe auf den Würfel abgegeben, daß die Schlagarbeit für jeden ccm des Würfelvolumens 2 cmkg beträgt. Dieser Wert ist so gewählt, daß der erste Schlag bei allen Körpern, die etwa einer Sprödigkeitsprüfung unterzogen werden könnten, unwirksam bleibt, während ein zwei- bis dreifacher Betrag der Schlagarbeit bei den weniger widerstandsfähigen Körpern, wie bei Zementbeton, schon zu einer Zerstörung genügen würde. Dann läßt man einen zweiten Schlag des Hammers aus der doppelten, einen dritten aus der dreifachen und überhaupt jeden n^{ten} Schlag aus der $n$fachen Hubhöhe solange abgeben, bis der Bruch des Würfels herbeigeführt ist. Bei sehr widerstandsfähigen Körpern können dazu 40 und mehr Schläge erforderlich sein; immerhin läßt sich aber doch auch bei ihnen der Versuch ohne allzu großen Zeitaufwand durchführen.

Als Maß für die Widerstandsfähigkeit des geprüften Stoffes gilt die gesamte auf 1 ccm des Würfels bezogene Schlagarbeit, die bei diesem Verfahren bis zur Zerstörung aufgewendet wurde. Für n Schläge beträgt diese Arbeit $n(n+1)$ cmkg für 1 ccm. Bei aufmerksamer Beobachtung der begleitenden Umstände, namentlich des Hammerrücksprungs, kann man auch wohl zu einem Urteile darüber gelangen, ob der letzte Schlag ganz oder nur teilweise und zu welchem Bruchteile seiner Arbeitsleistung er ungefähr zur Herbeiführung des Bruches erforderlich war. Bei der Feststellung der Brucharbeit kann dann der letzte Schlag schätzungsweise mit dem entsprechenden Anteile eingerechnet werden. Der Schätzungsfehler, den man dabei begeht, bleibt übrigens gegenüber den anderen unvermeidlichen Versuchsfehlern meist unerheblich.

Bei den zu praktischen Zwecken ausgeführten Steinprüfungen werden in der Regel 6 Würfel des gleichen Materials nach den gleichen Vorschriften geprüft. Den Durchschnittswert der auf die vorher angegebene Weise berechneten Bruch-

arbeit für die 6 Würfel bezeichne ich als die „Wertziffer" des Steinmaterials. Diese Größe kann nämlich unmittelbar als ein Maßstab für die Eignung eines Gesteins zu Straßenbauzwecken betrachtet werden, soweit als dabei die Sprödigkeitseigenschaften in Betracht kommen.

Die „Wertziffer" hat die Dimension $\frac{\text{cmkg}}{\text{cm}^3}$ oder $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ und stimmt darin mit einer auf die Flächeneinheit bezogenen Spannung, also auch mit der Druckfestigkeit, überein. Die Wertziffer ist selbst von der Druckfestigkeit abhängig und außerdem von der Fähigkeit des Stoffes, Formänderungen zu ertragen, ohne zu brechen. Dividiert man die Wertziffer durch die Druckfestigkeit, so erhält man eine absolute Zahl, die als Ausdruck des Formänderungsvermögens des Körpers betrachtet und daher als Maß für die Zähigkeit benutzt werden kann. Der reziproke Wert dieser Zahl, also das Verhältnis der Druckfestigkeit zur Wertziffer kann und soll hier als Maß der Sprödigkeit gelten.

In den vorher genannten Veröffentlichungen findet man eine Zusammenstellung der Ergebnisse sehr zahlreicher, zu praktischen Zwecken vorgenommener Schlagversuche mit Straßenbausteinen. Freilich war dabei die Ermittlung des Sprödigkeitsverhältnisses gewöhnlich nicht der Zweck der Gesteinsprüfung, sondern als Endziel der Untersuchung wurde die Feststellung der „Wertziffer" angesehen. Da aber neben den Schlagversuchen sehr häufig auch noch Druckfestigkeitsproben vorgenommen wurden, kann man in vielen Fällen das Sprödigkeitsverhältnis aus den veröffentlichten Angaben nachträglich noch ausrechnen. Um sofort eine ungefähre Vorstellung von dem Betrage des Sprödigkeitsverhältnisses bei den häufiger verwendeten Straßenbausteinen zu geben, erwähne ich, daß das Verhältnis bei Granit gewöhnlich etwa zwischen 6 und 12 liegt. Für einen besonders zähen Granit sank es auf 2,8 herab. Ich schicke schon hieraus voraus, daß die meisten Gläser, die ich untersucht habe, bedeutend spröder als Granit gewesen sind, daß aber doch ein Glas, von dem Jenaer Glaswerk als Borat-

Flint S 389 bezeichnet, mit einem Sprödigkeitsverhältnisse von nur 4,4 die meisten Granite an Zähigkeit übertroffen hat.

Bei vielen Gesteinsarten, insbesondere bei Granit, Sandstein, Grauwacke usf. macht die Durchführung des Versuchs nach dem besprochenen Plane keinerlei Schwierigkeiten. Namentlich unterschieden sich die Ergebnisse der 6 Einzelversuche, die man in der Regel ausführt, nicht allzuviel voneinander. Es kommt freilich vor, daß ein Würfel etwa schon beim 10., ein anderer erst beim 12. oder auch erst beim 14. Schlage zerstört wird. Bei der für die Ermittelung der Wertziffer angenommenen Berechnungsweise stellen sich dann schon recht erhebliche Unterschiede in den Einzelzahlen heraus. Immerhin bleiben aber diese Einzelzahlen doch noch innerhalb genügend enger Grenzen, um den aus den 6 Versuchen abgeleiteten Durchschnittsbetrag der Wertziffer als einen hinlänglich gesicherten Mittelwert ansehen zu können.

Das gilt aber nicht von allen Steinen und namentlich machen darin, soweit meine bisherigen Erfahrungen reichen, die meisten Basalte eine Ausnahme. Ich muß jedoch ausdrücklich betonen, daß auch Basalte vorkommen, die sich in ihrem Verhalten gegen stoßweise Beanspruchung eng an die vorher genannten Steine anschließen und namentlich auch hinsichtlich der verhältnismäßig guten Übereinstimmung zwischen den Einzelversuchen nicht hinter diesen zurückstehen. Aber bei den meisten Basalten ist die Eigenschaft der Sprödigkeit offenbar ungleichmäßig über die ganze Masse verteilt in solcher Art, daß bei manchen Versuchskörpern neben spröden Stellen, die beim Schlagversuche zum frühzeitigen Auftreten von Spaltrissen führen, weit zähere Massen liegen, die der stoßweisen Beanspruchung für sich genommen einen viel größeren Widerstand entgegensetzen. Daneben kommen zugleich auch Versuchskörper vor, die mit den vorigen aus demselben Gesteinsstücke herausgeschnitten sind, aber spröde Stellen vermissen lassen und daher erst nach einer viel größeren Zahl von Schlägen zerbrechen. In beiden Fällen sind übrigens auch die Bruchformen verschieden. Ein Würfel, in dem keine spröderen

Stellen vorkommen, zerbricht gleichmäßig nach allen vier freien Seitenflächen, unter Pyramidenbildung, ganz ähnlich wie bei einem gewöhnlichen Druckversuche. Im anderen Falle tritt zunächst gewöhnlich nur eine Spaltfläche auf, die ziemlich genau parallel zur Schlagrichtung mitten durch den Würfel hindurchgeht. Stellt man die beiden Bruchstücke nebeneinander, so ergänzen sie sich ohne merklichen Materialverlust wieder zu einem Würfel, der sich gegenüber weiteren Schlägen fast ebenso widerstandsfähig erweist, als wenn er noch zusammenhinge. In solchen Fällen ist man im Zweifel, ob man das Auftreten der ersten Spaltung überhaupt schon als Bruch gelten lassen oder ob man unter Zusammenstellung der Bruchstücke, die man etwa mit einer Gummischnur zusammenbinden kann, den Versuch fortsetzen soll, bis eine vollständige Zerstörung eingetreten ist.

Als Beispiel führe ich hier eine Basaltsorte an, die mit der Laboratoriumsnummer 8225 bezeichnet ist und bei der die 6 Würfel die folgenden Schlaganzahlen bis zum Bruche ergaben: 36,9; 35,5; 20,0; 21,5; 28,5; 12,0. Von diesen Würfeln brachen der 3., 4. und 6. durch vorzeitige Spaltungen und zwar wurde der Versuch mit dem Auftreten der ersten Spaltung als beendigt angesehen. Dagegen wurden der 1., 2. und 5. Würfel gleichmäßig zerstört. In solchen Fällen kann natürlich eine Mittelbildung aus einer beschränkten Zahl von Versuchen nur einen sehr unsicheren Aufschluß über die Sprödigkeitseigenschaften des betreffenden Körpers liefern.

Indessen glaube ich, daß man dem gewählten Verfahren keinen Vorwurf daraus machen darf, daß es bei einzelnen Gesteinsarten zu derartigen Schwierigkeiten führt. Ich bin vielmehr eher geneigt, einen Vorzug darin zu erblicken, daß das Verfahren die offenbar auch tatsächlich innerhalb der betreffenden Gesteinsmassen sehr ungleichförmig verteilten Sprödigkeitseigenschaften durch die stark voneinander abweichenden Ergebnisse der Einzelversuche deutlich hervortreten läßt.

Wenn ich hier von spröden Stellen sprach, die gelegentlich in den Würfeln vorkommen, so lag mir nur daran, die

beobachteten Erscheinungen möglichst einfach zu beschreiben. Ich will also damit keineswegs die naheliegende Annahme zurückweisen, daß die Sprödigkeit an diesen Stellen auf Eigenspannungen beruhen könne, die vom Abkühlungsvorgange bei der Bildung des Gesteins her darin zurückgeblieben sein mögen. Will man sich dieser Annahme anschließen, so wären die beim Schlagversuch vorzeitig auftretenden Spaltungen mit den Spaltflächen in Vergleich zu bringen, die bei den Säulenbasalten in der Natur zu beobachten sind. Für den Zweck der hier durchzuführenden Untersuchung kommt es aber nicht auf den besonderen Grund an, der zu der verschieden großen Widerstandsfähigkeit der einzelnen Würfel gegen Stöße führt, und diese Frage kann daher hier unentschieden gelassen werden.

Bei den Gläsern haben sich nun ebenfalls ähnlich starke Unterschiede wie bei den Basalten zwischen den einzelnen Versuchsergebnissen herausgestellt. Die Mittelwerte sind daher ungenau und können nur als grobe Annäherungen angesehen werden. Wenn man das hier angewendete Verfahren beibehalten will. muß man diese Unsicherheit im Werte des Sprödigkeitsverhältnisses als unvermeidlich mit in den Kauf nehmen.

Das Versuchsmaterial.

Vom Jenaer Glaswerk Schott u. Gen. wurden mir freundlichst von 7 verschiedenen Glassorten je 8 Würfel zur Verfügung gestellt. Ich benütze diese Gelegenheit, meinen Dank für dieses Entgegenkommen hier auch öffentlich auszusprechen.

Die Würfel hatten ursprünglich etwa 2.2 cm Kantenlänge. Sie waren zum Teil nicht ganz regelmäßig in der Form und die Seitenflächen waren nicht genügend eben. Im Laboratorium wurden sie daher zuerst durch Schleifen mit Karborundum auf genauere Form gebracht, wobei so viel Material abgeschliffen wurde. daß die Kantenlänge nachher ungefähr 2,0 cm betrug.

Alle Würfel wurden dann ausgemessen und gewogen und daraus das spezifische Gewicht festgestellt. Dieses diente hauptsächlich dazu, die einzelnen Glassorten zu kennzeichnen und

Verwechselungen zwischen den Versuchskörpern zu verhüten. Ich führe zunächst die Bezeichnungen an, unter denen mir die 7 Glassorten aus Jena geliefert wurden und die dafür gefundenen spezifischen Gewichte γ:

1. Flint O 118 . . . . $\gamma = 3{,}51$
2. Schweres Flint S 386 . . . $\gamma = 5{,}87$
3. Borat-Flint S 389 . . . . $\gamma = 2{,}83$
4. Normalglas . . . . $\gamma = 2{,}57$
5. Geräteglas . . . . $\gamma = 2{,}47$
6. Glas 59^{III} . . . . $\gamma = 2{,}38$
7. Zylinderglas . . . . $\gamma = 2{,}29$

Von den 8 Würfeln jeder Sorte wurden 3 zur Ermittelung der Druckfestigkeit, die übrigen zu den Schlagversuchen verwendet. Von der ersten Sorte O 118 war jedoch ein Würfel bei den Vorbereitungen verunglückt und von der fünften Sorte, Geräteglas, sprang ein Würfel beim Schlagversuche sofort nach dem ersten Schlage, so daß kein Zweifel darüber bestehen konnte, daß auch dieser Würfel bei den Vorbereitungen zum Versuche schon eine Beschädigung erlitten haben mußte, die nur bei Beginn des Schlagversuchs nicht bemerkt worden war. Deshalb muß auch dieser Würfel bei der Verwertung der Versuchsergebnisse außer Betracht bleiben. Man verfügt daher bei der ersten und fünften Glassorte über je 4, bei den übrigen Sorten über je 5 Ergebnisse von Schlagversuchen.

Die Druckfestigkeit.

In dem Buche von H. Hovestadt, Jenaer Glas, Jena 1900, findet man eine Zusammenstellung von Druckfestigkeitswerten für eine Reihe von Gläsern, mit denen sich jedoch die von mir untersuchten nicht unmittelbar vergleichen lassen. Ich hielt es daher für notwendig, die Druckfestigkeit selbst zu bestimmen, um so mehr als mir die dazu erforderlichen Einrichtungen von vornherein zur Verfügung standen. Nur die Druckplatten, zwischen denen die Würfel zerdrückt werden sollten, mußte ich besonders anfertigen lassen. Sie bestehen

aus gehärtetem Werkzeugstahl; um eine gut zentrische Druckübertragung zu sichern, ist ein aus einer Gustahlkugel von 2 cm Durchmesser gebildetes Gelenk[1]) zwischen die eine Druckplatte und die Platte der hydraulischen Presse eingeschaltet.

Die von mir gefundenen Druckfestigkeitswerte sind durchschnittlich etwas niedriger als die von Hovestadt angeführten, wenn auch ein unmittelbarer Vergleich, wie schon bemerkt, nicht möglich ist. Vermutlich wird der Unterschied dadurch bedingt, daß bei den Versuchen von Winkelmann u. Schott Glassäulchen, die annähernd Würfel von 0,6 cm darstellten, zerdrückt wurden, während ich Würfel von 2 cm Kantenlänge prüfte. Wenn man annimmt, daß in den Gläsern trotz sorgfältiger Abkühlung nach der Herstellung noch Eigenspannungen zurückbleiben, die sich bei größeren Stücken natürlich viel mehr bemerklich machen können als bei kleineren, braucht man sich nach einem weiteren Grunde für die etwas niedrigeren Druckfestigkeitswerte bei meinen Versuchen nicht umzusehen.

Die Würfel zerfallen beim Bruch in zahllose kleine Splitter; bei Hovestadt ist angegeben, daß sie in Staub zerfallen. Es schien mir der Mühe wert zu sein, den Grad der Zerkleinerung auch noch zahlenmäßig festzustellen. Dazu benutzte ich die feinen Siebe, mit denen man bei der Zementprüfung den Grad der Mahlfeinheit des Zementpulvers feststellt. Das feinere der beiden Siebe, die dazu dienen, hat auf 1 qcm 4900 Maschen, das gröbere 900 Maschen. Ich ließ nun von je einem Würfel der 7 Glassorten nach der Druckfestigkeitsprobe die Bruchstücke über die beiden Siebe gehen und sie dadurch in 3 Teile zerlegen, von denen der feinste Teil durch das 4900-Sieb gegangen war, der mittlere auf diesem zwar liegen blieb, aber durch das 900-Sieb gefallen war, während der gröbste Teil auf dem 900-Sieb liegen geblieben ist. Ich gebe zunächst die Zusammenstellung der Siebergebnisse, ausgedrückt in Hundertteilen des Gesamtgewichtes:

---

[1]) Hierzu wurden mir von der Schweinfurter Gußstahlkugelfabrik Fichtel & Sachs einige Kugeln, die sich zu dem Zweck sehr gut eigneten, schenkweise überlassen, wofür ich hier meinen Dank ausspreche.

Nummer	fein	mittel	grob
1	16,6	23,7	59,7
2	11,6	17.3	71,1
3	6,1	12,3	81,6
4	15,8	20,9	63,3
5	22,2	24,6	53,2
6	22,3	24,6	53,1
7	21,7	23,9	54,4

Die Ergebnisse der Druckfestigkeitsversuche sind in der folgenden Zusammenstellung enthalten, in die ich auch alle Einzelwerte aufgenommen habe, um die recht erheblichen Unterschiede, die darin vorkommen, erkennen zu lassen.

Nummer	Bezeichnung	Einzelwerte			Durchschnitt in
		1.	2.	3.	kg/cm²
1	O 118	5720	6900	6200	6273
2	S 386	4740	4090	4580	4470
3	S 389	5800	6860	6010	6223
4	Normalglas	8090	8500	9720	8770
5	Geräteglas	8250	10600	7880	8910
6	59III	7300	10120	10720	9380
7	Zylinderglas	7500	9140	11550	9397

Auffällig erscheint hier der Zusammenhang zwischen der Druckfestigkeit und dem spezifischen Gewichte; je leichter das Glas bei diesen 7 Sorten war, desto größer war seine Druckfestigkeit. Wie ein Vergleich mit früheren Versuchen erkennen läßt, handelt es sich aber hierbei nur um ein mehr zufälliges Zusammentreffen.

Die Schlagversuche.

Die Versuche wurden in der schon vorher beschriebenen Weise, also ebenso wie bei den Steinprüfungen ausgeführt. Abgesehen von dem Abbrechen kleinerer Splitter an den Kanten und Ecken, das auf zufällige Umstände von rein örtlicher Bedeutung zurückzuführen ist und mit der Widerstandsfähigkeit des ganzen Würfels gar nichts zu tun hat, besteht die erste erkennbare Beschädigung, die sich im weiteren Verlaufe des Versuchs vergrößert und schließlich zum Bruche führt, in

einem Risse, der sich gewöhnlich auf der unteren Druckfläche ausbildet, mit der der Würfel auf dem Amboß des Schlagwerks aufsitzt. In den meisten Fällen geht der Riß ungefähr in der Richtung einer Diagonalen des Basisquadrates, so daß er entweder mit der Diagonale zusammenfällt oder parallel dazu geht. Der Riß erstreckt sich zunächst nicht über die ganze Grundfläche des Würfels, sondern nur über den mittleren Teil, ohne den Umfang zu erreichen. In das Innere des Würfels erstreckt er sich zunächst etwa 1 mm oder etwas weniger oder mehr. Bei diesen Angaben ist zu beachten, daß die Seitenflächen des Würfels vom Abschleifen her rauh waren, so daß man feinere Risse, die sich etwa vorher schon gebildet haben könnten, nicht wahrzunehmen vermochte.

Nach der Bildung des ersten Risses hielt der Würfel oft noch mehrere Schläge aus, bis sich der Riß merklich weiter ausgedehnt hatte. Der Riß dehnte sich meist in ungefähr geradliniger Fortsetzung bis zum Umfange der Würfelgrundfläche und zugleich auch weiter ins Würfelinnere hin aus, bis er endlich die obere Würfelfläche erreichte, womit der Würfel in zwei oder auch bei einer zuletzt eintretenden Verzweigung in mehrere Teile zerfiel. Hiermit wurde der Versuch abgeschlossen.

Übrigens war die Rissebildung nicht immer von der vorher beschriebenen Art; es traten auch öfters Abweichungen davon ein. So kam es vor, daß der Würfel durch einen Schlag plötzlich vollständig zertrümmert wurde, ohne daß sich vorher ein Riß gezeigt hätte. Oder der Riß war nicht parallel zur Diagonale, sondern ungefähr parallel zu einer Würfelkante; oder er beschränkte sich anfänglich nicht auf den mittleren Teil der Grundfläche, sondern lief von Anfang an durch die ganze Grundfläche hindurch, so daß sie durch ihn in zwei Teile getrennt wurde. Es kam auch vor, daß gleichzeitig zwei Risse auf der unteren Grundfläche entstanden. Einigemal trat auch der erste Riß nicht auf der unteren, sondern an der oberen Druckfläche des Würfels auf. Aber alle diese Abweichungen kamen gegenüber dem vorher beschriebenen gewöhnlichen Ver-

halten des Würfels nur seltener vor, so daß sie wohl auf zufällige Unregelmäßigkeiten zurückzuführen sind.

Der Würfel wurde während des Versuches nach jedem Schlage genau angesehen, wobei eine etwa bemerkenswert erscheinende Änderung in seinem Aussehen aufgeschrieben wurde; also anfänglich auch z. B. das Abspringen kleinerer Splitter an den Kanten, während davon bei den späteren Versuchen meist abgesehen wurde, nachdem man erkannt hatte, daß es sich hierbei nur um eine ganz gleichgültige Nebenerscheinung handelte. In den folgenden Zusammenstellungen verzichte ich auf eine Wiedergabe aller Einzelheiten dieser Aufschreibungen. Dagegen soll jeder einzelne Würfel aufgeführt und für ihn angegeben werden, nach welchem Schlage der erste Riß beobachtet wurde und der wievielte Schlag zum Zerfall in mehrere Teile führte.

1. Flint O 118.

Würfel-Nummer	Schlaganzahl bis zum	
	ersten Risse	Bruche
5	13	24
6	8	19
7	12	23
8	15	15
Mittel	12	20,25

2. Schweres Flint S 386.

Würfel-Nummer	Schlaganzahl bis zum	
	ersten Risse	Bruche
4	8	8
5	6	14
6	5	7
7	2	7
8	1	11
Mittel	4,4	9,4

3. Borat-Flint S 389.

Würfel-Nummer	Schlaganzahl bis zum	
	ersten Risse	Bruche
4	26	37
5	28	43
6	14	25
7	24	52
8	22	28
Mittel	22,8	37,0

4. Normalglas.

Würfel-Nummer	Schlaganzahl bis zum	
	ersten Risse	Bruche
4	4	13
5	8	18
6	5	8
7	14	31
8	7	8
Mittel	7,6	15,6

5. Geräteglas.

Würfel-Nummer	Schlaganzahl bis zum	
	ersten Risse	Bruche
4	33	34
5	*)	*)
6	32	32
7	27	30
8	14	19
Mittel	26,5	28,75

*) Nach dem ersten Schlage zerstört und daher als verunglückt zu betrachten, wie vorher bereits angegeben war.

6. Glas 59^{III}.

Würfel-Nummer	Schlaganzahl bis zum ersten Risse	Schlaganzahl bis zum Bruche
4	9	13
5	7	21
6	15	23
7	8	11
8	7	10
Mittel	9,2	15,6

7. Zylinderglas.

Würfel-Nummer	Schlaganzahl bis zum ersten Risse	Schlaganzahl bis zum Bruche
4	9	22
5	3	6
6	22	30
7	12	15
8	18	25
Mittel	12,8	19,6

Bei den großen Unterschieden zwischen den Einzelzahlen, die nach den früheren Darlegungen nicht dem Prüfungsverfahren zur Last zu legen sind, sondern von Unterschieden im Verhalten der einzelnen Stücke herrühren, ist jeder Versuch einer genaueren Bestimmung der Wertziffer dieser Glassorten als aussichtslos zu betrachten; man muß sich mit einer groben Annäherung begnügen, wie sie aus den Durchschnittswerten dieser Versuchsreihen gefunden werden kann. Man könnte zwar durch eine Vermehrung der Zahl der Einzelversuche einen von Zufälligkeiten freieren und daher wahrscheinlicheren Wert erhalten; für einen ersten Überblick dürfen aber die hier gefundenen Zahlen immerhin schon als ausreichend angesehen werden.

Anstatt für die Schlaganzahl jedes Einzelversuchs die Arbeitsleistung zu berechnen und daraus den Mittelwert zu bilden, wie ich es sonst vorziehen zu müssen glaubte, ist es bei so weit auseinandergehenden Zahlen, um den Einfluß der vom Mittel am meisten abweichenden Einzelwerte nicht zu sehr ins Gewicht fallen zu lassen, wie mir jetzt scheinen will, besser, zuerst den Mittelwert der Schlaganzahl festzustellen und die zu diesem Mittelwert gehörige Arbeitsleistung als Wertziffer anzusehen. Dabei soll auf die Zahl der bis zum Eintreten des ersten Risses erforderlichen Schläge nicht weiter geachtet, sondern nur die Schlaganzahl bis zum Bruche als maßgebend betrachtet werden. Wenn man in dieser Weise verfährt, erhält man für die 7 Glassorten die nachstehenden Wertziffern:

Sorte	1	2	3	4	5	6	7
Schlagzahl	20,25	9,4	37,0	15,6	28,75	15,6	19,6
Wertziffer in kg/cm²	430	98	1406	259	855	259	404

Die Sprödigkeitszahlen.

Der Vergleich der soeben ermittelten Wertziffern mit den früher angegebenen Druckfestigkeitszahlen liefert sofort die Verhältniszahlen, die als Maß für die Sprödigkeit benutzt werden können. Man erhält so die in der folgenden Zusammenstellung angegebenen Werte:

Nummer	Bezeichnung	Druckfestigkeit kg/cm²	Wertziffer kg/cm²	Sprödigkeitsverhältniszahl
1	Flint O 118	6273	430	14,6
2	Schweres Flint S 386	4470	98	45,6
3	Borat-Flint S 389	6223	1406	4,4
4	Normalglas	8770	259	33,9
5	Geräteglas	8910	855	10,4
6	59^{III}	9380	259	36,2
7	Zylinderglas	9397	404	23,3

Die Dezimalstellen haben bei den Sprödigkeitszahlen natürlich keine Bedeutung, da schon die Einerstellen als ganz unsicher betrachtet werden müssen.

Von den 7 Glassorten sind demnach drei als besonders spröd und eine, nämlich das Borat-Flint S 389, als verhältnismäßig sehr wenig spröd erkannt worden, während die drei übrigen Mittelstellungen einnehmen.

München, im Dezember 1911.

Die Cesàroschen Kurven.

Von **E. Salkowski.**

Vorgelegt von A. Voss in der Sitzung am 2. Dezember 1911.

Wenn das Hauptdreikant einer Raumkurve K sich längs der Kurve bewegt, so gibt es immer gerade Linien, und zwar ∞^1 euklidische und zwei isotrope Geraden, die mit dem Dreikant fest verbunden sind und von denen jede bei der Bewegung die Tangentenfläche einer Raumkurve beschreibt. Die euklidischen Geraden, die diese Eigenschaft besitzen, sind die Parallelen zur Tangente der Kurve, die in der rektifizierenden Ebene liegen; sie umhüllen die zu K parallelen geodätischen Linien ihrer gemeinsamen rektifizierenden Fläche. Die Minimalgeraden, die bei der Bewegung Minimalkurven einhüllen, liegen in der Normalebene der Kurve K und schneiden sich in der Spitze des Dreikants, ihre Hüllkurven sind die von E. Study so genannten „Begleiter" der Kurve K.

Nur für besondere Klassen von Raumkurven gibt es außer diesen Geraden noch andere, die mit dem Hauptdreikant fest verbunden sind und bei seiner Bewegung Raumkurven einhüllen, und Cesàro, dem wir diese Problemstellung verdanken und nach dem daher diese kinematische Bedingung als Cesàrosche Bedingung bezeichnet sei, hat gezeigt, daß sie zu denjenigen Kurven gehören, für die zwischen der Krümmung $\varkappa = \frac{1}{\varrho}$ und der Torsion $\tau = \frac{1}{r}$ eine quadratische Gleichung von der Form

$$(1) \qquad A\varkappa^2 + B\tau^2 + C\varkappa\tau = P\varkappa + Q\tau$$

besteht.

In der wenig umfangreichen Literatur des Gegenstandes, die kürzlich von O. Joachimi[1]) übersichtlich zusammengestellt ist, findet sich indessen nicht mit genügender Klarheit betont, daß die Gleichung (1) für die Kurven, die die Cesàrosche Bedingung erfüllen, keineswegs charakteristich ist, und man hat daher unterschiedslos diese wie auch die sie einschließende Klasse der Kurven (1) als Cesàrosche Kurven bezeichnet. Um der aus der naheliegenden Verwechslung schon tatsächlich entstandenen Verwirrung zu entgehen, seien die Kurven (1) Cesàrosche Kurven schlechthin, die geometrisch definierte Kurvenklasse eigentliche Cesàrosche Kurven genannt. Diese Bezeichnungsweise rechtfertigt sich wohl durch die analoge im besonderem Falle der Bertrandschen Kurven, zu denen man alle Kurven zu rechnen pflegt, bei denen zwischen Krümmung und Torsion eine lineare Gleichung besteht, obwohl die geometrische Definition den Fall

$$A(\varkappa \pm i\tau) = 1$$

nicht umfaßt. Wenn man für diese Kurven, die geodätischen Linien auf den Serretschen Biegungsregelflächen der Kugel, die geometrische Konstruktion ausführt, die im allgemeinen Falle auf die zugeordnete Bertrandsche Kurve führt, so erhält man keine Kurve derselben Art, sondern eine Minimalkurve, und zwar diejenige, auf der die Mittelpunkte aller Kugeln liegen, als deren (partielle) Hüllfläche die Serretsche Fläche aufgefaßt werden kann.

Für jede mehr als oberflächliche Einsicht ist erforderlich, die Bedingung der eigentlichen Cesàroschen Kurven zu präzisieren, d. h. alle Kurven (1), die der Cesàroschen Bedingung nicht genügen, auszusondern. Sodann wird es darauf ankommen, eine rationelle Klassifikation der eigentlichen Cesàroschen Kurven zu gewinnen, d. h. also die verschiedenen Typen wohl

[1]) O. Joachimi, Über Kurven, bei denen die beiden Krümmungen durch eine quadratische Beziehung verknüpft sind. Diss. Münster 1911. In der Literaturübersicht fehlen die Arbeiten von N. Hatzidakis, Ann. der Akademie Athen, 1906 und Andrade, C. R. 122, 1110—1113, 1896.

charakterisierter Kurvenfamilien aufzustellen, die in ihren Bereich fallen. Eine erschöpfende Behandlung dieser beiden Aufgaben, die geleistet werden muß, ehe man an Spezialstudien gehen kann, liegt bisher noch nicht vor, und die Literatur enthält neben bemerkenswerten Einzelergebnissen doch auch manche unzutreffenden Behauptungen.

I. Analytische Darstellung.

Man könnte zunächst versuchen, die Diskussion an die endlichen Gleichungen der Kurven (1) anzuknüpfen, die sich durch die Methode der parallelen Zuordnung[1]) durch Quadraturen darstellen lassen.

Sind X, Y, Z die Koordinaten, K, T, S Krümmung, Torsion und Bogenlänge einer beliebigen Raumkurve, so ergeben sich die Gleichungen einer ihr durch parallele Tangenten zugeordneten Cesàroschen Kurve (1) in der Form:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= \int \frac{AK^2 + BT^2 + CKT}{PK + QT}\, dX \\ y &= \int \frac{AK^2 + BT^2 + CKT}{PK + QT}\, dY \\ z &= \int \frac{AK^2 + BT^2 + CKT}{PK + QT}\, dZ. \end{aligned}$$

Diese Darstellung versagt nur für $P = Q = 0$; dann aber zerfällt die Cesàrosche Kurve in ein Paar allgemeiner Schraubenlinien, deren endliche Gleichungen wohlbekannt sind.

Die Gleichungen (2) lassen eine bemerkenswerte Umformung zu, wenn man die Identität

$$(3)\qquad \frac{AK^2 + BT^2 + CKT}{PK + QT} = \alpha K + \beta T + \frac{\gamma KT}{PK + QT}$$

benutzt, in der

$$\alpha = \frac{A}{P} \qquad \beta = \frac{B}{Q} \qquad \gamma = C - \frac{AQ}{P} - \frac{BP}{Q}$$

[1]) Vgl. Sitzungsber. der Berliner Math. Ges. 4, 64–69, 1905.

zu setzen ist. Die Cesàrosche Kurve zerfällt dann und nur dann, wenn

$$AQ^2 + BP^2 - CPQ = 0$$

ist, sie degeneriert dabei in eine Bertrandsche Kurve

$$\frac{A}{P}\varkappa + \frac{B}{Q}\tau = 1$$

und eine allgemeine Schraubenlinie

$$\frac{\tau}{\varkappa} = -\frac{P}{Q}.$$

Die Gleichungen (2) stellen dann nur den ersten Bestandteil dar, während die Schraubenlinie eine gesonderte Behandlung verlangt.

Abgesehen von diesem Ausnahmefall, in dem $\gamma = 0$ wird, kann man die Cesàrosche Kurve (1) stets in der Form darstellen:

$$\begin{aligned} x &= \lambda x_1 + \mu x_2 \\ y &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ z &= \lambda z_1 + \mu z_2 \\ &(\lambda + \mu = 1), \end{aligned} \tag{4}$$

wobei die Gleichungen

$$x_1 = \frac{1}{\lambda}\int (\alpha K + \beta T)\, dx \tag{5}$$

. . . .

eine Bertrandsche Kurve, die Gleichungen

$$x_2 = \frac{1}{\mu}\int \frac{\gamma KT}{PK + QT}\, dx \tag{6}$$

. . . .

eine Kurve der Klasse

$$a\varrho + br = 1$$

explizit ergeben. Man erhält so den Satz:

Bezieht man eine Bertrandsche Kurve und eine Kurve, deren Krümmungsradius eine lineare ganze Funktion des Torsionsradius ist, durch parallele Tangenten aufeinander, so liegen alle Punkte, die die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte in einem beliebigen konstanten Verhältnis teilen, auf einer allgemeinen Cesàroschen Kurve.

Von dieser Darstellung sind diejenigen Kurven ausgeschlossen, für die entweder P oder Q verschwindet; in diesen Fällen ist eine Bertrandsche Kurve mit einer Kurve

$$\tau = \varkappa^2$$

bzw.

$$\varkappa = \tau^2$$

in Beziehung zu setzen. Das hier angewandte Verfahren, das übrigens noch verschiedentlich variiert werden kann, ist eine Verallgemeinerung der bekannten Methode, aus einer Kurve konstanter Krümmung und einer parallelen Kurve konstanter Torsion alle zu ihnen parallelen Bertrandschen Kurven zu konstruieren[1]).

Durch Spezialisierung der Raumkurve (X, Y, Z) erhält man beliebig viele Beispiele von Cesàroschen Kurven; eins von ihnen, das analytisch leicht zu verfolgen und auch geometrisch von Interesse ist, bieten diejenigen Kurven (1), die auf Böschungsflächen (Tangentenflächen von allgemeinen Schraubenlinien) geodätische Linien sind. Die Untersuchung gestaltet sich dabei ganz analog wie für den Fall der Bertrandschen Kurven, den Verfasser bei früherer Gelegenheit behandelt hat[2]).

So geeignet sich dies Verfahren auch erweist, wenn es sich um Spezialuntersuchungen handelt, so wenig erscheint es brauchbar, die allgemeine Diskussion zu fördern, die jenen vorangehen muß. Es sei daher im folgenden das kinematische Problem direkt behandelt.

---

[1]) Sitzungsber. der Berliner Math. Ges. 4, 64—69.

[2]) Math. Annalen 67, 560—578.

II. Bestimmung und Klassifikation der eigentlichen Cesàroschen Kurven.

Es sei (x, y, z) ein Punkt einer Raumkurve, a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' der Reihe nach die Richtungscosinus der Tangente, Binormale und Hauptnormale, $\varkappa$, τ, s Krümmung, Torsion und Bogenlänge. Dann sind die Gleichungen einer Geraden, die mit dem Hauptdreikant fest verbunden ist:

$$(1)\qquad \begin{array}{l} x_1 = x + (pa + qa' + ra'') + \mu(\alpha a + \beta a' + \gamma a'') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

wobei p, q, r beliebige Konstanten und α, β, γ die konstanten Richtungscosinus der Geraden in Bezug auf die Kanten des Dreikants bedeuten.

Die Gerade beschreibt die Tangentenfläche einer Raumkurve, wenn

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a + (p\varkappa + q\tau)a'' - r(a\varkappa + a'\tau), & \ldots, & \ldots \\ \alpha a + \beta a' + \gamma a'', & \ldots, & \ldots \\ (\alpha\varkappa + \beta\tau)a'' - \gamma(a\varkappa + a'\tau), & \ldots, & \ldots \end{vmatrix} = 0$$

wird, wenn also eine Gleichung von der Form

$$(3)\qquad A\varkappa^2 + B\tau^2 + C\varkappa\tau = P\varkappa + Q\tau$$

besteht, eine Gleichung, in der

$$(4)\qquad \begin{aligned} \sigma A &= \beta(p\gamma - r\alpha) \\ \sigma B &= \alpha(\beta r - q\gamma) \\ \sigma C &= -\alpha(p\gamma - r\alpha) - \beta(\beta r - q\gamma) \\ \sigma P &= -\alpha\beta \\ \sigma Q &= -(\beta^2 + \gamma^2) \end{aligned}$$

zu setzen ist. Dazu kommt noch die Gleichung

$$(5)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

oder

$$(5a)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

je nachdem die betrachtete Gerade eine euklidische oder eine Minimalgerade ist.

Die Gleichung (3) ist identisch erfüllt, wenn

$$A = B = C = P = Q = 0 \tag{6}$$

ist. Dann besteht zwischen $\varkappa$ und τ keine Relation, und wir erhalten diejenigen Geraden, die, mit dem Dreikant einer beliebigen Raumkurve verknüpft, Tangentenflächen beschreiben. Eine einfache Diskussion des Gleichungssystems (4), (5), (6), die hier übergangen sein möge, ergibt, daß es nur in zwei Fällen bestehen kann:

$$(7) \quad \begin{array}{llll} 1.\ \alpha = 0 & \beta = \pm i\gamma, & p = 0 & q = \pm ir \\ 2.\ \alpha = 1 & \beta = \gamma = 0 & r = 0. & \end{array}$$

Im ersten Falle handelt es sich um die Minimalgeraden, die die Studyschen „Begleiter" einhüllen, im zweiten Falle haben wir die Parallelen zur Tangente, die in der rektifizierenden Ebene liegen.

Wir wenden uns jetzt zu den Cesàroschen Kurven und fragen, wann das System der Gleichungen (4) und (5) bzw. (4) und (5a) auflösbar ist, vorausgesetzt, daß nicht alle Koeffizienten von (3) verschwinden, Dabei seien zuerst zwei Sonderfälle erledigt, deren Eigenart bei der Diskussion des allgemeinen Falles leicht übersehen werden kann.

1. $$A = 0.$$

Dies kann nur eintreten, wenn entweder $\beta = 0$ oder $p\gamma - r\alpha = 0$ vorausgesetzt sind. Ist $\beta = 0$, so fordert die Cesàrosche Bedingung, die mit dem Bestehen der Gleichungen (4) äquivalent ist, daß gleichzeitig P verschwindet. Dann aber zerfällt die Cesàrosche Kurve in eine ebene

$$(C_1) \quad \tau = 0$$

und eine Bertrandsche Kurve

$$(C_2) \quad C\varkappa + B\tau = Q.$$

Die Auflösung der Gleichungen ergibt ∞^1 Geraden, von denen zwei Minimalgeraden sind. Sie bilden die eine Regelschar eines Paraboloids, deren Geraden parallel zur Schmiegungsebene der Bertrandschen Kurve C_2 sind. Von der Existenz dieser ∞^1 Geraden kann man sich — falls die Betrachtung auf das reelle Gebiet beschränkt wird — leicht eine geometrische Vorstellung verschaffen. Die Kurve C_2 ist die Striktionslinie einer Biegungsfläche eines Rotationshyperboloids. Denkt man sich das Rotationshyperboloid auf seiner Biegungsfläche abrollen, so fällt das Hauptdreikant der Kurve C_2 mit dem jeweiligen Hauptdreikant des Kehlkreises zusammen. In Bezug auf dieses aber haben die Tangenten an die Parallelkreise der Fläche längs der Erzeugenden durch den Scheitel des Dreikants eine invariante Lage; diese sind es daher, die beim Abrollen des Hyperboloids auf seiner Biegungsfläche abwickelbare Flächen beschreiben. Die Gratlinien dieser Flächen sind also die Kurven, in die die Parallelkreise eines Hyperboloids bei der Biegung der Fläche übergehen[1]).

Eine Bemerkung fordert die ebene Kurve C_1. Es ist geometrisch evident, daß für eine ebene Kurve jede der ∞^3 zu ihrer Ebene parallelen Geraden eine abwickelbare Fläche beschreibt, während hier zunächst nur ∞^1 Geraden erhalten werden. Da aber $\tau = 0$ als Faktor in ∞^2 Gleichungen der vorgegebenen Form auftreten kann (B, C, Q können willkürlich gewählt werden), d. h. geometrisch die Kurve als der eine Zweig von ∞^2 solchen ausgearteten Cesàroschen Kurven angesehen werden kann, so ergeben sich schließlich doch alle derartigen Geraden.

Verschwindet A infolge der Relation

$$p\gamma - r\alpha = 0,$$

so folgt aus dem sich wesentlich vereinfachenden Gleichungssystem (4) nach leichter Rechnung

[1]) Diese geometrische Bedeutung scheint bisher noch nicht bemerkt zu sein. Die Existenz dieser paraboloidischen Regelschar ebenso wie die der zweiten zum komplementären Hyperboloid in derselben Beziehung stehenden Schar, die an dieser Stelle nicht hervortreten kann, ist schon von Cesàro erkannt.

$$(8)\qquad \begin{aligned} \sigma &= \frac{C}{PB - QC} \\ \alpha &= \sqrt{\frac{PB}{PB - QC}} \\ \beta &= -\frac{C}{B}\alpha \\ \gamma &= \pm\sqrt{\frac{-C(PC + QB)}{B(PB - QC)}}. \end{aligned}$$

Dabei kann das Vorzeichen von α willkürlich festgelegt werden, da dies nur auf eine Orientirung der Geraden hinauskommt. Es existieren also zwei (reelle oder komplexe) euklidische Geraden, die der Cesàroschen Bedingung genügen, da man nach Bestimmung von σ, α, β, γ die Koordinaten p und q eindeutig als Funktionen von r finden kann.

Die Geraden sind dann und nur dann reell, wenn die Koeffizienten der Gleichung (3) so beschaffen sind, daß α und γ den Bedingungen

$$0 < \alpha^2 < 1, \qquad 0 < \gamma^2 < 1$$

genügen. Es bietet kein Interesse, die ohne Schwierigkeiten angebbare explizite Form dieser Ungleichungen hinzuschreiben.

Die beiden Geraden könnten nur dann zusammenfallen, wenn $\gamma = 0$, also

$$(9)\qquad PC + QB = 0$$

wäre. Soll die Cesàrosche Bedingung erfüllt sein, so müßte notwendig auch r verschwinden, und hieraus würde

$$B = C = 0$$

folgen. Ist dies nicht der Fall, besteht dagegen die Gleichung (9), so werden die Cesàroschen Geraden illusorisch. Formt man durch (9) die Gleichung (3) so um, daß nur noch die beiden unabhängigen Konstanten auftreten, so ist das Ergebnis folgendermaßen auszusprechen:

Die Kurven, die eine natürliche Gleichung von der Form

$$(\mathrm{I}) \qquad (P\tau - Q\varkappa)\tau = P(P\varkappa + Q\tau)$$

besitzen, gehören nicht zu den eigentlichen Cesàroschen Kurven.

Die Rechnung, die zu den Gleichungen (8) führte, ist nur dann gültig, wenn der in σ, α und γ auftretende Nenner nicht verschwindet. Ist dagegen

$$(10) \qquad PB - QC = 0,$$

die natürliche Gleichung der Kurve also

$$(B\tau - Q)(P\varkappa + Q\tau) = 0,$$

so existieren Minimalgeraden, die eine Minimalkurve einhüllen. Die Cesàrosche Kurve, die in eine allgemeine Schraubenlinie und eine Kurve konstanter Torsion zerfällt, ist daher zu den eigentlichen zu rechnen. Sowohl die Schraubenlinien als auch die Kurven konstanter Torsion für sich sind mit ∞^1 derartigen Minimallinien invariant verbunden. Letztere schneiden alle die Binormale der Kurve und erfüllen eine leicht explizit angebbare Fläche, deren spezielles Studium hier nicht beabsichtigt ist.

Bei der ganzen Untersuchung war vorausgesetzt, daß B und C von Null verschieden sind. Nun kann C nur dann verschwinden, wenn entweder β oder $(\beta r - \gamma q)$ gleich Null ist, und die Cesàrosche Bedingung erfordert dann das gleichzeitige Verschwinden von P bzw. B. In derselben Weise ergibt sich, daß die Bedingungen (4) für $B = 0$ nur dann gleichzeitig erfüllt sind, wenn $C = 0$ bzw. $P = 0$ ist. Alle die Fälle, in denen der Cesàroschen Bedingung genügt wird, führen auf zerfallende Kurven.

Für die Kurven

$$(\mathrm{II}) \qquad B\tau^2 = P\varkappa + Q\tau \qquad (B,\ P \neq 0)$$

und

$$(\mathrm{III}) \qquad C\varkappa\tau = P\varkappa + Q\tau \qquad (C,\ P \neq 0)$$

ist die Cesàrosche Bedingung nicht erfüllt.

2. Ist

$$B = 0,$$

so ist entweder $\alpha = 0$ oder $\beta r - \gamma q = 0$.

Im ersten Falle ist die Cesàrosche Bedingung erfüllt, wenn auch $P = 0$ ist. Wir haben es dann mit den Kurven

$$A\varkappa + C\tau = Q\frac{\tau}{\varkappa} \tag{11}$$

zu tun bzw. mit der zerfallenden Kurve

$$\varkappa(A\varkappa + C\tau) = 0, \tag{12}$$

die kein Interesse darbietet. Für die Kurven (11) existieren dann ∞^1 euklidische Geraden, die zur Normalebene parallel sind und abwickelbare Flächen einhüllen. Auf diese in mancher Hinsicht interessante Kurvenklasse haben Cesàro und Andrade schon gelegentlich hingewiesen.

Wenn dagegen

$$\beta r - \gamma q = 0$$

ist, so erhält man Cesàrosche Minimalgeraden, sobald die Bedingung

$$AQ - PC = 0$$

erfüllt ist, d. h. wenn die Kurvengleichung die Gestalt

$$(C\varkappa - Q)(P\varkappa + Q\tau) = 0$$

besitzt. Die Kurve zerfällt dann in eine allgemeine Schraubenlinie und eine Kurve konstanter Krümmung. Ebenso wie die Schraubenlinien und die Kurven konstanter Torsion sind also auch die Kurven konstanter Krümmung mit ∞^1 Minimalgeraden verbunden, die bei der Bewegung Minimalkurven umhüllen. Alle diese Geraden schneiden die Tangente der Kurve und bilden eine Fläche, deren Eigenschaften der Untersuchung leicht zugänglich sind.

Ist

$$PC - QA \neq 0,$$

so findet man

$$(13)\qquad \begin{aligned} \sigma &= \frac{A}{PC - AQ} \\ \alpha &= \sqrt{\frac{PC}{PC - AQ}} \\ \beta &= -\frac{A}{C}\,\alpha \\ \gamma &= \pm\sqrt{\frac{-A(PA + QC)}{PC - AQ}}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bestimmen immer zwei (reelle oder komplexe) Cesàrosche Geraden, wenn gleichzeitig $A \neq 0$, $C \neq 0$ und $PA + QC \neq 0$. Der Fall $A = 0$ ist schon vorher diskutiert worden. Für $A \neq 0$, $C = 0$ können die Cesàroschen Bedingungen (4) nur erfüllt sein, wenn auch $P = 0$. Daraus ergibt sich:

Die Kurven der Klasse

$$(IV)\qquad A\varkappa^2 = P\varkappa + Q\tau \qquad (A, P, Q \neq 0)$$

sind keine eigentlichen Cesàroschen Kurven.

Ist endlich

$$(14)\qquad PA + QC = 0,$$

so folgt aus (13) $\gamma = 0$. Dies fordert aber wieder $r = 0$, und die Gleichungen (4) können nur erfüllt werden, wenn $A = C = 0$ ist.

Die Kurven

$$(V)\qquad \varkappa(Q\varkappa - P\tau) = Q(P\varkappa + Q\tau)$$

gehören nicht zu den eigentlich Cesàroschen Raumkurven.

3. Es bleibt nun noch der allgemeine Fall zu diskutieren, in dem $A \neq 0$ und $B \neq 0$. Dann ist sicher auch $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$; damit die Gleichungen (4) bestehen können, muß also $P \neq 0$ sein: d. h.

Die Kurvenklasse

$$\text{(VI)} \qquad A\varkappa^2 + B\tau^2 + C\varkappa\tau = Q\tau \qquad (Q \neq 0)$$

enthält keine eigentlichen Cesàroschen Kurven.

(Die von Cesàro (Natürliche Geometrie, deutsche Ausgabe, S. 228) gemachte Bemerkung über eine spezielle Kurve der Klasse $2a\varkappa^2 + a\tau^2 = \tau$ ist daher zu berichtigen.)

In allen anderen Fällen kann man aus der Gleichung

$$A\alpha^2 + C\alpha\beta + B\beta^2 = 0,$$

die eine einfache Folgerung aus dem System (4) ist,

$$\text{(14)} \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4AB}}{2A}$$

finden. Nach leicht durchführbarer Rechnung ergibt sich:

$$\alpha = \sqrt{\frac{P(-C \pm H)}{2AQ + P(-C \pm H)}}$$

$$\text{(15)} \qquad \beta = \frac{2A}{-C \pm H}\alpha$$

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{2A[Q(-C \pm H) - 2PA]}{(-C \pm H)[P(-C \pm H) + 2AQ]}}$$

$$(H^2 = C^2 - 4AB).$$

Diese Gleichungen bestimmen vier (reelle und imaginäre) Cesàrosche Geraden, die paarweise zusammenfallen, wenn

$$H^2 = 0$$

wird. Die Realität der Geraden ist bedingt durch gewisse Koeffizientenrelationen, die sich aus den Bedingungen

$$0 < \alpha^2 < 1, \qquad 0 < \gamma^2 < 1$$

leicht herleiten lassen, in ihrer wenig einfachen Form indessen nur geringes Interesse bieten.

Eine besondere Rolle spielt der Fall, daß

$$\text{(16)} \qquad AQ^2 - CPQ + BP^2 = 0$$

*

ist. Hier sind die Cesàroschen Geraden Minimalgeraden, die Kurve aber zerfällt, wie gleich im Eingang gezeigt wurde, in eine Schraubenlinie

$$P\varkappa + Q\tau = 0$$

und eine Bertrandsche Kurve

$$AQ\varkappa + PB\tau = PQ. \tag{17}$$

Da eine Bertrandsche Kurve mit jeder beliebigen Schraubenlinie zu einer Cesàroschen Kurve kombiniert werden kann, so existieren bei ihr ebenso wie bei den Kurven konstanter Krümmung und konstanter Torsion ∞^1 Minimalgeraden, die die Cesàrosche Bedingung erfüllen.

Die Ergebnisse der Diskussion lassen sich nun folgendermaßen zusammenfassen:

> Abgesehen von den Gleichungsformen (I)...(VI existieren für alle Kurven, die eine natürliche Gleichung
>
> $$A\varkappa^2 + B\tau^2 + C\varkappa\tau = P\varkappa + Q\tau$$
>
> besitzen, vier reelle oder komplexe, verschiedene oder paarweise zusammenfalllende Cesàrosche Geraden. Es existieren deren unendlich viele bei den Kurven
>
> $$A\varkappa + C\tau = Q\frac{\tau}{\varkappa}$$
>
> sowie bei den Bertrandschen Kurven und ihren Grenzfällen. Bei den letzteren gibt es außer diesen regulären Cesàroschen Geraden noch unendlich viele Minimalgeraden, die der Cesàroschen Bedingung genügen.

III. Spezielle Fälle.

Es bietet keine Schwierigkeit, die mit einer eigentlichen Cesàroschen Kurve verknüpften abwickelbaren Flächen, die durch die invarianten Cesàroschen Geraden beschrieben werden, aufzustellen, ihre Gratlinien zu bestimmen und die ganze Konfiguration nach wohlbekannten Methoden zu untersuchen.

Von besonderem Interesse sind diejenigen Kurven, für welche die Anzahl der invarianten Tangentenflächen unendlich groß ist. Zu ihnen gehören die Bertrandschen Kurven, für die indessen nur noch die ∞^1 invarianten Tangentenflächen von Minimalkurven zu untersuchen sind, da die Konfiguration der regulären Cesàroschen Geraden als wohlbekannt gelten kann. Zu ihnen gehören ferner die Kurven der von Cesàro und Andrade bemerkten Klasse

$$A\varkappa + B\tau = C\frac{\tau}{\varkappa},$$

deren Gleichung sich passend in die Form

$$\text{(A)} \qquad \varkappa \cos\alpha + \tau \sin\alpha = \frac{1}{\alpha}\frac{\tau}{\varkappa}$$

setzen läßt. Die Cesàroschen Geraden der Kurve (A) schneiden sich paarweise in den Punkten einer Geraden der rektifizierenden Fläche, die mit der Tangente den Winkel α bildet. Die Punkte der Gratlinien der von den Geraden beschriebenen abwickelbaren Flächen liegen stets in der Parallelebene zur rektifizierenden Ebene, die den Krümmungsmittelpunkt der Kurve (A) enthält; dieser ist der Mittelpunkt der von den Gratlinienpunkten gebildeten Hyperbel. Läßt man das Hauptdreikant längs der Kurve (A) gleiten, so beschreiben die Cesàroschen Geraden eine Linienkongruenz, deren eine Brennfläche die Hüllfläche einer veränderlichen Hyperbel ist, deren Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt von (A) ist und deren Ebene der rektifizierenden Ebene von A parallel ist.



Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1911. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1911

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)





Inhalt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1911. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1911
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)





Inhalt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1911. Heft III

November- bis Dezembersitzung

München 1911
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Inhalt.

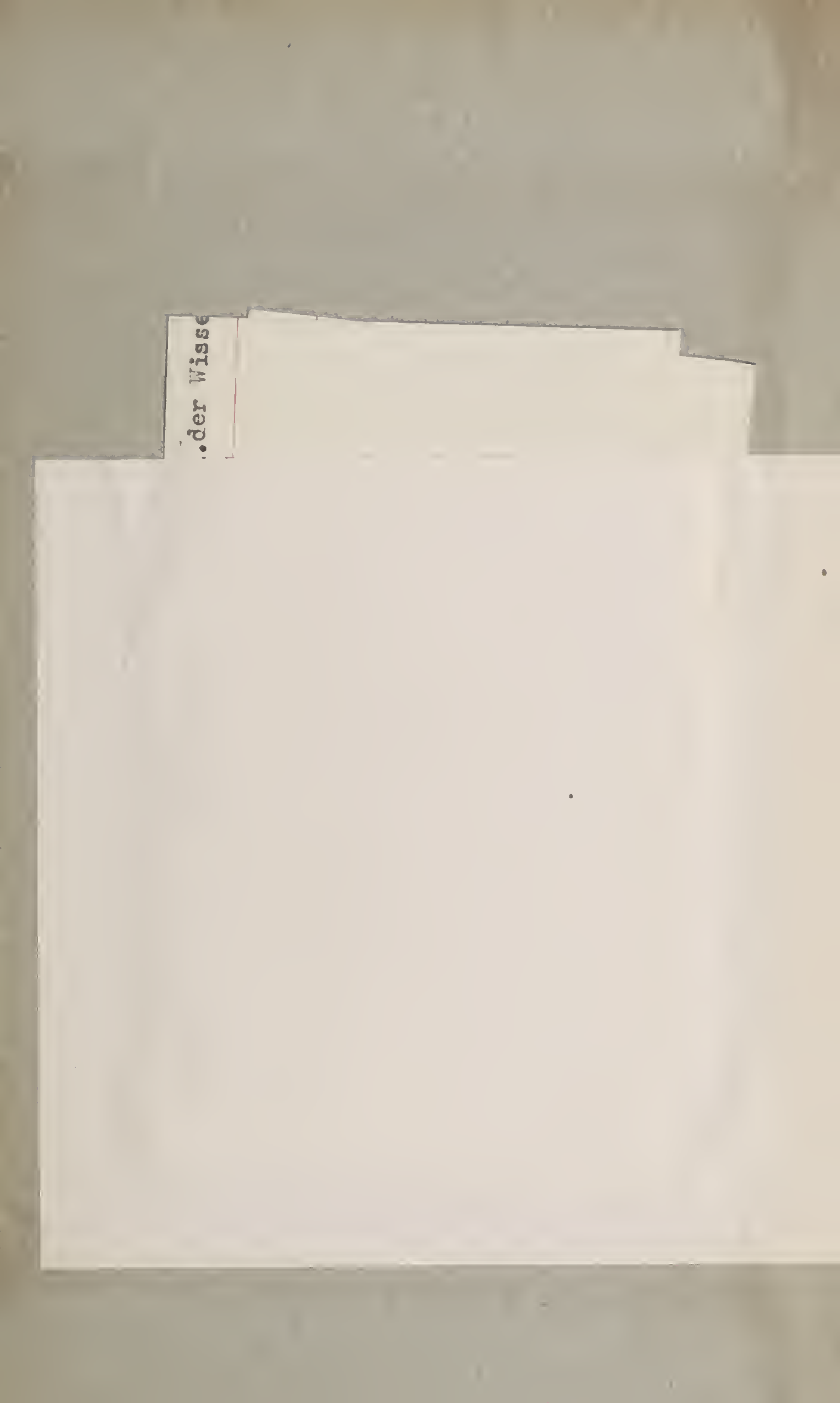
Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.










.der Wisse

